Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame - Geometria I Modulo - Febbraio 2020

VI Appello I Modulo per a.a. 2018/19

Docente I Modulo: F. Flamini - Docente II Modulo: G. Marini

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. [10 punti] Sia V lo spazio vettoriale delle matrici quadrate $M(2, 2, \mathbb{R})$ e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in V$. Sia W il sottoinsieme di V definito da

$$W := \{M \in V \mid AM - {}^tA {}^tM = O\}.$$

- (i) Verificare che W e' un sottospazio di V .
- (ii) Determinare dimensione ed una base di W .

Esercizio 2. [10 punti] Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in un'indeterminata x e di grado al piu' 2. Si considerino i sottospazi

$$U := \text{Span}\{x, x^2\} \text{ e } W := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V \mid a_0 = 0 = a_1 - a_2\}.$$

- (i) Determinare dimensione di U e di W .
- (ii) Determinare i sottospazi $U \cap W$ e $U + W$.
- (iii) Determinare un sottospazio $K \subset V$ che sia supplementare a W in V , descrivendo esplicitamente una base di K .

Esercizio 3 [10 punti]. Sia $\mathbb{R}^3$ spazio vettoriale munito di base canonica e . Si consideri $L \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito dalle seguenti due condizioni:

- (a) $\lambda_1 = -2$ e' un autovalore di L con relativo autospazio

$$V_2(L) = \text{Span} \left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- (b) $\lambda_2 = 1$ e' un autovalore di L con relativo autovettore $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (i) Determinare $M_{e,e}(L)$, i.e. la matrice rappresentativa dell'operatore L nella base canonica e .
- (ii) Stabilire se L e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$.
- (iii) Motivare il fatto che L e' diagonalizzabile.

Esercizio 1

$$W = \left\{ M \in M(2,2;\mathbb{R}) \mid AM - {}^tA^tM = O, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) W è banalmente sottospazio di $M(2,2;\mathbb{R})$

(ii) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = 0 \\ b - c - 3d = 0 \\ 3a = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -3d \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3d & d \end{pmatrix}$$

Pertanto $W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim W = 1$

Esercizio 2

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \quad U = \text{Span} \{x, x^2\} \quad W = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = a_1 - a_2 = 0\}$$

(1) $\dim U = 2$, $W = \{tx + tx^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \dim W = 1$

(2) Poiché $W \subset U \Rightarrow W \cap U = W$ e $W + U = U$

(3) Una base di W è $\{x+x^2\}$
Prendendo $\{1, x\} \Rightarrow 1, x \notin W$ e $\{1, x\}$ sistema libero in V
Pertanto un sottospazio supplementare a W è

$$K = \text{Span} \{1, x\}$$

Esercizio 3

$L \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ t.c.

• $u_1 = e_1 + 2e_3$ e $u_2 = e_2 + e_3$ autovett. rel. a $\lambda_1 = -2$

• $u_3 = e_1 + e_3$ autovett. rel. a $\lambda_2 = 1$

$M_{e,e}(L)$

$$L(u_1) = -2u_1 \Leftrightarrow L(e_1 + 2e_3) = -2e_1 - 4e_3 \Leftrightarrow L(e_1) + 2L(e_3) = -2e_1 - 4e_3 \text{ (I)}$$

$$L(u_2) = -2u_2 \Leftrightarrow L(e_2 + e_3) = -2e_2 - 2e_3 \Leftrightarrow L(e_2) + L(e_3) = -2e_2 - 2e_3 \text{ (II)}$$

$$L(u_3) = u_3 \Leftrightarrow L(e_1 + e_3) = e_1 + e_3 \Leftrightarrow L(e_1) + L(e_3) = e_1 + e_3 \text{ (III)}$$

$$\text{(I)} - \text{(III)}; \quad \boxed{L(e_3) = -3e_1 - 5e_3}$$

$$L(e_1) = -2e_1 - 4e_3 - 2L(e_3) = -2e_1 - 4e_3 + 6e_1 + 10e_3 = 4e_1 + 6e_3$$

$$L(e_2) = -2e_2 - 2e_3 - L(e_3) = 3e_1 - 2e_2 + 3e_3 \Rightarrow$$

$$M_{e,e}(L) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Poiché } \det(M_{e,e}(L)) = -2 \cdot (-20 + 18) = +4 \neq 0$$

L è un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ che è diagonalizzabile per via di molt. sp. e geom.