Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame - Geometria I Modulo - Gennaio 2020
V Appello I Modulo per a.a. 2018/19 & Pre-Appello Facoltativo Matricole a.a. 2019/2020
Docente I Modulo: F. Flamini - Docente II Modulo: G. Marini

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. [10 punti] Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato di base canonica e e di prodotto scalare standard $\cdot$. Siano (x_1, x_2, x_3) coordinate rispetto alla base canonica e. Si consideri il vettore $\underline{u} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_3$ e l'applicazione L definita da

$$L(\underline{x}) = \underline{u} \wedge \underline{x}, \quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Verificare che L e' un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare dimensione, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche di $Ker(L)$.
(iii) Determinare dimensione, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche di $Im(L)$.

Esercizio 2. [10 punti] Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al piu' 2. Sia dato il sistema di polinomi

$$P := \left\{p_1(x) = 1 - x,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = 2 + x + x^2\right\}.$$

(i) Verificare che il sistema P costituisce una base per V.
(ii) Determinare le coordinate in base P del polinomio $q(x) = 1 - x^2 \in V$.
(iii) Stabilire se la base P e' positivamente orientata, i.e. e' equiorientata con la base canonica $\{1, x, x^2\}$ di V.

Esercizio 3 [10 punti]. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \ \cdot)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\cdot$, sia dato il sottospazio vettoriale U definito dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{cases}$$

(i) Individuare una base u' per U.
(ii) Determinare una base u'', equazioni cartesiane ed equazioni parametriche di $U^\perp$, complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$.
(iii) Posta $u := u' \cup u''$ la base di $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$, ortonormalizzare u per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 1

$\underline{u} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_3$ in $(\mathbb{R}^3, \cdot)$

$L(\underline{x}) = \underline{u} \wedge \underline{x}$

(i) <u>L è endomorfismo di $\mathbb{R}^3$</u>

$$L(\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2) = \underline{u} \wedge (\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2) = \lambda_1 \underline{u} \wedge \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{u} \wedge \underline{x}_2$$
$$= \lambda_1 L(\underline{x}_1) + \lambda_2 L(\underline{x}_2)$$

(ii) <u>$\ker L$</u>

$L(\underline{x}) = \underline{0} \iff \underline{u} \wedge \underline{x} = \underline{0} \iff \underline{u}$ e $\underline{x}$ lin dip. $\iff$ $\underline{x} \in \mathrm{Span}(\underline{u})$

$$\ker L = \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad e \quad \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

(iii) <u>$\mathrm{Im}\, L$</u>

per teorema di Nullità più Rango, $\dim(\mathrm{Im}\, L) = 2$

Poiché, se $\underline{x} \notin \mathrm{Span}\{\underline{u}\}$, $\underline{u} \wedge \underline{x}$ è un vettore ortogonale a $\underline{u}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(L) = \underline{u}^\perp$. Pertanto

$$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Span}\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Im}\, L \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = 2t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R} \quad e \quad 2x_1 - x_3 = 0$$

Esercizio 2

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad P = \{ P_1(x) = 1 - x, \ P_2(x) = x^2, \ P_3(x) = 2 + x + x^2 \}$

- $$M_{e,e}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{e,e}(P)) \neq 0 \text{ e } P \text{ è base per } V$$

- $q(x) = 1 - x^2$

  Formule cambiamento coordinate $\quad \underline{X} = A\underline{Y}$, $A = M_{e,e}(P)$

  Pertanto

$$\begin{cases} 1 = 1y_1 + 0y_2 + 2y_3 \\ 0 = -y_1 + 0y_2 + y_3 \\ -1 = 0y_1 + 1y_2 + 1y_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{Y} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

- Poiché $\det(A) = -3 < 0$, le basi $e = \{1, x, x^2\}$ e $P = \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ sono controverse (cioè P non è positivamente orientata).

Esercizio 3

$$U: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 \quad - x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Una base per U è data da $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\dim(U^\perp) = 3$

Equaz. cartesiane di $U^\perp$: $\quad (1\ 0\ 1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$x_1 + x_3 = 0$ e $\dim(U^\perp) = 3$

Base per $U^\perp$: ad esempio

$$\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eq. param. di $U^\perp$

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \\ x_4 &= k \end{aligned} \qquad t, s, k \in \mathbb{R}$$

Per ortonormalizzare la base $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4\}$ è sufficiente versorizzare $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$, visto che $\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = 0$, $1 \le i \ne j \le 4$.

Pertanto

$$\mathcal{V} = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$