Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" - STM
I Esonero I Modulo Geometria - a.a. 2018/19 - Docente I Modulo: F. Flamini
SVOLGIMENTO QUESITI

Esercizio 1. [10 punti] Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro. Siano date la matrice parametrica

$$A_k := \begin{pmatrix} k & 0 & k-1 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R}),$$

la matrice colonna

$$\underline{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1; \mathbb{R})$$

e la matrice colonna di indeterminate

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta essere invertibile.
(ii) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$, trovati al punto (i), per i quali la matrice A_k è non invertibile, discutere la compatibilità del sistema lineare $A_k\underline{x} = \underline{b}$ ed, in caso di risposta affermativa, scrivere le soluzioni del sistema lineare $A_k\underline{x} = \underline{b}$ secondo il teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare non-omogeneo compatibile.
(iii) Per i valori di $k \in \mathbb{R}$, trovati al punto (i), per i quali A_k è invertibile, determinare l'unica soluzione del sistema lineare $A_k\underline{x} = \underline{b}$.

Esercizio 2. [10 punti] Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al più 2. Si consideri

$$\mathcal{S} := \left\{p_1(x) = x - 2x^2,\ p_2(x) = 1 - x^2,\ p_3(x) = 2 + x\right\}.$$

(i) Verificare che $\mathcal{S}$ è una base per V.
(ii) Dato $q(x) = 1 + x - x^2 \in V$, determinare le coordinate di $q(x)$ rispetto alla base $\mathcal{S}$.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio

$$W := Span\{p_1(x),\ p_2(x)\}$$

nelle coordinate (X_1, X_2, X_3) di V individuate dalla base canonica $\{1,\ x,\ x^2\}$ per V.

Esercizio 3. [10 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vettori non nulli di V.

Per ciascuna delle affermazioni che seguono, stabilire se l'affermazione è vera o falsa motivando la risposta (i.e. se l'affermazione è vera, dimostrare perchè oppure enunciare il risultato da cui discende; se l'affermazione è falsa, esibire un controesempio).

(a) Se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono linearmente dipendenti, la dimensione di V è minore di 3.

(b) Se $\underline{v}_3 = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2$, per qualche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, allora il sistema di vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ non è libero (i.e. i tre vettori sono linearmente dipendenti).

(c) Se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono linearmente indipendenti allora

$$\dim Span\{\underline{v}_1 - \underline{v}_2,\ \underline{v}_2 - \underline{v}_3,\ \underline{v}_3 - \underline{v}_1\} = 3.$$

(d) Se $\dim Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} = 2$ allora, comunque presi due vettori del sistema $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, questi sono linearmente indipendenti.

(e) Se $V = Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ allora $\dim V \leq 3$.

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$

(i) $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k-1 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo det(A) con Laplace rispetto alla riga R_3

$$\det(A_k) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2k$$

Se $k=0$, A_0 non invertibile

se $k \neq 0$, A_k invertibile $\Rightarrow$ ogni sistema lineare $A_k \underline{x} = \underline{b}$ è comp. e ha un'unica soluzione

(ii) Per $k=0$ $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \rightarrow$ $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ fornisce

$$\begin{cases} -x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_3 = 1 \end{cases}$$

che determina $\tilde{A}_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Numero di parametri liberi</u> $= 3 - 2 = 1$

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= t \\ x_1 &= 2 - 2t \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(iii) Se $k \neq 0$, $A_k \underline{x} = \underline{b}$ ha ! soluzione. Con metodo Cramer

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A_k)} \underset{\text{Rispetto a } C_2}{=} \frac{2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2k} = \frac{2(\cancel{-1} - k + \cancel{1})}{-2k} = \frac{-2k}{-2k} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} k & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A_k)} \underset{\text{Rispetto a } R_3}{=} \frac{-1 \cdot \det\begin{pmatrix} k & k-1 \\ 1 & k \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-2k} = \frac{-(k^2 - k + 1) - (2k-1)}{-2k}$$

$$= \frac{-k^2 + k \cancel{-1} - 2k \cancel{+1}}{-2k} = \frac{-k^2 - k}{-2k} = \frac{k+1}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A_k)} \underset{\text{Rispetto a } R_3}{=} \frac{\det\begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-2k} = \frac{2k}{-2k} = -1$$

$$\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k+1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Esercizio 2

$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = 3$ e $\{1, x, x^2\}$ è la base canonica

(i) Rispetto alla base canonica

$$P_1(x) = x - 2x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad P_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - x^2 \quad P_3(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 + x$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(A) \underset{\text{Sarrus}}{=} -2 - 2 - [0] = -4 \neq 0$$

$\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ è una base

(ii) $$q(x) = 1 + x - x^2 = \alpha_1(x - 2x^2) + \alpha_2(1 - x^2) + \alpha_3(2 + x)$$
$$= (\alpha_2 + 2\alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (-2\alpha_1 - \alpha_2)x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} &4\alpha_3 = 2 \Rightarrow \alpha_3 = 1/2 \\ &\alpha_2 = 1 - 2(1/2) = 1 - 1 = 0 \\ &\alpha_1 = 1 - 1/2 = 1/2 \end{aligned}$$

$\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1/2$ sono le coord. di $q(x)$ in base $\{P_1, P_2, P_3\}$

Infatti
$$1/2(x - 2x^2) + 1/2(2 + x) = \frac{1}{2}x - x^2 + 1 + 1/2\, x = 1 + x - x^2$$

(iii) $\dim(\mathrm{Span}\{P_1(x), P_2(x)\}) = 2$

Equazioni parametriche
$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -2s - t \end{aligned}$$

Equazioni cartesiane $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

Esercizio 3

(a) Falsa

Prendendo $\dim(V) = n \geq 3$ e

$\underline{0} \neq \underline{v}_1$, $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ lin. indip. e $\underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ contraddice l'asserzione

(b) Vera

(c) Falsa

$\underline{v}_3 - \underline{v}_1 = -(\underline{v}_2 - \underline{v}_3) - (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \Rightarrow \{\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \underline{v}_3 - \underline{v}_1\}$

non è un sistema libero

(d) Falsa

$\{\underline{v}_1, \lambda\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ con $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_1$ lin. indipendenti,

contraddice l'asserzione

e) Vera

$\dim(V) \leq$ del numero di ogni sistema finito di suoi generatori.