

GEOMETRIA ED ALGEBRA TENSORIALE: complementi

Corso n. 2 CFU (Crediti Formativi)

Ingegneria Edilizia ed Edile-Architettura
Docente: Prof. F. Flamini

(oli supporto per Meccanica, Statica e Scienze)

§1. ~~Meccanica~~

Meccanica

V sp. vett. di dim = n

$\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ $\{e_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$ due basi

Sia

$$\bar{e}_i^* = c_{ji} \bar{e}_j$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ji})$$

↓
vettore $\bar{e}_1^*$ espresso in funz. di $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$
vettore $\bar{e}_2^*$ espresso in funz. di $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$

i = indice di colonne
 j = indice di riga

C è ~~matrice di trasformazione~~
~~che esprime i vettori della nuova base in funzione dei vettori della vecchia base~~
 ~~$\bar{e}_i^* = c_{ji} \bar{e}_j$~~

poiché esprime i vettori della nuova base $\{\bar{e}_i^*\}$ in funzione dei vettori della vecchia base $\{\bar{e}_i\}$

Prendiamo $v \in V = D$

$$v = v^i e_i = (v^i)^* e_i^*$$

$(v^1, \dots, v^n)$ componenti di v rispetto a $\{e_i\}$
 $(v^1)^*, \dots, (v^n)^*$ componenti di v rispetto a $\{e_i^*\}$

Geometria

V sp. vett. di dim = n

$e = \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ due basi
 $e^* = \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$

Sia

$$\bar{e}_i^* = \sum_{j=1}^n c_{ji} \bar{e}_j$$

$$M_{e, e^*} = (c_{ji}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

↓
componente di $\bar{e}_1^*$ rispetto ad e
↓
comp. di $\bar{e}_2^*$ rispetto ad e

i = indice di colonne
 j = indice di riga

C è ~~matrice di trasformazione~~
~~che esprime i vettori della nuova base in funzione dei vettori della vecchia base~~
 ~~$\bar{e}_i^* = c_{ji} \bar{e}_j$~~

Prendiamo $\bar{v} \in V = D$

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n v_i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^n (v_i)^* \bar{e}_i^*$$

↓
 $(v^1, \dots, v^n)$ componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\{\bar{e}_i\}$
 $(v^1)^*, \dots, (v^n)^*$ componenti di $\bar{v}$ rispetto a $\{\bar{e}_i^*\}$

Perché

notazione di Einstein

$$\bar{e}_i^* = c_{ij}^* \bar{e}_j \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\bar{v} = v^i \bar{e}_i = (v^i)^* \bar{e}_i^* = (v^i)^* c_{ij}^* \bar{e}_j$$

Però, poiché l'indice di sinistra è ~~libero~~ (cioè si somma su tutti gli $i \in \{1, \dots, n\}$) $\Rightarrow$ possiamo rinominarlo $j \Rightarrow$

$$v = v^j \bar{e}_j = (v^i)^* c_{ij}^* \bar{e}_j$$

Perché la somma dei coefficienti alla $\bar{e}_i$ eguaglianza è sull'indice $i \Rightarrow$ si scrive così in notazione Einstein

$$v = v^j \bar{e}_j = c_{ij}^* (v^i)^* \bar{e}_j$$

↓
coefficiente della
somma su j

Perché stiamo rappresentando lo stesso vettore v nella stessa base $\{e_j\}_{1 \leq j \leq n} \Rightarrow$

$$v^j = c_{ij}^* (v^i)^*$$

cioè

$$[v] = C [v]^*$$

In altri termini

$$[v]^* = C^{-1} [v] \quad (2)$$

in altri termini se C è la matrice cambiamento di base dalla vecchia base e alla nuova base e^* ed ha per colonne i vettori di e^* espressi in componenti rispetto ad e , sulle componenti dei vettori si opera con l'inversa C^{-1} , cioè se conosco $\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ e C e voglio $\begin{pmatrix} (v^1)^* \\ \vdots \\ (v^n)^* \end{pmatrix}$, la relazione (1), nelle coord., determina la relazione (2)

la relazione

$$\bar{e}_i^* = \sum_{j=1}^n c_{ji}^* \bar{e}_j \quad 1 \leq i \leq n$$

con $C = (c_{ji}) = M_{e, e^*}$

si può scrivere in notazione matriciale

$$(\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) C \quad (1)$$

Ora

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n v^i \bar{e}_i = \sum_{i=1}^n (v^i)^* \bar{e}_i^*$$

si può scrivere in notazione matriciale

$$\bar{v} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*) \begin{pmatrix} (v^1)^* \\ \vdots \\ (v^n)^* \end{pmatrix}$$

↓
colonna
componenti
di $\bar{v}$ rispetto
ad e

↓
colonna
componenti
di $\bar{v}$ rispetto
ad e^*

Dalla eguaglianza (1) $\Rightarrow$

$$\bar{v} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*) C \begin{pmatrix} (v^1)^* \\ \vdots \\ (v^n)^* \end{pmatrix}$$

e poiché è l'espressione di $\bar{v}$ sempre in base e $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} (v^1)^* \\ \vdots \\ (v^n)^* \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} (v^1)^* \\ \vdots \\ (v^n)^* \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Meccanica

U e V spazi vettoriali
dotati di prodotto interno.
(euclidei)

Sia

$$U \xrightarrow{A} V$$

un'applicazione lineare

Sia

$$U \xleftarrow{A^T} V$$

l'applicazione trasposta
definita come

$$3) \boxed{A(u) \cdot v = u \cdot A^T(v)} \quad \begin{matrix} \forall u \in U \\ \forall v \in V \end{matrix}$$

e con tale scrittura si
intende

$$\begin{matrix} A(u) & \cdot & v \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{prod.} & & \text{prod.} \\ \text{interno in } V & & \text{interno in } U \end{matrix} = u \cdot A^T(v)$$

se fissiamo
che su V

- ad A corrisponde una
matrice $[A]$ e ad A^T una matrice $[A]^T$
- il prodotto interno su U
che in V si rappresenta
con la matrice Identità

Perciò

$$\begin{aligned} A(u) \cdot v &= [A]u \cdot v = \\ &= [A] \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \stackrel{\text{ob (3)}}{=} \\ &= (u^1 \dots u^n) [A]^T \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

↑
prodotto
righe $\times$ colonne

Richiè

$$u \cdot A^T(v) = (u^1, \dots, u^n), [A^T] \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$$

Geometria

U e V spazi vettoriali euclidei
dotati di prodotto scalare
 $\langle, \rangle_U$ e $\langle, \rangle_V$ risp.

Sia

$$U \xrightarrow{A} V$$

un'applicazione lineare

Sia

$$U \xleftarrow{A^*} V$$

l'applicazione aggiunta (o traspos)
definita come

$$\boxed{\langle A(\bar{u}), \bar{v} \rangle_V = \langle \bar{u}, A^*(\bar{v}) \rangle_U} \quad (3)$$

Oss:

Ricordiamo che se $U=V$
e $A=A^*$ non è altro che
un operatore autoaggiunto

↙ operatori ortonormali su U
(IN BASTA GENERALIZIO CHE SEQUE)
(E' FALSO)

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{u}), \bar{v} \rangle_V &= \langle [A]\bar{u}, \bar{v} \rangle = \\ &= {}^t \bar{u} {}^t [A] \bar{v} \end{aligned}$$

prodotto righe per colonne

Contemporaneamente

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, A^*(\bar{v}) \rangle_U &= \langle \bar{u}, [A^*](\bar{v}) \rangle_U \\ &= {}^t \bar{u} [A^*] \bar{v} = (u^1, \dots, u^n) [A^*] \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto, da (3) e dalle
precedenti due uguaglianze

$$\Rightarrow [A^T] = [A]^T$$

cioè la matrice che rappresenta l'applicazione A^T è la matrice trasposta di quella che rappresenta l'applicazione A .

Se ora abbiamo le 2 basi in V

$$\{e_i\}_{1 \leq i \leq n} \text{ e } \{e_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$$

e $A: V \rightarrow V$ è applicazione

lineare di V in V (σ ~~linear transformation~~)

cioè $A \in \text{End}(V)$ e se

$[C]$ è la matrice cambiamento di base, ora (2) abbiamo

$$[w] = [C][u]^*$$

$$[v] = [C][v]^*$$

Però $[v] = [A][w]$

$$[v]^* = [A]^* [w]^*$$

matrice che rappresenta l'endomorfismo A in base $\{e_i^*\}_{1 \leq i \leq n}$

$$\Rightarrow [v] = [A][w] = [A][C][u]^*$$

$$[C][v]^* \Rightarrow [v]^* = [C]^{-1}[A][C][u]^*$$

$$\Rightarrow [A]^* = [C]^{-1}[A][C]$$

$$\Rightarrow [A^*] = [A]^T$$

cioè la matrice che rappresenta A^* in quelle basi ortonormali coincide con la trasposta della matrice che rappresenta A .

Def: se $U = V$ ritroviamo che un operatore A è autoaggiunto (cioè $A = A^*$) $\Leftrightarrow [A]$ è una matrice simmetrica in ogni base ortonormale

Se ora abbiamo $A \in \text{End}(V)$ come qui a sinistra

$$\begin{array}{ccc} (V, e) & \xrightarrow{A} & (V, e) \\ \text{id}_V \downarrow & \hookrightarrow & \uparrow \text{id}_V^* \\ (V, e^*) & \xrightarrow{A^*} & (V, e^*) \end{array}$$

dove

$$\bullet \text{id}_V(\bar{e}_i) = \bar{e}_i \text{ espresso però in } e^* \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\bullet \text{id}_V^*(\bar{e}_i^*) = \bar{e}_i^* \text{ espresso però in } e \quad 1 \leq i \leq n$$

Poiché tutto il diagramma è commutativo, cioè

$$A = \text{id}_V^* \circ A \circ \text{id}_V$$

Se $M_e(A)$ è $[A]$ la matrice che rappresenta A in base e e $M_{e^*}(A)$ è $[A]^*$ la matrice che rappresenta A in base e^*

$$\Rightarrow M_e(A) = M_{e, e^*}(\text{id}_V^*) M_{e^*}(A) M_{e^*, e}(\text{id}_V)$$

$$[A] = [C][A]^*[C]^{-1} \Rightarrow$$

$$[A]^* = [C]^{-1}[A][C]$$

Meccanica e Geometria (3)
 Pertanto la matrice $[A]$ e $[A]^*$ che rappresentano
 una medesima applicazione lineare espressa
 in due basi diverse e ed e^* sono coniugate
 o simili cioè

$$[A]^* = [C]^{-1} [A] [C] \quad (4)$$

dove $[C]$ è la matrice cambiamento di base
 da e ad e^* (i.e. che ha per colonne i vettori
 di e^* espressi in base e).

Oss: se e ed e^* sono base ortonormali $\Rightarrow$

$[C]$ è una matrice ortogonale cioè

$$[C] \in O(n, \mathbb{R}) := \left\{ [C] \in M(n \times n; \mathbb{R}) \mid [C] [C]^T = [C]^T [C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \right\}$$

$O(n, \mathbb{R})$ è il gruppo delle matrici ortogonali

(gli Ingegneri lo denotano con Orth).

Pertanto

$$[C] [C]^T = Id \Leftrightarrow [C]^T = [C]^{-1}$$

cioè le matrici ortogonali sono quelle matrici
 (invertibili) la cui inversa coincide con la
 trasposta. Pertanto, in base ortonormale la
 relazione di conjugio o similitudine si
 trasforma in

$$[A]^* = [C]^T [A] [C]$$

e si nota che $[A]^*$ e $[A]$ sono conjugate.

Statica

$\mathbb{E}$

$P, O \in \mathbb{E}$

veettore posizione di P rispetto O

$$P - O = \overrightarrow{OP}$$

Prodotto scalare in V munito prod. interno

$$\begin{aligned} \cdot: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Modulo di un vettore

$$|\vec{a}| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2}$$

Vettore di $\vec{a}$

$$\text{vers}(\vec{a}) = |\vec{a}|^{-1} \vec{a}$$

Angolo $\widehat{ab}$

$$\widehat{ab} = \arccos\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = \arccos(\text{vers}(\vec{a}) \cdot \text{vers}(\vec{b}))$$

base ortonormale

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \text{obeta di Kronecker} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_i \perp \vec{e}_j \text{ se } i \neq j \text{ e } |\vec{e}_i| = 1 \forall i$$

Prodotto vettoriale in V

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \end{aligned}$$

↓
necessario
euclideo e
di dim = 3

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \text{ paralleli} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \widehat{uv}$$

Geometria

(4)

$\mathbb{R}^3$

$P, O \in \mathbb{R}^3$

giacitura della retta per O,

$$P - O = \vec{v}$$

Prodotto scalare in V euclideo

$$\begin{aligned} \langle, \rangle: V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\longrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

Norma di un vettore (lunghezza)

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

vettore di $\vec{a}$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{e}_{\vec{a}}\| = 1$$

$$\cos(\widehat{ab}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \langle \vec{e}_{\vec{a}}, \vec{e}_{\vec{b}} \rangle$$

base ortonormale

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

cioè vettori a 2 a 2 ortogonali

Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

ATTENZIONE

$\exists$ SOLO in $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v}$$

• $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ prop.

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è ortogonale a

$\text{Lin}(\vec{u}, \vec{v})$ se $\vec{u}, \vec{v}$ lin. indep.

e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$ posit. orientata

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \widehat{uv} - \text{Area parallelogramma}$$

Retta in $\mathbb{E}$

$$S := \{P \in \mathbb{E} \mid P - P_0 \times \bar{S} = \bar{0}\}$$

con $\bar{S}$ versore e $P_0 \in S$

$$s_i = \bar{S} \cdot \bar{e}_i \quad \text{componenti direzionali}$$

equiv.

$$\bar{S} = s^i \bar{e}_i \quad \text{Not. Einstein}$$

Piano in $\mathbb{E}$

$$\pi_{\bar{m}} = \{P \in \mathbb{E} \mid (P - P_0) \cdot \bar{m} = 0\}$$

Orientazione

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3$$

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \bar{e}_1$$

$$\bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \bar{e}_2$$

SIMBOLO DI RICCI

$$e_{ijk} := \bar{e}_i \times \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k$$

VOLUMI

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \text{Volume con segno del prisma di spigoli } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$$

Retta in $\mathbb{R}^3$

$$s: \bar{X} = \bar{P}_0 + t \bar{S}$$

$\bar{S}$ vettore direttore, $\bar{P}_0 \in \mathbb{R}^3$ punto

$$\text{se } \bar{P} \in S \Leftrightarrow \bar{P} - \bar{P}_0 = t \bar{S} \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \bar{P} - \bar{P}_0 \text{ e } \bar{S} \text{ prop.} \Leftrightarrow$$

$$\bar{P} - \bar{P}_0 \times \bar{S} = \bar{0}$$

le componenti del versore direttore $\bar{S}$ rispetto alla base canonica (ortonormale) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^3 s_i \bar{e}_i \text{ con } s_i = \bar{S} \cdot \bar{e}_i$$

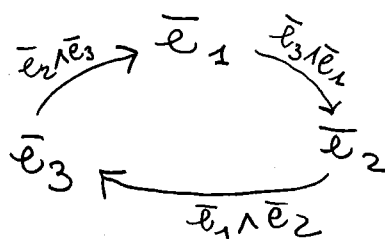
Piano in $\mathbb{R}^3$

$\bar{m}$ = vettore normale al piano =
= vettore ortogonale alla giacitura
di $\pi_{\bar{m}} = \forall \bar{v} \in \{\text{giacitura di } \pi_{\bar{m}}\}$

$$\langle \bar{v}, \bar{m} \rangle = 0 \text{ e } \forall P, P_0 \in \pi_{\bar{m}}$$

$$P - P_0 = \bar{v} \in \{\text{giacitura di } \pi_{\bar{m}}\}$$

Orientazione



PRODOTTO MISTO BASECAN

$$e_{ijk} = \langle \bar{e}_i \wedge \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle$$

VOLUMI

$$|\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \rangle| = |\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = \text{Volume prisma}$$

Poniamo

$$\varepsilon_{ijk} = e_i \times e_j \cdot e_k$$

↓
prodotto misto dei
vettori della base canonica

ovvero

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ permutaz. classe pari} \\ -1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ permutaz. classe dispari} \\ 0 & \text{se esiste una ripetizione negli indici} \end{cases}$$

ovvero

$\{i, j, k\}$ è di classe pari se devo fare un numero PARI di scambi fra le coppie di indici per riportare la terna i, j, k alla terna standard $1, 2, 3$.

Esempi

(a) $\{2, 3, 1\}$ è di classe pari

$$\{2, 3, 1\} \xrightarrow{1^2} \{2, 1, 3\} \xrightarrow{2^2} \{1, 2, 3\} \quad 2 \text{ volte}$$

(b) $\{2, 1, 3\}$ è di classe dispari

$$\{2, 1, 3\} \xrightarrow{1^2} \{1, 2, 3\} \quad 1 \text{ volta}$$

oppure

$$\{2, 1, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\} \rightarrow \{3, 2, 1\} \rightarrow \{3, 1, 2\} \rightarrow \{1, 3, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \quad 5 \text{ volte}$$

- La classe non dipende da come si scambia! È INTRINSECA
- Deriva da terna positiv. orientate (destrosc) o neg. orientate (sinistrese)

$$(*) \quad e_{ijk} \cdot e_{lmk} = \delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}$$

dim
La notazione $e_{ijk} \cdot e_{lmk}$ presuppone la NOTAZIONE DI EINSTEIN
cioè

$$e_{ijk} \cdot e_{lmk} = \sum_{k=1}^3 e_{ijk} e_{lmk} = e_{ij1} e_{lm1} + e_{ij2} e_{lm2} + e_{ij3} e_{lm3}$$

poiché $1 \leq i, j, l, m, k \leq 3$ solo se $i, j, l, m \neq k$ c'è speranza che
sia una quantità $\neq 0$. Non è restrittivo supporre $k=1$ e
 $2 \leq l, m, i, j \leq 3$. Se $l=m$ oppure $i=j$ di nuovo $=0$.

Perciò $l \neq m$ e $i \neq j$ = Uniche possibilità

$$l=i \neq j=m \Rightarrow e_{ij1} e_{ij1} = (e_{ij1})^2 = 1 \Rightarrow \delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}$$

$$l=j \neq i=m \Rightarrow e_{ij1} e_{ji1} = -1 \Rightarrow$$

(**) Per successiva saturazione di coppie di indici liberi si ottengono

$$(a) \quad e_{ijk} \cdot e_{jlk} = 2 \delta_{ie}$$

$$(b) \quad e_{ijk} \cdot e_{ijk} = 6$$

dim (a) Pensando (*) moltiplico ambo i membri per δ_{jm}
perciò si cancellano gli addendi per cui $j \neq m$

$\Rightarrow$ (*) diventa

$$e_{ijk} \cdot e_{jlk} = \delta_{ie} \underbrace{\delta_{jj}}_1 - \delta_{ij} \delta_{je} = \delta_{ie} - \delta_{ij} \delta_{je}$$

Come prima non è restrittivo $\sup$ supporre $k=1 \Rightarrow$

$$e_{ij1} \cdot e_{lj1} = \sum_{j=2}^3 e_{ij1} \cdot e_{lj1} \neq 0 \text{ solo se } i=l \neq j \neq 1$$

al II membro

$$\sum_{j=2}^3 (\delta_{ie} - \delta_{ij} \delta_{je}) = 2 \delta_{ie} \quad (\text{ok})$$

(b) Moltiplicando (a) per $\delta_{ie} \Rightarrow$

$$e_{ijk} \cdot e_{ijk} = \sum_{i=1}^3 e_{ijk} \cdot e_{ijk} \quad \text{per } 1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$$

$$= 3 \cdot (2 \delta_{ie}) = 6 \text{ se } i=l. \quad (\text{ok})$$

2

Sistemi di Forze e Coppie

Quella di *forza* va considerata una nozione primitiva. Non è necessario, né opportuno, dare una definizione fisica di forza. Invece, quando se ne costruisce il modello matematico, è importante, anzi indispensabile, definirne con estrema precisione gli elementi caratteristici. Questo faremo in questo capitolo, dove considereremo anche un altro speciale costruito, la *coppia*. Forze e coppie sono *vettori applicati*, cioè, vettori cui competono specifici punti o rette di applicazione (nel caso delle forze) e specifici piani di applicazione, nel caso delle coppie: in quanto vettori, forze e coppie si manipolano come abbiamo visto nel capitolo precedente; in quanto titolari di punti, rette e piani di applicazione, le forze e coppie di un sistema si compongono e decompongono secondo regole non sempre immediate, la cui collezione costituisce l'oggetto principale della Statica, cioè, della parte più antica e basilare della Meccanica; questo capitolo contiene un'esposizione elementare delle principali tra quelle regole.

4 Nozione di forza

Una forza è un *vettore applicato*, cioè, un paio ordinato

$$(P, f) \in \mathcal{E} \times V_{\mathcal{E}},$$

= traslazioni in
spazi affini

dove

- P è il *punto di applicazione*,
- $\text{vers } f$ individua *direzione e verso di applicazione*,
- $|f|$ è l'*intensità*.

Gli elementi che caratterizzano una forza sono il punto, la direzione e il verso di applicazione, e l'intensità. Se $|f| \neq 0$, la *retta di azione* della forza (P, f) è il luogo r di tutti i punti $P' \in \mathcal{E}$ tali che $\overrightarrow{PP'} \parallel f$:

$$r = \{P' \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{PP'} \times f = 0\}$$

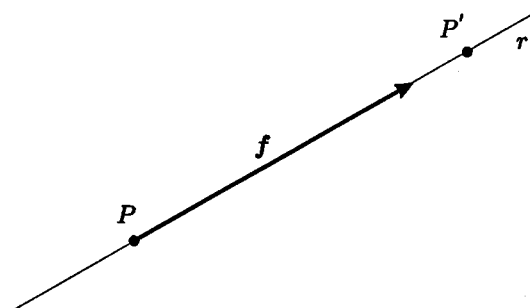


Figura 2.1.

(Fig. 2.1).

OSSERVAZIONE. Ci sono precise motivazioni fisiche per introdurre due simili ma distinte nozioni di forza come vettore applicato.

Se una forza f agisce su un corpo rigido, non è indispensabile conoscerne il punto di applicazione: conoscere la retta di azione è sufficiente a predire gli effetti statici e dinamici dell'azione di f . Se invece f agisce su un corpo deformabile, è importante conoscere il punto di applicazione, perché di regola al variare di questo si ottengono effetti differenti. Consideriamo, infatti, la trave deformabile rappresentata in figura, incastrata ad un'estremità e soggetta ad

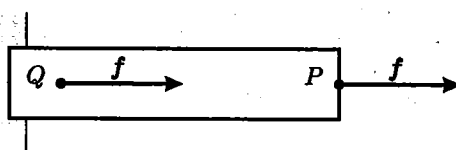


Figura 2.2.

una forza f di trazione: la trave subirà un allungamento diverso a seconda che il punto di applicazione sia in P o in Q . Un'osservazione analoga vale in dinamica (Fig. 2.3): l'applicazione della forza f in P o in Q produce la stes-

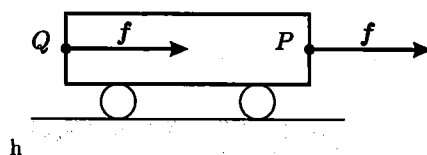


Figura 2.3.

sa accelerazione in tutti i punti del carrello se questo è rigido, due campi di accelerazione differenti se il carrello è deformabile.

Dunque, quando i corpi allo studio sono considerati deformabili, è opportuno che le forze che li sollecitano siano schematizzate come vettori *applicati ad un punto*; quando i corpi sono riguardati come rigidi, basta immaginarli soggetti a forze di cui si conosca la retta d'azione, schematizzate come *vettori applicati ad una retta*, cioè, come vettori applicati ad un punto arbitrario di una retta assegnata (si veda la Sezione 8.4).

4.1 Momento di una forza rispetto ad un polo

Si definisce *momento di una forza rispetto ad un punto Q*, detto *polo*, il vettore

$$m(Q) = \vec{QP} \times \vec{f};$$

vediamone le proprietà salienti.

- (i) *Il momento della forza (f) dipende in generale dall'angolo QPO.*

Più precisamente,

$$m(Q') = \vec{Q'P} \times \vec{f} = (\vec{Q'Q} + \vec{QP}) \times \vec{f} = \vec{Q'Q} \times \vec{f} + m(Q)$$

(Fig. 2.4).

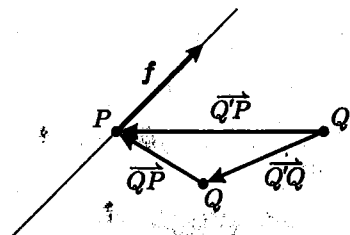


Figura 2.4.

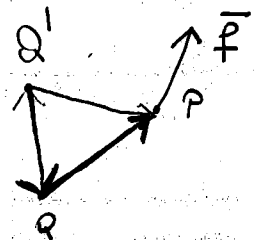
Vale dunque la seguente *formula di trasporto*:

$$m(Q') = m(Q) + \vec{Q'Q} \times \vec{f}$$

in base alla quale è anche immediato constatare che il momento rimane invariato se il polo viene spostato lungo una retta parallela alla retta d'azione e quindi $\vec{Q'Q} \parallel \vec{f}$.

- (ii) Spostando il punto di applicazione di una forza lungo la sua retta d'azione, il suo momento rispetto al polo Q non varia. Infatti,

$$\vec{QP'} \times \vec{f} = (\vec{QP} + \vec{PP'}) \times \vec{f} = \vec{QP} \times \vec{f}$$



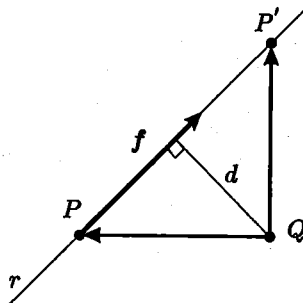


Figura 2.5.

(si veda la Fig. 2.5). Come abbiamo già osservato, nella statica dei corpi rigidi l'effetto di (P, f) e (P', f) è lo stesso: le forze possono essere intese come vettori *applicati ad una retta*, nel senso che si tratta di vettori applicati ad un punto arbitrario della loro retta d'azione.

- (iii) Per definizione di prodotto vettoriale, il modulo del vettore momento è pari al prodotto di $|f|$ per la distanza d del polo dalla retta d'azione. Si noti che il momento non è un vettore applicato.

5 Sistemi di forze

Un *sistema di forze* è un insieme costituito da un numero finito di forze:

$$\{(P_i, f_i) \mid i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Dato un sistema di forze, se ne definisce il *risultante*:

$$r := \sum_{i=1}^N f_i;$$

e il *momento risultante* rispetto ad un polo Q scelto arbitrariamente in $\mathcal{E}$:

$$m(Q) := \sum_{i=1}^N m_i(Q) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{QP_i} \times f_i. \quad (5.1)$$

Né il risultante né il momento risultante sono vettori applicati. È facile vedere che il momento risultante varia al variare del polo nel modo seguente:

$$m(Q') = m(Q) + \overrightarrow{Q'Q} \times r. \quad (5.2)$$

5.1 Asse centrale

Una conseguenza immediata della formula di trasporto (5.2) è che il momento di un sistema di forze a risultante nullo non cambia con il polo. Per studiare il caso generale ($r \neq 0$), introduciamo la nozione di *decomposizione ortogonale* di un vettore rispetto ad una giacitura orientata.

Con riferimento alla Fig. 2.6, sia π_n il piano di normale n , con $|n| = 1$. Si

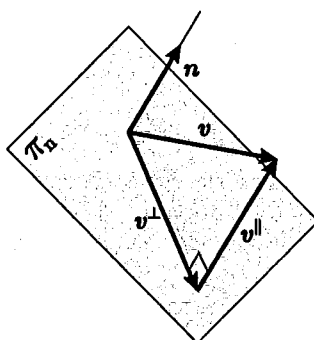


Figura 2.6.

definisca:

$$v^{\parallel} = (v \cdot n)n, \quad v^{\perp} = v - v^{\parallel}, \quad (5.3)$$

donde

$$v = v^{\parallel} + v^{\perp},$$

e si osservi che, poiché $v^{\parallel}$ e $v^{\perp}$ sono mutuamente ortogonali,

$$v^2 = |v^{\parallel}|^2 + |v^{\perp}|^2. \quad (5.4)$$

Dato, allora, un sistema di forze con $r \neq 0$, eseguiamo una decomposizione ortogonale del suo momento risultante, scegliendo come giacitura quella individuata da $\text{vers } r$. Avremo intanto, facendo uso di (5.1)-(5.3), che

$$\begin{aligned} m^{\parallel}(Q') &:= (m(Q') \cdot \text{vers } r) \text{vers } r \\ &= [(m(Q) + \overrightarrow{Q'Q} \times r) \cdot \text{vers } r] \text{vers } r \\ &= m^{\parallel}(Q). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quindi, al variare di Q' in $\mathcal{E}$, si ha:

$$m^{\parallel}(Q') = \text{cost.} \quad (5.6)$$

Il modulo del momento risultante può dunque variare solo se varia $m^{\perp}(Q')$, cioè, il vettore:

*utilizzato
similmente
con Gram-Schmidt*

$$m^\perp(Q') := m(Q') - m^\parallel(Q').$$

Dalle (5.4) e (5.6) segue che, qualunque sia la scelta del polo Q' , si ha sempre:

$$|m(Q')| \geq |m^\parallel(Q)|; \quad (5.7)$$

dunque, se $m^\parallel(Q) \neq 0$, non c'è alcun polo Q rispetto al quale il momento si annulli. In effetti, tenendo conto di (5.4), si ha che

$$|m^\parallel(Q)| = \min_{Q' \in \mathcal{E}} |m(Q')|;$$

e si trova che il luogo dei poli di minimo momento risultante è una retta parallela al risultante, di equazione:

$$m(Q') - (m(Q) \cdot \text{vers } r) \text{vers } r = 0. \quad (5.8)$$

Per dimostrare quest'ultima affermazione, scegliamo un riferimento di comodo ($O \equiv Q$; $e_1, e_2, e_3 \equiv \text{vers } r$) (di modo che, in particolare, $\overrightarrow{QQ'} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 \text{vers } r$; si veda la Fig. 2.7) e riscriviamo la formula di trasporto

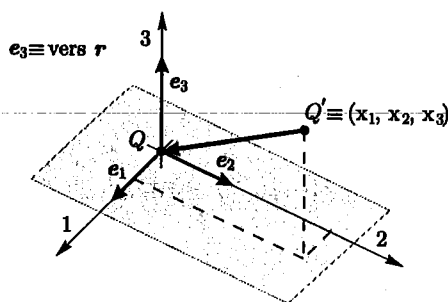


Figura 2.7.

(5.2) nel modo seguente:

$$m(Q') = m^\parallel(Q) + m^\perp(Q) + \overrightarrow{QQ'} \times r,$$

vale a dire,

$$\begin{aligned} m(Q') &= m^\parallel(Q) e_3 + m_1^\perp(Q) e_1 + m_2^\perp(Q) e_2 - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} \\ &= m^\parallel(Q) e_3 + (m_1^\perp - r x_2) e_1 + (m_2^\perp + r x_1) e_2. \end{aligned}$$

Dunque, se Q' è tale che

$$(m_1^\perp - r x_2) e_1 + (m_2^\perp + r x_1) e_2 = 0,$$

Esistenza ed unicità di soluzioni di sistemi lineari

Per semplicità U e V sp. vettoriali arbitrari!

Matrice di un'applicazione lineare

$A: U \rightarrow V$ appl. lineare $\Rightarrow [A]$ matrice associata
nella basi fissate in U e V

$b \in V$ vettore
noto $x \in U$ vettore
incognita

Risolvere il sistema lineare

$$[A]x = b \quad (5)$$

vorrei stabilire se esistono vettori $x \in U$ t.c.
la loro immagine mediante A sia b .

Si aprono 2 problemi:

(a) Esistono soluzioni per (5)? Se (SI) il sistema
lineare (5) si dice compatibile o risolvibile.
Se (NO) il sistema lineare (5) si dice incompatibile.

(b) Se la risposta ad (a) è (SI), quante soluzioni
esistono per (5)?

Il problema (a) è detto problema di Esistenza di soluzioni
Il problema (b) è detto problema di unicità di soluzioni

Ad entrambi i quesiti risponde il teorema
di Rouché-Capelli

- (i) Il sistema (5) è compatibile $\Leftrightarrow \text{rg}([A]) = \text{rg}([A, b])$
dove $[A, b]$ matrice alata o completa, cioè dove
si è aggiunta la colonna dei termini noti della matrice
 $[A]$
- (ii) Se $r = \text{rg}([A]) = \text{rg}([A, b])$ è il rango (cioè
il numero di equazioni effettive e l'indipendenti di
 $Ax = b$) e $n = \dim(U) = \text{numero indeterminato} = \text{numero}$

componenti del vettore incognito $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ilora (5) ammette

∞^{m-p} soluzioni che hanno una struttura di sottospazio affine (o varietà lineare) in U cioè della forma

(6) $\boxed{\bar{x} = \bar{x}_0 + W}$ ✓ traslazione del sp. W mediante il vettore $\bar{x}_0$

con $W \subset U$ sottospazio vettoriale di U t.c.
 $\dim(W) = m - p$, dove

- $\bar{x}_0$ soluzione particolare di $A\bar{x} = b$, cioè $A\bar{x}_0 = b$
- W sottospazio vettoriale di dimensione $m - p$ di soluzioni del sistema omogeneo associato
 $A\bar{x} = 0$!

Ricordiamo che, data $A: U \rightarrow V$ abbiamo i 2 sp.

$$\underline{\text{Ker}(A)} := \left\{ u \in U \mid A(u) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vettore nullo} \\ \text{di } V}}{0 \in V} \right\} \subset U$$

$$\underline{\text{Im}(A)} := \left\{ v \in V \mid \exists \text{ almeno un } u \in U \text{ t.c. } v = A(u) \right\} \subset V$$

Pertanto riconsiderando (5)

- i) (5) è compatibile $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$. Poiché un sistema di generatori di $\text{Im}(A)$ è dato dalle colonne di $[A]$, dire $\text{rg}([A]) = \text{rg}([A, b])$ vuol dire che la colonna b dipende linearmente dalle colonne della sola $[A]$, cioè $b \in \underset{\text{L.W}}{\text{Span}} \{ \text{colonne di } [A] \} = \text{Im}(A)$. Perciò $b \in \text{Im}(A) \Leftrightarrow \text{rg}([A]) = \text{rg}([A, b])$
E questo spiega il punto (i) di Rouchié - Capella.

(ii) Supponiamo che (5) sia compatibile, e sia x_0 una soluzione fissata $\Rightarrow Ax_0 = b$.

Sia $\bar{w} \in \text{Ker}(A)$ un qualsiasi elemento $\Rightarrow$

$$\bar{y} = x_0 + \bar{w}$$

è ancora soluzione di (5): infatti, poiché A è lineare

$$A(\bar{y}) = A(x_0 + \bar{w}) = A(x_0) + A(\bar{w}) = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b}$$

$\downarrow$
 $A(x_0) = \bar{b}$
 $\bar{w} \in \text{Ker}(A)$

Pertanto, poiché

$$\dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}([A]) = p$$

ricorrendo al teorema di Nullità più Rango

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$$

$\dim(V) = n =$ numero incognite

$\dim(\text{Im}(A)) = p = \text{rango}([A]) =$ numero equazioni effettive ed indipendenti di $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = n - p$$

In altre parole, il sottospazio $\text{Ker}(A)$ non è altro che $W = \text{Ker}(A)$. Se $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-p}\}$ è una base di $\text{Ker}(A)$, allora la soluzione generica di (5) è

$$x = \bar{x}_0 + \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_{n-p} \bar{e}_{n-p}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

una sol. particolare di $Ax = b$

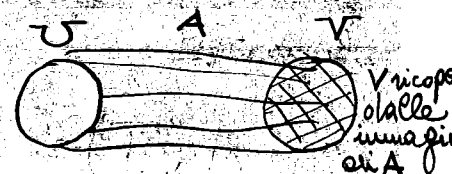
tutte le possibili comb. lineari della base di $\text{Ker}(A)$
 $=$ generica soluzione di $Ax = 0$.

Pertanto

- Esistenza soluzione di (5) $\Leftrightarrow \bar{b} \in \text{Im}(A)$
- Unicità soluzione di (5) (se esiste) $\Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 0$.
 $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ cioè $[A]$ di rango massimo.

Ricordiamo che:

A suriettiva se $\text{Im}(A) = V$, cioè



A iniettiva se $\text{Ker}(A) = \{0\}$, cioè



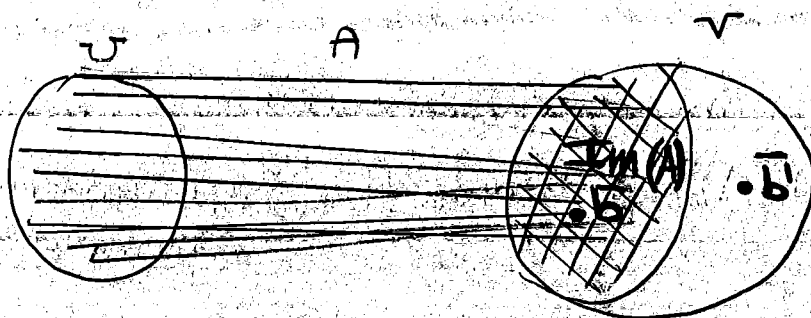
Pertanto, se esiste soluzione in (5)

Unicità soluzione di (5) $\Leftrightarrow A$ iniettiva

Teorema

Esistenza e unicità di soluzione in (5)

Ass. Qui non è un $\Leftrightarrow$. Infatti il $\Leftarrow$ non funziona
 non vale



A non è suriettiva, perché $\text{Im}(A) \subsetneq V$

- Se prendo $\bar{b}$ come termine noto, (5) è compatibile poiché $\bar{b} \in \text{Im}(A)$
- Se prendo $\bar{b}'$ come termine noto, $A\bar{x} = \bar{b}'$ non è compatibile poiché $\bar{b}' \notin \text{Im}(A)$.

- 1) se $\dim(U) < \dim(V)$, A non potrà mai essere
suriettiva poiché non posso immettere V con le
 immagini di vettori che vivono in U , spazio
 vettoriale di dimensione più piccola.
Infatti dal Teorema di Nullità più Rango

$$\dim(\text{Im}(A)) = \dim(U) - \dim(\text{Ker}(A))$$

$$\begin{array}{ccc} < \dim(V) - \dim(\text{Ker}(A)) < \dim(V) & \Rightarrow & \text{A non è suriettivo} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{per ipotesi} & & \dim(\text{Ker}(A)) \geq 0 \\ \dim(U) < \dim(V) & & \end{array}$$

- A potrebbe essere iniettiva (ma si deve studiare $\text{Ker}(A)$
 NON È AUTOMATICO)

- $A\bar{x} = \bar{b}$ potrebbe essere compatibile (dipende
 dove prendiamo $\bar{b}$, se $\bar{b} \in \text{Im}(A)$ (OK) se
 $\bar{b} \notin \text{Im}(A)$ (NO))

- 2) se $\dim(U) > \dim(V)$, A non potrà mai essere
iniettiva: infatti dal Teorema di Nullità più Rango

$$\begin{array}{ccc} \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(U) - \dim(\text{Im}(A)) \geq \dim(U) - \dim(V) & & \downarrow \\ > 0 \Rightarrow \text{Ker}(A) \neq \{0\} & & \text{Im}(A) \subseteq V \\ \downarrow & & \\ \dim(U) > \dim(V) & & \end{array}$$

- A potrebbe essere suriettiva (si deve vedere se V
 viene coperto dalle immagini di U)
- $A\bar{x} = \bar{b}$ potrebbe essere compatibile (dipende se
 $\bar{b} \in \text{Im}(A)$ (OK), se $\bar{b} \notin \text{Im}(A)$ (NO))
- Se compatibile $\Rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$ ha infinite soluzioni ($\dim \text{Ker}(A) > 0$)

Riassumiamo in una tabella, con $n = \dim(V)$,

	$\dim(\text{Im}(A)) = n$	$\dim(\text{Im}(A)) < n$
(7) $\dim(\text{Ker}(A)) = 0$	① ISOSTATICO	③ LABILE
$\dim(\text{Ker}(A)) > 0$	② IPERSTATICO	④ DEGENERE

Se

$$A \bar{x} = \bar{b}$$

A = matrice di equilibrio

$\bar{b}$ = vettore della forza attiva

$\bar{x}$ = vettore incognito delle reazioni di vincolo,
chiedere la compatibilità è equivalente a chiedere:

data una qualche struttura solida, se applico su di essa delle forze (tipo la forza peso) che tipo di cerniere o vincoli devo mettere affinché mi rimanga il tutto in equilibrio? Esistono opportuni vincoli? Se sì, quanti ne esistono?

- ① $\dim(\text{Im}(A)) = n = \dim(V) \Rightarrow V = \text{Im}(A) \Rightarrow A$ ^{iniettiva} _{suriettiva}
 $\dim(\text{Ker}(A)) = 0 \Rightarrow A$ iniettiva

Esiste ed è unica la soluzione di $A \bar{x} = \bar{b}$

cioè trovo solo un possibile vincolo per mantenere tutto in equilibrio

- ② A sempre suriettiva, però A sicuramente NON iniettiva

Esiste sicuramente una soluzione purché ne esistono infinite

Trovo cioè infinite vincoli per mantenere l'equilibrio

- ③ $\dim(\text{Im}(A)) < m \Rightarrow A$ non suriettiva
 $\dim(\text{Ker}(A)) = 0 \Rightarrow A$ iniettiva

Non è detto che esista sempre soluzione (olipensate se $b \in \text{Im}(A)$ o meno) ma se soluzione esiste essa è unica.

In altri termini

$$\exists ! \text{ soluzione } A\bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \in \text{Im}(A)$$

Pertanto, non è vero che per ogni forza attiva si trovi necessariamente un vincolo opportuno per l'equilibrio. Ma per alcune specifiche forze (solo le $b \in \text{Im}(A)$) esiste un unico vincolo per avere equilibrio

- ④ A non iniettiva non suriettiva
 e la soluzione non esiste (se $b \notin \text{Im}(A)$)
 ma se esiste (quando $b \in \text{Im}(A)$) sono infinite.

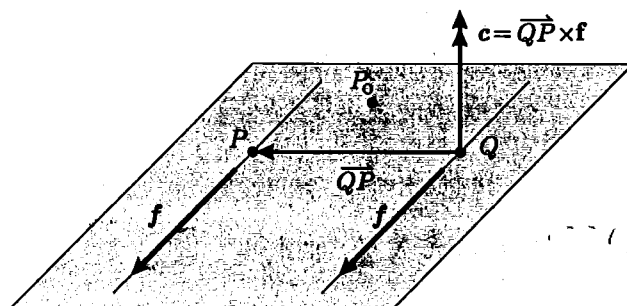


Figura 2.21.

OSSERVAZIONI. 1. L'operazione di riduzione viene anche detta operazione di *trasporto parallelo* (della forza f da P a Q ; la coppia c fornisce il *momento di trasporto*).

2. Per un'applicazione dell'idea di riduzione di una forza ad un punto, si veda la Fig. 2.22.

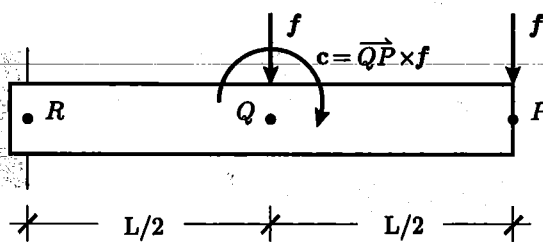


Figura 2.22.

Se il corpo in figura è rigido, il sistema costituito dalla forza f e dalla coppia c applicate in Q (si noti la convenzione della "freccia incurvata") ha gli stessi effetti della forza f applicata in P . Se il corpo è pensato come una trave ad asse indeformabile, il sistema in Q ha gli stessi effetti della forza in P per tutti i punti dell'asse da R a Q .

3. Una modesta generalizzazione del procedimento di riduzione di una forza ad un punto assegnato ne consente l'applicazione ad un qualunque sistema di forze e coppie $\{(P_i, f_i), i = 1, 2, \dots, N; (Q_j, c_j), j = 1, 2, \dots, M\}$, la cui riduzione a $Q \in \mathcal{E}$ consiste nel trovare un sistema $\{(Q, f); (Q, c)\}$, tale che

$$f = r = \sum_{i=1}^N f_i,$$

$$c = m(Q) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{QP_i} \times f_i + \sum_{j=1}^M c_j,$$

dove r e $m(Q)$ sono il risultante e il momento risultante rispetto al polo Q del sistema di forze e coppie assegnato.

ALTRE UTILIZZAZIONI DI R.C. e Nullità + Rango

7.2 Decomposizione di una forza secondo direzioni assegnate

Consideriamo ora il problema della decomposizione di una forza data in un sistema di forze aventi retta d'azione e punti di applicazione assegnati. Delle forze incognite, si cercano intensità e verso, in modo da ottenere un sistema equipollente alla forza data. Formalmente, i dati sono:

- la forza (F, f) ;
- le K rette d'azione, ciascuna individuata dal suo versore $\bar{n}_i$ e da un suo punto P_i .

(P_i, m_i) con $i = 1, 2, \dots, K$

Si vuole trovare un sistema di forze

$\{(P_i, f_i), i = 1, 2, \dots, K\}$, con $f_i = x_i \bar{n}_i$, cioè $\bar{f}_i \sim \bar{n}_i$

determinando le K incognite x_i in modo che siano soddisfatte le condizioni di equipollenza:

$$\sum_{i=1}^K f_i = F \quad \rightarrow \text{equazione vettoriale indep. dal polo } Q \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^K \overrightarrow{QP_i} \times f_i = \overrightarrow{QP} \times F \quad \rightarrow \text{equazione vett. che coinvolge polo e punti applic.} \quad (arg. statica)$$

OSSERVAZIONE. Due sistemi di forze e coppie equipollenti hanno lo stesso momento risultante rispetto a qualunque polo. Infatti, se

$$r = r' \quad \& \quad m(Q) = m'(Q),$$

allora,

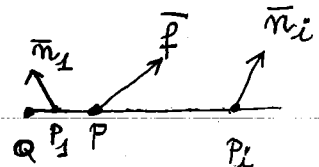
$$m(R) = m(Q) + \overrightarrow{RQ} \times r = m'(Q) + \overrightarrow{RQ} \times r' = m'(R).$$

Dunque, quando si scrive la seconda delle condizioni di equipollenza (7.3), ogni scelta di Q è lecita.

Per proiezione delle due equazioni vettoriali (7.3) sugli assi coordinati e_1, e_2, e_3 , si ricava un sistema algebrico di sei equazioni lineari nelle K incognite x_i . In particolare, proiettando la prima equazione, si ottiene:

³ Qui non c'è somma rispetto all'indice i .

Vedi figure 2.24



$$\forall j \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \sum_{i=1}^K x_i (n_i \cdot e_j) = f \cdot e_j;$$

quindi, ponendo

$$N_{ji} = e_j \cdot n_i, \quad f_j = e_j \cdot f,$$

possiamo scrivere

$$N_{ji} x_i = f_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Analogamente, proiettando la seconda equazione, otteniamo:

$$\sum_{i=1}^K (\vec{QP_i} \times x_i n_i) \cdot e_j = \vec{QP} \times f \cdot e_j$$

e, ponendo

$$M_{ji} = e_j \cdot \vec{QP_i} \times n_i \quad (i \text{ non sommato}), \quad m_j = e_j \cdot m,$$

possiamo scrivere

$$M_{ji} x_i = m_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

In conclusione, il sistema di equazioni scalari da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} N_{ji} x_i = f_j, \\ M_{ji} x_i = m_j. \end{cases}$$

In notazione matriciale, questo sistema di equazioni ha l'aspetto:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1K} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2K} \\ N_{31} & N_{32} & \dots & N_{3K} \\ M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1K} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2K} \\ M_{31} & M_{32} & \dots & M_{3K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix};$$

la matrice $6 \times K$ è la matrice M del sistema, mentre i due vettori colonna 6×1 racchiudono, rispettivamente, le incognite e i termini noti ($\equiv$ i dati che individuano la decomposizione cercata); aggiungendo alla matrice del sistema il vettore dei termini noti come ultimo vettore colonna si ottiene la *matrice completa MC* (Fig. 2.23).

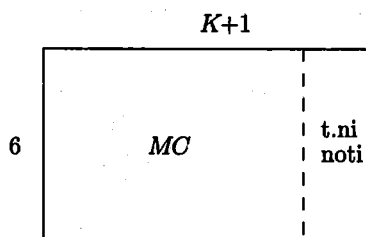


Figura 2.23.

42 2 Sistemi di Forze e Coppie

Per decidere se un sistema siffatto ammette soluzioni e se, eventualmente, la soluzione è unica, conviene richiamare il

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI. Dato un sistema algebrico lineare di L equazioni in K incognite, si calcolino c_M , la caratteristica della matrice del sistema, e c_{MC} , la caratteristica della matrice completa.⁴ Allora,

- (i) se $c_M < c_{MC}$, $\nexists$ soluzione;
- (ii) se $c_M = c_{MC}$, $\exists$ (almeno una) soluzione; inoltre,
 - se $c_M = c_{MC} = K$, la soluzione esistente è unica;
 - se $c_M = c_{MC} < K$, esistono ∞^{K-c_M} soluzioni.

caratteristica
 $\parallel$
 termine classico
 per la nozione
 di RANGO

ESERCIZI

7.1. Si consideri la trave in figura, rigida e vincolata al suolo da tre carrelli. Si decomponga la forza cui la trave è soggetta in un sistema di tre forze, applicate nei punti dove si trovano i carrelli e perpendicolari alla via di corsa di questi.⁵

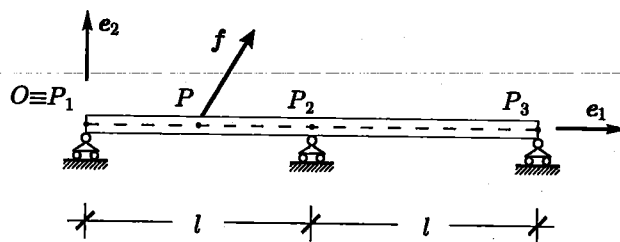


Figura 2.24.

Soluzione. Questo esercizio propone un esempio di applicazione del Teorema di Rouché-Capelli. I dati sono:

$$\vec{OP} = \alpha l e_1, \alpha \in [0, 1]; \quad f = f_1 e_1 + f_2 e_2; \quad P_1 = O, \quad P_2 = O + l e_1, \quad P_3 = O + 2l e_1.$$

⁴ La *caratteristica* di una matrice è il numero intero pari al massimo ordine dei suoi minori non nulli; per definizione, $c_M \leq c_{MC}$.

⁵ Anticipiamo qui che, per una trave piana come quella che qui consideriamo, il *carrello* è un vincolo di posizione che impedisce la traslazione dell'asse della trave in direzione perpendicolare alla retta che ne individua la via di corsa, consentendone invece la traslazione in direzione parallela e consentendo altresì la rotazione della sezione trasversale attorno alla cerniera; in corrispondenza di ogni carrello, a seguito dell'applicazione di carichi sulla trave, può prodursi una forza di reazione che – se non è presente attrito, come di solito si suppone per semplicità – passa per la cerniera ed è perpendicolare alla via di corsa.

L'obiettivo successivo è;

(15)

TROVARE UNA FORMULAZIONE DELLA
TABELLA DEGLI EQUILIBRI (7)
in funzione ESCLUSIVAMENTE DI NUCLEI
di A e della sua aggiunta A^T (o matrice
cinematica)

Vedansi anche

- appunti Prof. Tiero
- Libro Meccanica delle strutture Oss 15 Pg. 23

Abbiamo bisogno dei seguenti preliminari.

Meccanica

U e V spazi vettoriali
dotati di prodotto interno.
(euclideo)

Sia

$$U \xrightarrow{A} V$$

un'applicazione lineare

Sia

$$U \xleftarrow{A^T} V$$

l'applicazione ~~trasposta~~

definita come

$$A(u) \cdot v = u \cdot A^T(v)$$

$$\forall u \in U \\ \forall v \in V$$

e con tale scrittura il
prodotto interno

$$\underbrace{A(u)}_{\substack{\text{prod.} \\ \text{interno in } V}} \cdot \underbrace{v}_{\substack{\text{prod.} \\ \text{interno in } U}} = u \cdot \underbrace{A^T(v)}_{\substack{\text{prod.} \\ \text{interno in } U}}$$

se fissiamo
che su V

- ad A corrisponde una
matrice $[A]$ e ad A^T una matrice $[A]^T$
- il prodotto interno su U
che in V si rappresenta
con la matrice Identità

Perciò

$$\begin{aligned} A(u) \cdot v &= [A]u \cdot v = \\ &= [A] \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \stackrel{\text{ob (3)}}{=} \\ &= (u^1 \dots u^n) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} [A]^T \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

prodotto
righe $\times$ colonne

Richi.

$$u \cdot A^T(v) = (u^1, \dots, u^n) [A]^T \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$$

Geometria

(1)

U e V spazi vettoriali euclidei
dotati di prodotto scalare

$$\langle, \rangle_U \text{ e } \langle, \rangle_V \text{ risp.}$$

Sia

$$U \xrightarrow{A} V$$

un'applicazione lineare

Sia

$$U \xleftarrow{A^*} V$$

l'applicazione ~~aggiunta~~ (trasposta)

definita come

$$\langle A(\bar{u}), \bar{v} \rangle_V = \langle \bar{u}, A^*(\bar{v}) \rangle_U \quad (3)$$

Oss.

Ricordiamo che se $U = V$
e $A = A^*$ non è altro che
un operatore autoaggiunto

veri ortonormali su U
(IN BASTA GENERALIZIO CHE SE QUE)
E' FALSO

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{u}), \bar{v} \rangle_V &= \langle [A]\bar{u}, \bar{v} \rangle = \\ &= \bar{u}^t [A] \bar{v} \end{aligned}$$

prodotto righe per colonne

Contemporaneamente

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, A^*(\bar{v}) \rangle_U &= \langle \bar{u}, [A^*](\bar{v}) \rangle_U \\ &= \bar{u}^t [A^*] \bar{v} = (u^1, \dots, u^n) [A^*] \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Perciò, da (3) e dalle
precedenti due uguaglianze

$(V, \cdot)$ spazio vettoriale euclideo (cioè munito di prodotto interno equiv. scalare)

$S \subset V$ sottoinsieme di V

$$S^\perp := \{ w \in V \mid w \cdot w = 0, \forall w \in S \} \subset V$$

Oss $S^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale di V
anche se S era solo un sottoinsieme

Inoltre vale ovviamente

$$(S^\perp)^\perp = \text{Span}(S) \subset V$$

cioè il "doppio" ortogonale coincide con
il sottospazio di V generato dagli elementi
di S .

Per tanto in generale si ha

$$S \subseteq (S^\perp)^\perp = \text{Span}(S)$$

• Se S era solo un sottoinsieme allora l'inclusione è stretta cioè

$$S \subsetneq (S^\perp)^\perp$$

• Se S era invece già un sottospazio di V allora

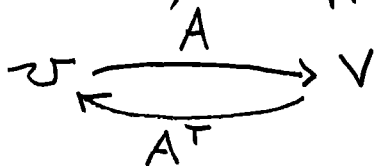
$$S = \text{Span}(S) = (S^\perp)^\perp$$

Oss: Se $U \subseteq W \Rightarrow U^\perp \supseteq W^\perp$

Base per il teorema dei lavori virtuali

Teorema dei lavori virtuali:

U e V euclidei, A app. lineare e A^T la sua aggiunta



$\Rightarrow$
equiv.

$$\ker(A^T)^\perp = \text{Im}(A) \quad (a)$$

$$\ker(A^T) = \text{Im}(A)^\perp \quad (b)$$

dim: verifico le doppie inclusioni della equazione (b)

$\ker(A^T) \subseteq \text{Im}(A)^\perp$: sia $\bar{v} \in \ker(A^T) \Rightarrow A^T(\bar{v}) = \bar{0}$

Pertanto, $\forall \bar{u} \in U$

$$\langle \bar{0}, \bar{u} \rangle = \langle A^T(\bar{v}), \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, A(\bar{u}) \rangle$$

$\downarrow$ $\downarrow$
scalare $\downarrow$ vettore
nullo

Poichè deve valere $\forall \bar{u} \in U \Rightarrow \bar{v}$ è ortogonale a tutti i vettori di $\text{Im}(A) \Rightarrow \bar{v} \in \text{Im}(A)^\perp$

Pertanto l'inclusione è provata.

$\text{Im}(A)^\perp \subseteq \ker(A^T)$: sia $\bar{v} \in \text{Im}(A)^\perp \Rightarrow$

$\forall \bar{u} \in U$ deve valere, $\langle \bar{0}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, A(\bar{u}) \rangle$

Ora $\downarrow$ $\downarrow$
scalare

$$0 = \langle \bar{v}, A(\bar{u}) \rangle = \langle A^T(\bar{v}), \bar{u} \rangle \quad \forall \bar{u} \in U$$

Poichè il prodotto scalare è non degenerato, l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di U è il vettore nullo $\Rightarrow A^T(\bar{v}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{v} \in \ker(A^T)$.

Esercizio

17

Dato $A(x) = b$ voglio stabilire se è compatibile

(Rouché - Capelli) $A(x) = b$ compatibile $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$
 $\downarrow$
 Rouché
 Capelli
 $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A^T)^\perp$

Se $[A] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cioè $A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ e $[A]$ matrice che rappresenta A .

Sappiamo che

$$\text{Im}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

cioè i vettori b per cui può esistere soluzione sono NECESSARIAMENTE della forma

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

poiché $\bar{b} \in \text{Im}(A)$ in tale modo.

Per medesima conclusione ci si arriva utilizzando il teorema dei lavori virtuali.

Poiché $\mathbb{R}^3$ è sottospazio dotato di base canonica

$\Rightarrow$ la matrice dell'aggiunta A^T è semplicemente

$[A]^T$ (IN GENERALE NON È VERO!)

Pertanto

$$[A]^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}([A]^T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

Pertanto $\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ la sol. di questo sistema è $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

cioè $\text{Ker}([A]^T) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

$(\text{Ker}([A]^T))^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \Rightarrow$ puoi $\bar{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ t.c.

$$0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sigma = \Delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \Rightarrow \text{cioè i vettori della} \\ \text{forma } \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ esattamente come trovato prima} \end{array} \right.$$

Oss: poichè $\ker([A]^T)$ era sp. di $\mathbb{R}^3$ di dim = 1
 $\Rightarrow$ il suo complemento ortogonale è un iperpiano
in $\mathbb{R}^3$ dato che

$$\mathbb{R}^3 = (\ker [A]^T) \oplus (\ker [A]^T)^\perp$$

cioè $(\ker [A]^T)^\perp$ è un piano vettoriale in $\mathbb{R}^3$ (i.e.
 sp. di dimensione 2) ed il vettore normale
 a tale piano deve essere necessariamente un
 generatore di $(\ker [A]^T)$. Pertanto eq. caratterizzante di
 $(\ker [A]^T)^\perp$ è

$$1x + 0y + 1z = 0 \Rightarrow x + z = 0$$

la cui generica soluzione è appunto

$$\begin{cases} x = -\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Per completezza, possiamo calcolare anche gli altri spazi
 sia direttamente che con tenere lavori virtuali

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span}(e_3)$$

Da Tem. lavori virtuali (scambiando A con A^T e
 ricordando che $([A]^T)^T = [A]$) si ha:

$$\text{Im}(A^T) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

cioè

$$\text{Im}(A^T) = \left\{ v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Avviamente $\text{Im}(A^T)^\perp = \text{Span}\{e_3\}$

sia perché

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

sia perché $\text{Im}(A^T)$ è un iperpiano in $\mathbb{R}^3$ di equazione caratteristica

Portanto un vettore normale $\vec{z} = 0$ a $\text{Im}(A^T)$ è proprio e_3

In definitiva, con entrambi le metodologie:

$$\text{Ker}(A) = \text{Span}\{\bar{e}_3\}$$

$$\text{Ker}(A^T) = \text{Span}\{e_1 + e_2\}$$

$$\text{Im}(A^T) = \text{Span}\{e_1, e_2\}$$

$$\text{Im}(A) = \text{Span}\{e_2, -e_1 + e_3\}$$

Esempio (significati meccanici - Vedasi [Meccanica delle strutture] pg 95)

Le caratteristiche di una struttura dipendono da:

- $[A]$ matrice di equilibrio o di vincolo
- $[A]^T$ matrice cinematica o di congruenza

Pertanto (vedasi formule (6) a pg. 97)

la matrice cinematica è la trasposta di quella dei vincoli (o di equilibrio)

In altri termini, i vincoli determinano nel corpo una sorta di reazione d'urto a quella dettata dalla prescrizione cinematica.

Quindi, a seconda dei dati del problema si può costruire o la matrice di equilibrio o la matrice cinematica, determinare con Rouché - Copelli oppure Thm. lavori virtuali se il sistema è compatibile e poi trovare (se $\exists$) tutte le eventuali soluzioni del problema.

• Se $[A]$ è la matrice di equilibrio allora

U è lo spazio delle sollecitazioni degli elementi

V è lo spazio dei carichi esterni in equilibrio con le sollecitazioni

$\text{Im}(A) =$ spazio generato dalle colonne di $[A]$
 = è lo spazio dei carichi compatibili
 cioè i carichi che possono essere equilibrati dalla struttura

$\text{Ker}(A) =$ spazio delle sollecitazioni autoequilibrate
 cioè in equilibrio con carichi esterni nulli

$\text{Im}(A^T) =$ spazio generato dalle righe di $[A]$
 $\overset{112}{\text{Ker}(A)^{\perp}} =$ spazio delle sollecitazioni negli elementi che sono in equilibrio con i carichi compatibili (non nulli)

$\text{Ker}(A^T) =$ spazio dei carichi che non possono essere equilibrati dalla struttura, cioè i carichi incompatibili
 $\overset{112}{\text{Im}(A)^{\perp}}$

Infatti

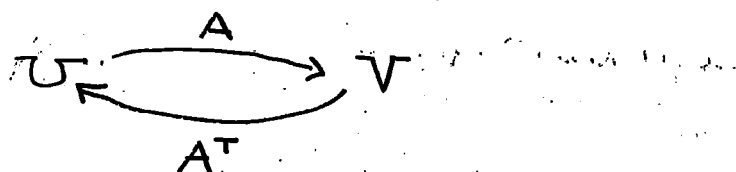
Thm. lav. virtuali: $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^{\perp} \overset{112}{\iff} b \in (\text{Ker}(A^T))^{\perp}$
 Rouché - Copelli: $Ax = b$ risolubile $\iff b \in \text{Im}(A)$

La caratterizzazione statica dei vincoli è subordinata alle loro proprietà cinematiche. In altre parole i due problemi anche se di natura differente sono in stretta relazione e si dice che godono della proprietà di dualità

Quindi, tutti i precedenti spazi ($\ker(A)$, $\text{Im}(A)$, $\ker(A^T)$ e $\text{Im}(A^T)$) hanno un'interpretazione anche CINEMATICA (Vedasi Cap 3, [Meccanica delle strutture], pg 95 e seguenti

CHIARISSIMO).

Grazie al teorema dei lavori virtuali, possiamo esprimere la tabella (*) a pg 6- retro tutta in funzione di $\ker$.



Poiché $\ker(A^T) = \text{Im}(A)^\perp \Rightarrow$

- $\text{Im}(A) = V$ (i.e. A suriettivo su $\text{Im}(A)$) $\Rightarrow n = \dim(V) \Rightarrow \ker(A^T) = \{0\}$
- Se $\text{Im}(A) \subsetneq V$ (i.e. A non suriettivo e $\dim(\text{Im}(A)) < n = \dim(V)$)

$\Leftrightarrow \ker(A^T) \neq \{0\}$. Pertanto la tabella (*) di equilibrio diventa

(8)	$\dim(\ker(A^T)) = 0$		$\dim(\ker(A^T)) > 0$
	$\dim(\ker(A)) = 0$	① Isostatico	③ Labile
	$\dim(\ker(A)) > 0$	② Iperstatico	④ Deformabile

Labile: $\ker(A^T) \neq \{0\}$ e $\ker(A) = \{0\}$

il sistema è libero di muoversi

Iperstatico: $\ker(A^T) = \{0\}$ e $\ker(A) \neq \{0\}$

il sistema è bloccato per ogni carico applicato
cioè non ha più l'unicità della soluzione

Isostatico: $\ker(A) = \ker(A^T) = \{0\}$

per qualsiasi carico $\exists$ un'unica soluzione
cioè un'unica reazione vincolare

Degenera: $\ker(A) \neq \{0\}$, $\ker(A^T) \neq \{0\}$

non tutti i carichi sono cinematicamente
ammissibili in fatto $\exists$ esistono ∞
soluzioni oppure non ne esistono per niente

Ora da Nullità + Rango applicato sia ad A che ad A^T
si ha

$$(a) \dim(U) = \dim(\text{Im}(A)) + \dim(\ker(A))$$

$$(b) \dim(V) = \dim(\text{Im}(A^T)) + \dim(\ker(A^T))$$

dal Teorema Lavori Virtuali (poiché fornisce decomp. ortog.)

$$\dim(\text{Im}(A)) = \dim(\ker(A^T)^\perp) = \dim(V) - \dim(\ker(A^T))$$

$$\dim(\text{Im}(A^T)) = \dim(\ker(A)^\perp) = \dim(U) - \dim(\ker(A))$$

ED da (a) e (b)

$\dim(U) - \dim(V) = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A^T))$ equiv. $\dim(V) - \dim(U) = \dim(\ker(A^T)) - \dim(\ker(A))$
--

$$m_U = \dim(U) \quad e \quad m_V = \dim(V)$$

$$\Rightarrow \boxed{m_U - m_V = \dim(\ker(A)) - \dim(\ker(A^T))} \quad (8b)$$

In altre parole

$$\boxed{\dim(\ker(A)) = (m_U - m_V) + \dim(\ker(A^T))} \quad (8c)$$

3) Supponiamo $m_U = m_V$: pertanto da (8c)

$$\boxed{\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A^T)) = (*)}$$

Può essere

(2.1) equilibrio isostatico $\Leftrightarrow (*) = 0$

oppure

(2.2) degenero $\Leftrightarrow (*) \neq 0$

3) Supponiamo $m_U > m_V$: pertanto da (8c)

$\dim(\ker(A)) > 0$ sempre.

In tale eventualità abbiamo

(b.1) equilibrio iperstatico $\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = 0$

oppure

(b.2) equilibrio degenero $\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) > 0$

3) Supponiamo $m_U < m_V \Rightarrow m_U - m_V < 0 \Rightarrow$

$\dim(\ker(A^T)) > 0$ sempre

(c.1) equilibrio labile $\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = 0$

oppure

(c.2) equilibrio degenero $\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) > 0$

Gruppo delle matrici ortogonali e gruppo delle matrici speciali ortog.

Def: Sia G un insieme e

$$*: G \times G \rightarrow G$$

una qualsiasi operazione su questo insieme t.c.

$$*(g, h) = g * h \in G$$

$(G, *)$ si dice gruppo se

1) $*$ è chiusa, cioè $\forall g, h \in G, g * h \in G$

2) $\exists$ l'elemento neutro di $*$, cioè $\exists e \in G \mid \forall g \in G$

$$e * g = g * e = g$$

3) $\exists$ l'inverso di ogni $g \in G$ (denotato con g^{-1}) t.c.

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e, \quad \forall g \in G$$

4) $*$ è associativa: $(g * h) * k = g * (h * k)$

1), 2), 3) e 4) si dicono proprietà gruppi
Se inoltre vale che $\forall g, h \in G$

$$g * h = h * g$$

allora $(G, *)$ si dice gruppo abeliano o commutativo

Esempi

(a) $\forall$ sp. vett., $+$ = operazione somma di vettori $\Rightarrow (V, +)$ gruppo abeliano

(b) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ = moltiplicazione tra numeri reali $\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo abeliano

(c) $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo perché se $k \in \mathbb{N}$, il suo "inverso" non è altro che l'opposto e $-k \notin \mathbb{N}$

(d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo perché gli "inversi" sono i reciproci
 $a \in \mathbb{Z}$ non ammette inverso $\Leftrightarrow a \neq \pm 1$

(e) $(M(n \times n, \mathbb{R}), +)$ gruppo abeliano

(21)

(f) Poniamo

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0 \}$$

e sia $\circ$ = prodotto righe per colonne

Allora $(GL(n, \mathbb{R}), \circ)$ è un gruppo ma non abeliano dato che $A \circ B \neq B \circ A$ in generale,

Questo viene chiamato il Gruppo lineare o gruppo delle matrici invertibili di ordine n

(g) U endiolo, $G: U \rightarrow U$ operatore ortogonale
(i.e. $\forall u, v \in U \quad G(u) \circ G(v) = u \circ v$) $\Rightarrow$

$$\boxed{G \circ G^T = G^T \circ G = I_0} \quad \text{condizione di ortogonalit.}$$

Se su U si fissa base ortonormale e $[G]$ è la matrice che rappresenta l'operatore G in tale base $\Rightarrow$ la matrice che rappresenta G^T è proprio $[G]^T$. Pertanto la condizione di ortogonalità si vanta, al livello di matrici,

$$(g) \boxed{[G][G]^T = [G]^T[G] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{e } [G] \text{ si dice} \\ \text{matrice ortogonale}$$

In altre parole

1) $[G] \in GL(n, \mathbb{R})$, cioè è invertibile

$$2) [G]^{-1} = [G]^T$$

3) $\det([G]) = \pm 1$ Dim. svolgendo il determinante della formula (g) e ricordando T.M. di Binet

$$\det([G])^2 = 1.$$

4) Ricordiamo (vedi CORSO GEOMETRIA) che gli autoval. reali di $[G]$ sono solo ± 1

$\det([G]) = +1 \rightarrow$ matrici speciali ortogonali
 (legate alle isometrie dirette cioè
rotazioni $\rightarrow$ conservano orientazione)

$\det([G]) = -1 \rightarrow$ matrici ortogonali non speciali
 (legate alle isometrie inverse cioè
riflessioni $\rightarrow$ non conservano orientazione)

Le matrici ortogonali formano un gruppo non abeliano
 rispetto a $\circ$ = prodotto righe per colonne, denotato

<u>SCIENZE (Mat, Fis, ...)</u>	<u>INGEGNERIA</u>
$O(n, \mathbb{R})$	$Orth$

detto gruppo ortogonale.

Il sottoinsieme delle matrici speciali ortogonali costituisce
 anche lui un gruppo denotato con

<u>SCIENZE (Mat, Fis, ...)</u>	<u>INGEGNERIA</u>
$SO(n, \mathbb{R})$	$Orth^+$

detto gruppo speciale ortogonale.

Le matrici ortogonali non speciali (che in Meccanica
 denotate con $Orth^-$) non formano un gruppo

infatti, se $A, B \in Orth^- \Rightarrow$

$$\det(A \circ B) \stackrel{\text{Binet}}{=} \det(A) \cdot \det(B) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$\Rightarrow A \circ B \notin Orth^-$$

Algebra Lineare

§ 1 Spazio vettoriale duale. Ricordiamo che dato V spazio vettoriale, lo spazio vettoriale duale di V , denotato con V^* , e' lo spazio vettoriale

$$\text{Hom}(V, \mathbb{R})$$

delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$ (equiv., dei *funzionali lineari* su V).

Se V ha dimensione $n + 1$, una volta fissata una qualsiasi base di V , lo spazio $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ e' lo spazio vettoriale delle matrici $(n + 1) \times 1$, una cui base e' data quindi dalle matrici riga

$$(1) \quad \bar{e}_i^* = (0, \dots, 0, 1^{\text{posto } i}, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Pertanto anche $\dim(V^*) = n + 1$.

In particolare, se $e = \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ indica la base prefissata su V , cosicche' in base e si ha

$$\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1^{\text{posto } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n$$

allora si ha

$$\bar{e}_i^*(\bar{e}_j) = \delta_{i,j}, \quad 0 \leq i, j \leq n$$

dove $\delta_{i,j}$ e' il delta di Kronecher.

Definizione. 1 La base $e^* := \bar{e}_0^*, \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$ di V^* si chiama la base duale della base e di V .

Osservazione 2 In termini piu' concreti, una volta fissata la base e , la base e^* si puo' vedere naturalmente determinata dai **funzionali lineari coordinati**, cioe' si puo' porre

$$\bar{e}_i^* = X_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

dove X_i e' la coordinata *ordinata* determinata da, come funzionale lineare associato ad un qualsiasi vettore $\bar{v} \in V$ la sua componente *i-esima* rispetto alla base e , i.e. se $\bar{v} = \sum_{i=0}^n v_i \bar{e}_i = \Delta$ $X_i(\bar{v}) := v_i \in \mathbb{R}$

Prodotto tensoriale

Risolvere un problema universale di trovare un elemento unificante che accomuni cose ad una prima analisi apparentemente diverse: vettori, applicazioni lineari, prodotto scalare, determinante, prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$, ecc. - - -

Sia mo:

- $\cdot V_1$ sp. vettoriale di dim n_1 e base $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_1}\}$
- $\cdot V_2$ " " " " n_2 e base $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n_2}\}$
- $\vdots$
- $\cdot V_k$ " " " " n_k e base $\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n_k}\}$

Allora

$$\boxed{V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ che ha come base
gli elementi (tensori) della forma

$$\left\{ \bar{a}_{i_1} \otimes \bar{b}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{t}_{i_k} \right\}$$

$1 \leq i_1 \leq n_1$
 $1 \leq i_2 \leq n_2$
 $\vdots$
 $1 \leq i_k \leq n_k$

si ha che

$$\boxed{\dim(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k) = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = \prod_{i=1}^k \dim(V_i)}$$

Esempio: $(\mathbb{R}^2, \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ $(\mathbb{R}^3, \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\})$

$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ è t. c. $\dim(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3) = 2 \cdot 3 = 6$

La base è

$$\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_3, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, e_2 \otimes f_3\}$$

Un generico elemento (cioè tensore) in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ è $\sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} a_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{f}_j$

N.B. $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ non ha nulla a che vedere con
il prodotto cartesiano $V_1 \times \dots \times V_k$ dato che
 $\dim(V_1 \times \dots \times V_k) = m_1 + \dots + m_k$

(23)

Esempio

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

In generale però

$$m_1 \cdot \dots \cdot m_k > m_1 + \dots + m_k$$

Oss: se $\bar{v}_i \in V_i$, il tensore

$$\boxed{\bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2 \otimes \dots \otimes \bar{v}_k \in V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k}$$

viene chiamato tensore decomponibile

Oss: Il generico tensore in $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ NON È
Decomponibile

Esempio

$$V_1 = \mathbb{R}^2, \quad V_2 = \mathbb{R}^2$$

$$\bar{v}_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2, \quad \bar{v}_2 = \beta_1 \bar{f}_1 + \beta_2 \bar{f}_2$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2 &= \alpha_1 \beta_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_1 + \alpha_1 \beta_2 \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_2 + \alpha_2 \beta_1 \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_1 \\ &\quad + \alpha_2 \beta_2 \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_2 = \\ &= \gamma_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_1 + \gamma_2 \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_2 + \gamma_3 \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_1 + \gamma_4 \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_2 \end{aligned}$$

dove

$$\boxed{\gamma_1 \cdot \gamma_3 = \gamma_2 \cdot \gamma_4}$$

Basta prendere quindi ad esempio

$$W = \bar{e}_1 \otimes \bar{f}_1 + 2\bar{e}_1 \otimes \bar{f}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{f}_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$$

poiché $1 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1$

il precedente tensore non è decomponibile, cioè
 $\nexists \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ t.c. $W = \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2$

Perciò il generico elemento di $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ (cioè il generico tensore) è:

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n_1 \\ 1 \leq i_2 \leq n_2 \\ \vdots \\ 1 \leq i_k \leq n_k}} \alpha_{i_1, \dots, i_k} \bar{e}_{i_1} \otimes \bar{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_k}$$

Il isomorfismo notevole : V e W sp. vett.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(V, W) \\ \varphi \otimes \bar{w} & \longrightarrow & f \end{array}}$$

con $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ funzionale lineare

e $f: V \rightarrow W$ app. lineare definita da

$$f(\bar{v}) = \varphi(\bar{v}) \bar{w} \in W \quad \forall \bar{v} \in V$$

dim

L'applicazione $V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ è
 $(\varphi, \bar{w}) \rightarrow f$

iniettiva. Infatti

$$f=0 \iff \forall \bar{v} \in V \quad f(\bar{v}) = 0(\bar{v}) = \bar{0} = \begin{cases} \varphi \bar{w} = \bar{0} \\ \varphi \varphi(\bar{v}) = 0 \\ \forall \bar{v} = \Delta \end{cases}$$

in qualsiasi $\varphi \otimes \bar{0} = 0 \otimes \bar{w} = 0$ tensore nullo

Fissate una base di V e di una di W + c.

$$\dim(V) = n \text{ e } \dim(W) = m \Rightarrow$$

$$\dim(V^* \otimes W) = n \cdot m, \quad \text{Hom}(V, W) \cong M(m \times n; \mathbb{R})$$

ha dim. $m \cdot n$

Avendo un'applicazione iniettiva tra due spazi vettoriali della stessa dimensione è un isomorfismo

II Isomorfismo notevole

Se V è spazio vettoriale euclideo $\neq \emptyset$

$$V \cong V^*$$

canonicamente (cioè senza scelta di basi)

dim Definisco un'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^* \\ \bar{v} & \longrightarrow & \varphi_{\bar{v}} \end{array}$$

con $\varphi_{\bar{v}}: V \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $\varphi_{\bar{v}}(\bar{w}) = \bar{v} \cdot \bar{w}, \forall \bar{w} \in V$

ovv $\varphi_{\bar{v}} = 0 \iff \varphi_{\bar{v}}(\bar{w}) = 0, \forall \bar{w} \in V$ cioè

$\bar{v}$ è ortogonale a tutti i $\bar{w} \in V \iff \bar{v} = \bar{0}$

L'applicazione lineare $V \rightarrow V^*$ è iniettiva
e poiché $\dim(V) = \dim(V^*) \implies$ è isomorfismo.

Tensori di ordine k

Se V è euclideo

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ volte}}$$

$$k=0 \quad V^{\otimes 0} = \mathbb{R} \quad \text{scalari}$$

$$k=1 \quad V^{\otimes 1} = V \quad \text{vettori}$$

$$k=2 \quad V^{\otimes 2} \quad \text{tensori II ordine}$$

$$k=3 \quad V^{\otimes 3} \quad \text{tensori III ordine}$$

Tensori II ordine

dagli isomorfismi notevoli I e II

$$V^{\otimes 2} = V \otimes V \cong \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$$

cioè i tensori del II ordine non sono altro che operatori lineari di V

Esempio: sia $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

$V^{\otimes 2} = \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ ha dimensione $9 = 3 \cdot 3$

una base è

$$\{\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Ora, da quanto visto prima, $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \cong \text{End}(\mathbb{R}^3) = M(3 \times 3; \mathbb{R})$

In effetti, potendo identificare $\mathbb{R}^3$ con $(\mathbb{R}^3)^* \Rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \otimes (\mathbb{R}^3)^* \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

$$\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{righe} \\ i \\ \text{colonne} \\ j \end{matrix}$$

Ad esempio il tensore del secondo ordine:

$$2 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + 3 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$$

corrisponde alla somma di matrici

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ovvero alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Oss: In altre parole il termine Tensore del II ordine si può usare come sinonimo di trasformazione lineare o endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

Tensori del III ordine

25

Sono gli elementi di $V^{\otimes 3}$

Se prendo

$$V^{\otimes 3} = V \otimes (V \otimes V)$$

da isomorfismi notevoli I e II , battezzando $W = V \otimes V$ si ha che

$$V^{\otimes 3} \cong \text{Hom}(V, V \otimes V)$$

ma sempre da isomorfismi notevoli

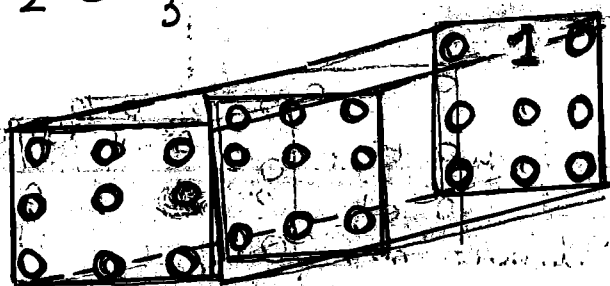
$$V^{\otimes 3} \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(V, V))$$

cioè i tensori del III ordine sono applicazioni lineari

$$V \longrightarrow \text{Hom}(V, V)$$

Esempio: se $V = \mathbb{R}^3$ con base canonica $\Rightarrow$

$$V \quad \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M(3 \times 3; \mathbb{R})$$

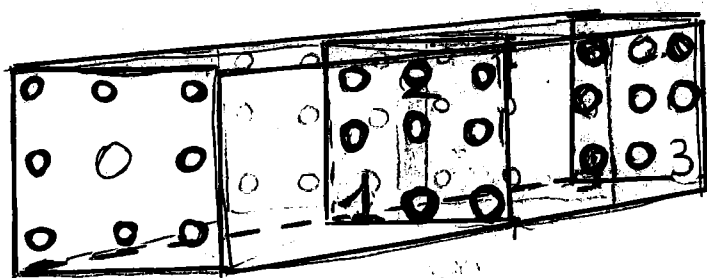


è una matrice che ha come colonne delle matrici

Invece

$$2 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + 3 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$$

è



Prodotto tensoriale in $\mathbb{R}^3$

Sul libro [Paolo Bolio Guidugli, Scienze delle costruzioni II, Aracne editrice], § 1.2, pg. 12 detto anche prodotto di vettori

Dati $a, b \in \mathbb{R}^3$ consideriamo $a \otimes b$

che è un tenore di rango 2 di $\mathbb{R}^3$ ordine 1

Poiché $\mathbb{R}^3$ è euclideo $\Rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

Per cui $a \otimes b$ deve rappresentare un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, cioè un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in sé

$$\overline{a \otimes b}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\overline{a \otimes b} \mapsto (a \otimes b)(v)$$

Il tenore $a \otimes b$ è definito come

$$(10) \quad (a \otimes b)(v) = (b \cdot v) a, \quad \forall v \in V$$

Oss

Vediamo se la definizione (10) è compatibile con quanto abbiamo discusso precedentemente sul tenore di ordine 2 e il te II som. notevolmente in $\mathbb{R}^3$ fissiamo la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\} \Rightarrow a = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3$ $b = b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3$

$\Rightarrow$

$$a \otimes b = (a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \otimes (b^1 e_1 + b^2 e_2 + b^3 e_3) \Rightarrow$$

notazione di Einstein

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } v = v^i e_i \Rightarrow (a \otimes b)(v) = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
$$= \begin{pmatrix} a^1 b^1 v^1 + a^1 b^2 v^2 + a^1 b^3 v^3 \\ a^2 b^1 v^1 + a^2 b^2 v^2 + a^2 b^3 v^3 \\ a^3 b^1 v^1 + a^3 b^2 v^2 + a^3 b^3 v^3 \end{pmatrix}$$

Se ora applichiamo la definizione (10), utilizzando le medesime componenti

$$b \circ v = \sum_{i=1}^3 b^i v^i$$

Perciò, poiché $d = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}$

$$(b \circ v) d = \begin{pmatrix} b^1 v^1 d^1 + b^2 v^2 d^1 + b^3 v^3 d^1 \\ b^1 v^1 d^1 + b^2 v^2 d^2 + b^3 v^3 d^2 \\ b^1 v^1 d^3 + b^2 v^2 d^3 + b^3 v^3 d^3 \end{pmatrix}$$

Per la matrice d associata a $d \otimes b$ si applica la formula (10) con d al posto di b e b al posto di v .
 Per la matrice b associata a $b \otimes v$ si applica la formula (10) con b al posto di d e v al posto di v .
 Per la matrice d associata a $d \otimes v$ si applica la formula (10) con d al posto di d e v al posto di v .
 Per la matrice b associata a $b \otimes v$ si applica la formula (10) con b al posto di d e v al posto di v .

Uso rapido per trovare la matrice associata a $d \otimes b$:

Dalla formula (10) si evince che

$d \in \mathbb{R}^3$ viene trattato come VETTORE

$b \in \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)^*$ viene trattato come FUNZIONALE

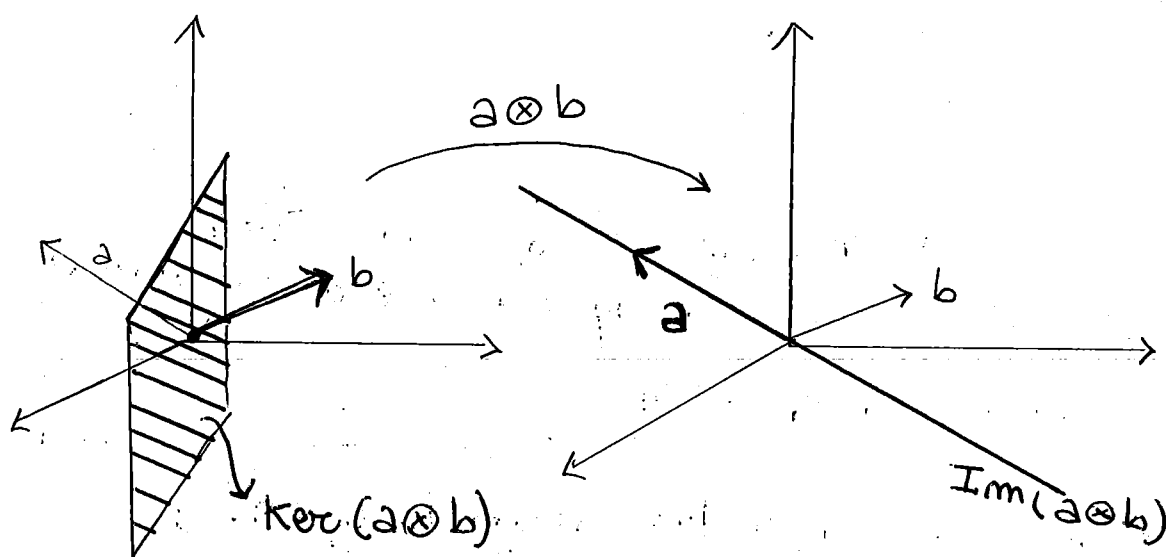
perciò

$$d \otimes b = \begin{pmatrix} d^1 & d^2 & d^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^1 b^1 & d^1 b^2 & d^1 b^3 \\ d^2 b^1 & d^2 b^2 & d^2 b^3 \\ d^3 b^1 & d^3 b^2 & d^3 b^3 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$\text{Im}(a \otimes b) = \text{Span}\{a\}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(a \otimes b) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (a \otimes b)(v) = 0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid b \cdot v = 0\} = (\text{Span}\{b\})^\perp \end{aligned}$$



Oss Se a vettore di $\mathbb{R}^3$

$$(a \otimes a) \bar{v} = (a \cdot v) a := \pi_a(\bar{v})$$

proiezione di v
lungo la direzione
di a

$$v - \pi_a(v) = v - (v \cdot a) a = (I - a \otimes a)(v)$$

proiezione su $a^\perp$
di v

(27)

In $\mathbb{R}^3$ considerare $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

- 1) Trovare la matrice rappresentativa del tensore $\vec{v} \otimes \vec{w}$ in tutti i modi possibili
- 2) Determinare $\text{Im}(\vec{v} \otimes \vec{w})$ perov. e cart.
- 3) " $\text{Ker}(\vec{v} \otimes \vec{w})$ " "

svolgimento

1) 1° modo

$$\vec{v} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \quad \vec{w} = 4\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \otimes \vec{w} &= 4\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + 2\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + 5\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ &\quad + 8\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + 10\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ &\quad + 12\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + 6\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + 15\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v} \otimes \vec{w}$ in base e cioè $M_{\mathcal{C}}(\vec{v} \otimes \vec{w})$
dato che $\vec{v} \otimes \vec{w} \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$

$$M_{\mathcal{C}}(\vec{v} \otimes \vec{w}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \\ 12 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

2° modo $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \otimes \vec{w})(\vec{x}) &= (\vec{w} \cdot \vec{x}) \vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{1 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 \\ 12x_1 + 6x_2 + 15x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 \\ 12x_1 + 6x_2 + 15x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \\ 12 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ok} \end{aligned}$$

3° modo

$$\vec{v} \cdot \vec{w}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4, 2, 5) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \\ 12 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

conseguente di 1° modo

$$\text{Im}(\bar{v} \otimes \bar{w}) = \text{Span}\{\bar{w}\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ker}(\bar{v} \otimes \bar{w})$$

2 moduli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 10 \\ 12 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = -\frac{1}{2}s - \frac{5}{4}t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cartesianas: $\begin{cases} x_1 = -s - 5t \\ x_2 = 2s \\ x_3 = 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_2}{2} - \frac{5}{4}x_3 \\ \frac{x_2}{2} = s \\ \frac{x_3}{4} = t \end{cases}$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

Analogamente

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ +4 \\ +10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ker}(\bar{v} \otimes \bar{w}) = \bar{w}^\perp \text{ cioè}$$

$$\bar{w}^\perp = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \right\} = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

Proprietà strutturali e algebriche di $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2}$

(28)

Spazio dei tensori del II ordine su $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)^{\otimes 2} := \text{Lin}$

↓
notazione
ingegneri

(1) Lin ha una struttura di spazio vettoriale.

Infatti

$$\text{Lin} = \text{End}(\mathbb{R}^3) = M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

In simboli:

$$S, T \in \text{Lin} \Rightarrow (S+T)(v) = S(v) + T(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

$$S \in \text{Lin}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha S)(v) = \alpha \cdot (S(v)), \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

(2) Su Lin esiste un prodotto di composizione

($\Rightarrow \text{Lin}$ è un'algebra non commutativa)

$$\forall S, T \in \text{Lin} \Rightarrow S \cdot T = S \circ T$$

↓
composizione
di endomorfismi =
= prodotto righe per
colonne di matrici 3×3

Oss: Se $S = a \otimes b$ e $T = c \otimes d$ ~~DIADIA~~ (tensori decomp.)

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = (b \cdot c) (a \otimes d)$$

dim

$$\begin{aligned} ((a \otimes b) \cdot (c \otimes d))(v) &= (a \otimes b)((c \otimes d)(v)) = (a \otimes b)((d \cdot v) c) = \\ &= (d \cdot v) ((a \otimes b)(c)) = (d \cdot v) (b \cdot c) a = \\ &= (b \cdot c) (a \otimes d)(v) \end{aligned}$$

↓
app. lineare

In particolare

$$(e_i \otimes e_j) \cdot (e_h \otimes e_k) = \delta_{jh} e_i \otimes e_k = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq h \\ e_i \otimes e_k & \text{se } j = h \end{cases}$$

Potenza di un tensore

$$S^k = \underbrace{S \cdot S \cdot S \cdot \dots \cdot S}_{k \text{ volte}}$$

Trasposto di un tensore

Se $L \in \text{Lin} \Rightarrow S^T \in \text{Lin}$ è t.c.

$$(S(u)) \cdot v = u \cdot (S^T(v)), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

S^T ha come matrice la trasposta di quella che rappresenta S .

Esempio $S = 2e_1 \otimes e_3 + 3e_2 \otimes e_2 \Rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Siano } u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ e } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$S(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 3b \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(u) \cdot v = \begin{pmatrix} 2c \\ 3b \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= 2cx + 3by = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \left(S^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = u \cdot S^T(v).$$

Proprietà della trasposizione

(29)

$$\begin{aligned}(S+T)^T &= S^T + T^T \\ (ST)^T &= T^T S^T \\ (S^T)^T &= S\end{aligned}$$

In particolare $(a \otimes b)^T = b \otimes a$

Disole trasposta nel libro PPG

Definizione S tensore in Lin

Simmetrico se $S = S^T$

Antisimmetrico se $S = -S^T$

Oss Ogni tensore S in Lin può essere unico
come somma di un tensore simmetrico ed
un tensore antisimmetrico

olue, Sia $S \in \text{Lin}$ qualsiasi $\Rightarrow$

$$S = E + W$$

olue

$$E = \frac{1}{2} (S + S^T)$$

$$W = \frac{1}{2} (S - S^T)$$

In fatti

$$E^T = \frac{1}{2} (S + S^T)^T = \frac{1}{2} (S^T + S) = \frac{1}{2} (S + S^T) = E$$

$$W^T = \frac{1}{2} (S - S^T)^T = \frac{1}{2} (S^T - S) = -\frac{1}{2} (S - S^T) = -W$$

Ora E è un tensore che è contemporaneamente
simmetrico ed antisimmetrico è

$$\begin{aligned}S &= S^T \\ \parallel \\ -S^T &\end{aligned} \Leftrightarrow 2S^T = 0 \Leftrightarrow S^T = S = 0$$

Se

~~$\text{Lin} =$ insieme dei tensori di ordine $\mathbb{I}$~~

~~$\text{Sym} =$ insieme dei tensori simmetrici~~

~~$\text{Skew} =$ insieme dei tensori antisimmetrici~~

Allora

$$\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skew}$$

Questo collima con la rappresentazione di
 Lin con $M(3 \times 3; \mathbb{R})$

Ricordiamo: Lo spazio vettoriale delle matrici $M(n \times n; \mathbb{R})$ si
decompone in somma diretta dell'sp matrici simmetriche e sp, antisim.

$$A = \frac{1}{2} (A + {}^t A) + \frac{1}{2} (A - {}^t A)$$

Per $n=3$

$$\dim(\text{Skew}) = 3$$

Infatti

$$A \in \text{Sym} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$A \in \text{Skew} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & a & +b \\ -a & 0 & +c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Sym} \cap \text{Skew} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Linguaggio matriciale

• S matrice $3 \times 3 = \Delta$

$$S = (s_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

$$\text{cioè } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$



Linguaggio tensoriale (30)

• S tensore $\underline{T}$ ordine su $\mathbb{R}^3$

$$S = \sum_{i,j=1}^3 s_{ij} e_i \otimes e_j$$

$$s_{ij} = \underline{\text{componenti del tensore } S}$$

$[S] =$ matrice associata al tensore $S = (s_{ij})$

In particolare, se S è decomponibile

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$$

$$\text{se } a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i, \quad b_j = \sum_{j=1}^3 b_j e_j$$

• S^T matrice trasposta di S

$$S^T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$$

• Prodotto matriciale (righe per colonne)

$$S \cdot T \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$$

• Prodotto tra tensori

$$S \otimes T \text{ t.c.}$$

$$[S \otimes T] = [S] \cdot [T]$$

• Traccia di un tensore

$$\text{Tr}(a \otimes b) := a \cdot b = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

Per linearità

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S) &= \text{Tr}\left(\sum_{i,j} s_{ij} e_i \otimes e_j\right) = \\ &= \sum_{i,j} s_{ij} \text{Tr}(e_i \otimes e_j) = \sum_{i,j} s_{ij} e_i \cdot e_j \\ &= \sum_{i,j} s_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 s_{ii} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^3 s_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

con λ_i autovalori (eventualmente
eigeni complessi) di S

$$\text{Tr}(S) = \text{Tr}(S^T)$$

~~Tutte le altre proprietà~~

$$\begin{aligned} S \cdot T &:= \text{Tr}(S \cdot T^T) = \\ &= \text{Tr}(S \cdot {}^t T) \\ &= \sum_{ij} S_{ij} T_{ij} \end{aligned}$$

$e_i \otimes e_j$ base ortonormale di Lin
Conseguenze

- (i) ~~...~~
 - (ii) ~~...~~
 - (iii) ~~...~~
 - (iv) ~~...~~
- ~~...~~

~~...~~

$$\det(S) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori (eventual. comp)
 di S

$$S \text{ invertibile} \Leftrightarrow \exists S^{-1} \text{ t.c.}$$

$$SS^{-1} = S^{-1}S = I$$

$$\Leftrightarrow \det(S) \neq 0$$

Valgono tutte le regole del det derivanti (Binet, ecc...)

$$\text{Tr}(S) = \text{Tr}(S^T)$$

~~Tutte le altre proprietà~~

$$\begin{aligned} S \cdot T &= \text{Tr}(S \cdot T^T) = \\ &= \text{Tr}(S \cdot {}^t T) \\ &= \sum_{ij} S_{ij} T_{ij} \end{aligned}$$

~~...~~

$$\det(S) := \det([S])$$

$$S \text{ invertibile} \Leftrightarrow \exists S^{-1} \text{ t.c.}$$

$$SS^{-1} = S^{-1}S = I$$

$$\Leftrightarrow \det(S) \neq 0$$

Matrice ortogonale

S matrice ortogonale
 3×3 in $\mathbb{R}^3$ con base
canonica,

$$S S^T = S^T S = I_d \Leftrightarrow$$

$$S^T = S^{-1}$$

$S \in SO(3, \mathbb{R}) \Rightarrow S$ è
una ~~matrice ortogonale~~

Tensore ortogonale

(31)

2 tensore ortogonale se conserva
il prodotto scalare cioè

$$S u \cdot S v = u \cdot v \Leftrightarrow$$

$$S S^T = S^T S = I \Leftrightarrow$$

$$S^T = S^{-1}$$

S tensore t.c., $\det(S) > 0$

$\Rightarrow S$ è ~~matrice ortogonale~~

Per quanto è stato dimostrato o discusso nel capitolo
Geometria, per $S \neq I_d$, il luogo dei vettori $\sigma \in \mathbb{R}^3$
t.c.
 $S \sigma = \sigma$
è detto ~~asse di rotazione~~

~~Matrice simmetrica~~

S matrice t.c. ✓

$$\forall \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \neq 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3) S \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} > 0$$

Notazioni geometriche

$M(3 \times 3, \mathbb{R})$ = sp. vett. matrici quadrate
ordine 3

$GL(3, \mathbb{R})^+$ = matrici t.c. $\det(S) > 0$

$Sym^2(\mathbb{R}^3)$ = tensori simmetrici
ordine 2 su $\mathbb{R}^3$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ = tensori alterni
ordine 2 su $\mathbb{R}^3$

~~Tensore simmetrico~~

S t.c., $\forall \sigma \in \mathbb{R}^3, \{0\}$

$$\sigma \cdot S(\sigma) > 0$$

$$(\geq 0)$$

Notazioni Meccaniche

Lin = spazio vett. tensori ordine
ordine su $\mathbb{R}^3$

Lin⁺ = insieme tensori t.c.,
 $\det(S) > 0$

Sym = insieme tensori IIo.
simmetrici su $\mathbb{R}^3$

Skew = insieme tensori IIo.
antisimmetrici su $\mathbb{R}^3$

$O(3, \mathbb{R})$ = matrici ortogonali $\longleftrightarrow$ Orth = tensori ortogonali
 $SO(3, \mathbb{R})$ = matrici speciali ortog., $\longleftrightarrow$ Orth⁺ = tensori rotazione

Pertanto per i tensori, così come per le matrici, si può parlare di

- Autovetori
- Autovetori
- Autospazi
- Teorema spettrale dei tensori simmetrici

Proprietà

dim. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $Sv = \lambda v$, dove

$v \cdot Sv = v \cdot \lambda v = \lambda (v \cdot v)$. Ricordo che $(v \cdot v) > 0$ perché prod. sc.

$\Rightarrow \lambda \geq 0$ se S semi-def. positivo

$\lambda > 0$ se S definito positivo

Corrispondenza 3-3 associata

Esiste una corrispondenza biunivoca tra vettori di $\mathbb{R}^3$ e tensori antisimmetrici

$$\begin{array}{ccc} \text{Skew}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\Omega} & \mathbb{R}^3 \\ W & \xrightarrow{\quad} & w \end{array}$$

definito in modo tale che

$$W(v) = \Omega \times v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

Il vettore w viene detto il vettore associato corrispondente a W .

Base ortonormale di Sym e Skew

(3.1)

Per la definizione di Prodotto Stolare su Lin

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Lin} \times \text{Lin} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (S, T) &\longrightarrow t_2(S \circ T^T) \end{aligned}$$

abbiamo visto che

$$\forall S \in \text{Sym} \text{ e } \forall W \in \text{Skew} \Rightarrow S \cdot W = 0$$

In altre parole

$$\begin{aligned} \text{Sym} &= \text{Skew}^\perp \\ \text{Skew} &= \text{Sym}^\perp \end{aligned} \quad \left(\text{uno il complemento ortogonale dell'altro} \right)$$

e la decomposizione

$$\text{Lin} = \text{Sym} \oplus \text{Skew}$$

è una decomposizione ortogonale di Lin

Invece di considerare come base ortonormale di Lin $\{e_i \otimes e_j\}_{1 \leq i, j \leq 3}$, si vuole determinare una base ortonormale di Lin t.c.

$$\mathcal{B} = B_1, \dots, B_6, C_1, \dots, C_3$$

dove

$B_1, \dots, B_6$ base ortonormale di Sym

C_1, C_2, C_3 base ortonormale di Skew

Base ortonormale di Sym

$$B_1 = e_1 \otimes e_1$$

$$B_2 = e_2 \otimes e_2$$

$$B_3 = e_3 \otimes e_3$$

$$B_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$$

$$B_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1)$$

$$B_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2)$$

Base ortonormal de Skw

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1)$$

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2)$$

Ancora su traccia e determinante di un tensore

(3)

Se $T \in \text{Lin}$, allora

$$\text{tr}(T) := \sum_{i=1}^3 (T \cdot e_i \otimes e_i) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

esattamente come definito precedentemente

In particolare

$$\text{tr}(a \otimes b) = a \cdot b$$

Insomma,

$$\det(T) := T(e_1) \times T(e_2) \cdot T(e_3) =$$

$$= \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}$$

$\downarrow$
notazione Einstein

esattamente come definito prima

Questi due numeri reali sono degli scalari fondamentali associati ad un tensore

Autocoppie e equazione scalare

Dato $T \in \text{Lin}$, la coppia $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ t.c.

$$Tv = \lambda v$$

viene detta autocoppia di T equiv.

- λ autovalore di T
- v autovettore di T relativo a λ

Ricerca di autovalori

λ autovalore di $T \iff \exists \underset{\neq 0}{v} \in V$ t.c. $Tv = \lambda v$

$$\iff Tv - \lambda v = 0 \iff (T - \lambda \text{Id})(v) = 0 \iff$$

$0 \in \ker (T - \lambda Id) \Leftrightarrow T - \lambda Id$ è un endomorfismo

0

non invertibile (cioè non di rango massimo) $\Leftrightarrow$

$$\det(T - \lambda Id) = 0$$

Perciò gli autovalori di T sono le possibili soluzioni reali del polinomio cubico

$$P_T(\lambda) = \det(T - \lambda Id) = 0$$

il polinomio $P_T(\lambda)$ è detto polinomio caratteristico,
l'eq. precedente è detta equazione secolare
(Libro Scienze, Paolo Guisugli "Sforzi in un continuo
tridimensionale")

Nel caso di $T \in Lin_3$,

$$P_T(\lambda) = -\lambda^3 + I \lambda^2 - II \lambda + III$$

con i coefficienti

$$I := \text{Tr}(T) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$II := \det \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$III := \det(T)$$

$P_T(\lambda)$ è invariante per cambiamenti di base (equivalentemente per coniugio)

dim

Se T viene rappresentato in un'altra base b di V allora la matrice che rappresenta in base b è

$$S = A^{-1} T A$$

con A invertibile (matrice cambiamento di base) da a a b

$$\begin{aligned} P_S(\lambda) &= \det(S - \lambda \text{Id}) = \det(A^{-1} T A - \lambda \text{Id}) \\ &= \det(A^{-1} \cdot (T - \lambda \text{Id}) \cdot A) \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{associatività} \\ \text{prodotto matrici}}}{=} \det(A^{-1}) \cdot \det(T - \lambda \text{Id}) \cdot \det(A) \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{teorema} \\ \text{di Binet}}}{=} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot P_T(\lambda) \cdot \cancel{\det(A)} = P_T(\lambda) \quad \blacksquare$$

Conseguenza: i coefficienti dell'equazione scalare sono invarianti, cioè:

$$\text{I}(T) = \text{I}(S)$$

$$\text{II}(T) = \text{II}(S)$$

$$\text{III}(T) = \text{III}(S)$$

- Se si usa $A \in \text{Orth} = \mathcal{O}(3, \mathbb{R})$ come in problemi di MECCANICA/SCIENZE E COSTRUZIONI

$A^{-1} = A^T$ perciò da sopra segue che:

$$P_T(\lambda) = P_{A^T T A}(\lambda) \quad \forall A \in \text{Orth}$$

Per questo motivo i coefficienti dell'eq. secolare

$$I(T), II(T), III(T)$$

vencono dette INVARIANTI METRICI* di T
(cioè invariante per congruenza di Metrici)

<u>Meccanica</u>	<u>Geometria</u>
Base ortonormale destra (regola mano destra $\times \mathbb{R}^3$)	Base ortonormale positivamente orientata o equiv. equiversa alla base canonica

Abbiamo pertanto una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di Orth^+ (equiv. $\text{SO}(n, \mathbb{R})$), che sono le rotazioni, e le base ortonormali destre di $\mathbb{R}^n$.

Caso particolare: $\dim(V) = 3$
 Fissata base ortonormale $\Rightarrow V \cong \mathbb{R}^3$
 Sia $Q \in \text{Orth}^+ = \text{SO}(3, \mathbb{R})$

- a. Poichè $Q \in \text{Orth}^+ \Rightarrow \det(Q) = +1$
- b. Poichè $\text{Orth}^+ \subset \text{Orth} \Rightarrow$ gli autovalori reali di Q sono solo ± 1
- c. $P_Q(t) = \det(Q - tI)$ ~~polinomio caratteristico~~
 è t.c.

$$P_Q(t) = -t^3 + \text{tr}(Q)t^2 - \text{II}(Q)t + \det(Q)$$

dove

$$(i) \text{tr}(Q) = \underline{\text{traccia}} = \sum_{i=1}^3 q_{ii} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$$

q_{ii} = elementi diagonali di Q , λ_i = autovalori di Q
 (non nec. reali)

$$(ii) \det(Q) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$$

Poichè $P_Q(t)$ è un polinomio cubico $\Rightarrow$ esiste sempre almeno una radice reale (necessariamente $\neq \pm 1$).

Casistica

- $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_3} \in \mathbb{C}$
- $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_3 = -1$ perché
 $\det(Q) = +1$
 $\parallel$
 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1$ e poiché Q ortogonale
 $\Rightarrow Q$ è simile alla matrice identità $\Rightarrow Q$
è la matrice identità

Pertanto, se $Q \in \text{Orth}^+ = \text{SO}(3, \mathbb{R})$ non è
la matrice identità $\Rightarrow Q$ ha sempre
come autovalore semplice $\lambda = 1$, cioè
molt. alg. (1) = molt. geom (1) = 1

Ma molt. geom (1) = 1 $\Rightarrow$ l'autospazio relativo
a $\lambda = 1$

$$V_1(Q) = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v) = 1 \cdot v \}$$

è t.c. $\dim(V_1(Q)) = 1$ cioè è una
direzione privilegiata $\Rightarrow$ in effetti è
esattamente l'asse della rotazione determinata
da Q (IMPORTANTE PER TENSORE SPIN)

Studiamo ora in maggior dettaglio le due tipologie principali di Tensori secondo la decomposizione

$$Lin = Sym \oplus Skew$$

TENSORI ANTISIMMETRICI

$$W \in Skew \Rightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Corrispondenza assiale

Esiste corrispondenza biunivoca (isomorfismo) tra
vettori di $V = \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow$ tensori antisimmm.

$$\begin{array}{ccc} Skew & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ W & & \omega \end{array}$$

definita così:

$$\forall v \in V \quad W(v) = \omega \times v$$

Il vettore ω viene detto vettore assiale
o asse del tensore W

1

In particolare

$$\omega(W) = \omega \in \mathbb{R}^3$$

(37)

$$\omega(v) = W \in \text{Skew}(\mathbb{R}^3)$$

Vediamo la corrispondenza in coordinate

Sia $\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ e sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ qualsiasi

$$\begin{aligned} \omega \times v &= \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & e_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta x_3 - \gamma x_2 \\ \gamma x_1 - \alpha x_3 \\ \alpha x_2 - \beta x_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma x_2 + \beta x_3 \\ \gamma x_1 - \alpha x_3 \\ -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= W \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In altre parole

$$\omega \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

e viceversa

$$\omega \times \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix} \quad (12)$$

Significato Geometrico: perchè $\exists$ la corrispondenza αX ?

Passo 1: ~~Se W è antisimmetrica in $\mathbb{R}^3$ allora $\det(W) = 0$~~

dim: Sia W antisimmetrica, di ordine n .

Supponiamo che il rango di W sia $k \Rightarrow \exists$ una sottomatrice $k \times k$ a determinante non-nullo

$\Rightarrow$ ogni sottomatrice quadrata di W è antisimmetrica

Sia $W_0 \subset W$ la sottomatrice di ordine k a determinante non-nullo $\Rightarrow$

$$W_0 = -W_0^T$$

Ora

$$0 \neq \det(W_0) = \det(-W_0^T) =$$

$$= (-1)^k \det(W_0^T) =$$

$$= (-1)^k \det(W_0) \Rightarrow (-1)^k = 1$$

$\Rightarrow k$ è pari

Passo 2

dim $\text{rg}(W) = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ dal passo 1. Se $\text{rg}(W) = 0$

$\Rightarrow W$ è il tensore nullo (contro l'ipotesi).

$$\Rightarrow \text{rg}(W) = 2$$

Passo 3

~~Se W è antisimmetrica in $\mathbb{R}^3$ allora $\det(W) = 0$~~

dim: $\text{rg}(W) = 2 \Rightarrow W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è t.c.

$\dim(\text{Im}(W)) = 2 \Rightarrow$ per Teorema di Nullità

più Rango si ha $\dim(\text{Ker}(W)) = 3 - 2 = 1$

Passo 4

W è skew, $\bar{w} = \text{ax}(W)$

(38)

$$\ker(W) = \text{Span}\{\bar{w}\}$$

dim

$$\ker(W) = \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid W(\bar{v}) = \bar{0} \} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ corrisp. ax}}}{=} \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{w} \times \bar{v} = \bar{0} \}$$

One $\text{Span}\{\bar{v}\} \subseteq \ker(W)$

ma poiché $\ker(W)$ ha dim = 1 coincidono.

$\text{Span}(\bar{w})$ viene dato ~~da $\text{ax}(W)$~~



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{chi è } \bar{w} = \text{ax}(W) ?$$

$\ker(W)$

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ -x + 3z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2z \\ x = 3z \end{cases}$$

$$\bar{w}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Infatti } \bar{w}_0 \times \bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2z - y \\ x - 3z \\ -2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -W$$

Perciò il giusto $\bar{w}$ è $= -\bar{w}_0$

$$\text{ax}(W) = -\bar{w}_0 = \bar{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1 Dato il tensore del II ordine

$$T = e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 + \cancel{1} e_1 \otimes e_3 + 2 e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_1 + 2 e_3 \otimes e_3$$

determinare

a) L'asse della parte antisimmetrica di T

b) L'equazione risolvente della parte simmetrica di T .

Svolgimento

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(a) W = \frac{1}{2}(T - T^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'asse di W è il generatore del $\text{Ker}(W)$ cioè

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) S = \frac{1}{2}(T + T^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_S(\lambda) = 0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - \frac{9}{4}(2-\lambda) = -4\lambda^3 + 16\lambda^2 - 7\lambda + 14 = 0.$$

Esiste un esplicito legame tra

$$\{\text{Tensori antisimmetrici}\} \longleftrightarrow \{\text{tensori in } \text{Orth}^+\}$$

Sia τ = variabile temporale

$Q(\tau)$ famiglia di tensori, cioè $\forall \tau \quad Q(\tau) \in \text{Orth}^+$

In altre parole $Q(\tau)$ è una matrice con elementi dipendenti da un parametro $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $Q(\tau) = (q_{ij}(\tau))_{1 \leq i, j \leq 3}$.

Prendiamo la famiglia ad un parametro di rotazioni $Q(\tau)$.

Poiché $\forall \tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $Q(\tau) \in \text{Orth}^+ \subset \mathcal{O}(3) \Rightarrow$

$$Q(\tau) \cdot Q(\tau)^T = \text{Id}$$

Derivando rispetto a τ questa eguaglianza, si ottiene

$$\dot{Q}(\tau) \cdot Q(\tau)^T + Q(\tau) \cdot \dot{Q}(\tau)^T = 0$$

dove $\dot{Q}(\tau) = \frac{d}{d\tau} Q := \left(\frac{d}{d\tau} (q_{ij}(\tau)) \right)$ e dove si è usata la formula di Leibnitz per la derivazione di un prodotto.

Poiché la trasposizione è un antimorfismo, cioè $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, dalle formule incommiate si può dedurre,

$$\dot{Q}(\tau) Q(\tau)^T = - (\dot{Q}(\tau) Q(\tau)^T)^T$$

Pertanto, ponendo

$$\omega(\tau) := \dot{Q}(\tau) Q(\tau)^T$$

si ottiene una famiglia ad un parametro di tensori che si sa che risultano essere ANTISIMMETRICI dalle seconde relazioni incommiate.

$W(\mathbf{r})$ viene chiamato il tensore (antisimmetrico) Spin,
 associato alla rotazione $Q(\mathbf{r})$.

Esercizio 1

Determinare l'asse della parte antisimmetrica dello
 spinore

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \text{Orth}^+$$

che è la rotazione di $\frac{\pi}{4}$ attorno all'asse $\bar{e}_1$.

Svolgimento

$$\begin{aligned} W_Q &= \frac{1}{2} (Q - Q^T) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Come dai risultati generali

$$\text{rg}(W_Q) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Ker}(W_Q)) = 1 \Rightarrow$$

$$\text{Ker}(W_Q) = \text{Span}\{\omega\} = \text{Span}\{\text{ax}(W_Q)\}$$

perciò per trovare l'asse di W_Q è sufficiente determinare
 un generatore del $\text{Ker}(W_Q)$.

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} z = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{e}_1$$

In effetti, ricorrendo le formule precedenti

$$\text{ax}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto, l'asse di W_Q è proprio l'asse della rotazione Q .

Notiamo però che potevamo considerare più generalmente

(40)

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ famiglia di uniprimetto di rotazioni} \\ \text{attorno a } \bar{e}_1 \text{ di angolo } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Così che la matrice precedente Q non è altro che

$$Q = Q(\pi/4)$$

Con la descrizione meccanica del Tensore Spin vista precedentemente dobbiamo considerare

$$W(\theta) = Q(\theta) \cdot Q(\theta)^T$$

Ora:

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$Q(\theta)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & +\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$W(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2\theta - \cos^2\theta \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perciò $\forall \theta$, $W(\theta)$ è costante (non a caso l'asse di rotazione è sempre $\bar{e}_1 \forall \theta$)

$$\text{Visto che prima per } Q = Q(\pi/4) \text{ avevamo } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{W(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} W}$$

Cioè i due tensori antisimmetrici sono proporzionali.

L'asse è sempre $\bar{e}_1$. La definizione di Algebra lineare e meccanica del tensore antisimmetrico associato coincidono a meno di un fattore di proporzionalità. Ma

Però qui sempre ha una parte antisim. (ma se si rotazioni tutto coincide l'asse dell'isom, dx=assiale e una rotazione)

Esercizio 2

1.1

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Verificare che T non è una rotazione.

2) Verificare che T non è una rotazione.

Svolgimento

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $T \notin O(3) \Rightarrow T$ non è rotazione

2) Però

$$W = \frac{1}{2} (T - T^t) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(W) = ?$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ t. c. } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 y + z \\ 1/2 x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 1/2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

oppure

$$\ker(W) = \begin{cases} -1/2 y + z = 0 \\ 1/2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=t \\ z=1/2 t \end{matrix} \Rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Se $V = \mathbb{R}^3$, ricordiamo che abbiamo

$$\begin{array}{ccc} dX^{-1}: V & \longrightarrow & \text{Skew}(V) \\ \omega & \longrightarrow & W_\omega \end{array}$$

di modo t.c.

$$\text{Ker}(W_\omega) = \text{Span}\{\omega\}$$

equivalentemente, $\forall u \in V$

$$W_\omega(u) = \omega \times u,$$

Vogliamo rendere più esplicita questa corrispondenza.

Preso $\omega \in V$, considero

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{|\omega|} = \text{vers}(\omega) \quad \underline{\text{versore di } \omega}$$

tanto $\text{Span}(\omega) = \text{Span}(\hat{\omega})$.

Definiamo il seguente tensore del II ordine

$$W_\omega := |\omega| \left(R_{\hat{\omega}}(\pi/2) - \hat{\omega} \otimes \hat{\omega} \right)$$

dove

- $R_{\hat{\omega}}(\pi/2)$ è la rotazione di π attorno alla retta orientata $\text{Span } \hat{\omega}$
- $\hat{\omega} \otimes \hat{\omega}$ è il tensore decomponibile (o **DIADE** secondo la terminologia in SdC)

Affermiamo che il tensore così definito $W_\omega \in \text{Skew}(V)$ ed è **ESATTAMENTE** il tensore antisimmetrico tale che

$$\Delta \times (W_\omega) = \omega$$

Visto che è a titolo esemplificativo, faremo conti più semplici per

$$\hat{\omega} = e_3$$

tanto, almeno di isometrie si può sempre far coincidere $\hat{\omega}$ con e_3 .

In tale situazione abbiamo

$$\omega = k e_3, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\hat{\omega} = e_3$$

$$W_\omega = k \left(R_{e_3}(\pi/2) - e_3 \otimes e_3 \right)$$

Notiamo che, $\forall u \in V$,

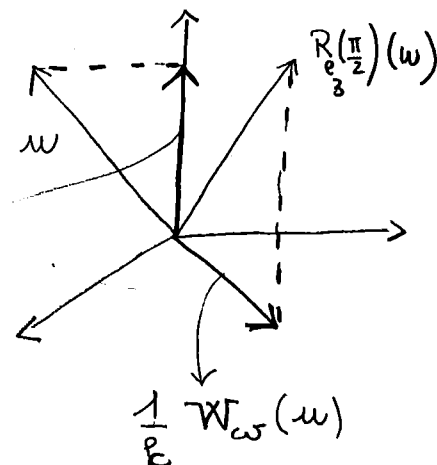
$R_{e_3}(\pi/2)(u)$ = ruotato di $\pi/2$ di u attorno a e_3

$$e_3 \otimes e_3(u) = (e_3 \cdot u) e_3 = \frac{(e_3 \cdot u)}{(e_3 \cdot e_3)} e_3 = \text{proiezione di } u \text{ su } \text{Span}\{e_3\}$$

Pertanto

$$V(R_{e_3}(\pi/2))(u) - (e_3 \otimes e_3)(u)$$

$$(e_3 \otimes e_3)(u)$$



vediamo la matrice rappresentativa

(42)

$$\begin{aligned} W_\omega(e_1) &= k \left(R_{e_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) (e_1) - (e_3 \otimes e_3)(e_1) \right) = \\ &= k \left(e_2 - \underset{\substack{|| \\ 0}}{(e_3 \cdot e_1) e_3} \right) = k e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_\omega(e_2) &= k \left(R_{e_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) (e_2) - (e_3 \otimes e_3)(e_2) \right) = \\ &= k \left(-e_1 - \underset{\substack{|| \\ 0}}{(e_3 \cdot e_2) e_3} \right) = -k e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_\omega(e_3) &= k \left(R_{e_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) (e_3) - (e_3 \otimes e_3)(e_3) \right) = \\ &= k \left(e_3 - (e_3 \cdot e_3) e_3 \right) = k 0 = 0 \end{aligned}$$

Per tanto, la matrice rappresentativa di W_ω in base e_1, e_2, e_3 è:

$$[W_\omega] = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -|\omega| & 0 \\ |\omega| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_\omega \in \text{Skew}(V) \text{ e } \ker(W_\omega) = \text{Span}\{\omega\}$$

Ed in effetti: se $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$$W_\omega(u) = [W_\omega] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k y \\ k x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega \times u = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & k \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k y \\ k x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ritroviamo manualmente

$$W_\omega(u) = \omega \times u.$$

Se Q è cambiamento di base ortogonale, si può verificare che

$$Q^T W_\omega Q = W_{Q(\omega)}$$

in altre parole

$$\det(Q^T W_\omega Q) = Q(\omega).$$

Applicazioni alla cinematica dei corpi rigidi

$\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ spazio euclideo

$T =$ intervallo
temporale $\subset \mathbb{R}_{\geq 0}$

$B \subset \mathcal{S}$ corpo rigido materiale

$t \in T$ variabile
temporale

$x \in B$ punto del corpo rigido

Un moto del corpo nello spazio $\mathcal{S}$ e nell'intervallo T è equivalente a conoscere una funzione

$$\begin{aligned} X: B \times T &\longrightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R}^3 \\ (x, t) &\longrightarrow X(x, t) \end{aligned}$$

per cui, $\forall x_0 \in B$ e $\forall t_0 \in T \Rightarrow X(x_0, t_0) =$ posizione
del punto x_0 al tempo t_0 sotto l'effetto del moto X

Pertanto

moto del corpo = $\left\{ \text{successione di configurazioni di } B \text{ in } \mathcal{S} = \mathbb{R}^3 \right.$
 $\left. \text{che variano al variare di } t \in T \right\}$

Se assumiamo X derivabile rispetto a $t \Rightarrow$

Velocità di B al tempo t_0 : $v(x, t_0) = \left. \frac{d}{dt} (X(x, t)) \right|_{t=t_0} \in V = \mathbb{R}^3$
stavolta $\mathbb{R}^3$ visto come sp. vettoriale

Per ogni $t \in T$ abbiamo un CAMPO VETTORIALE $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} v_t: B &\longrightarrow V \\ x &\longrightarrow v_t(x) := v(x, t) \end{aligned}$$

campo vettoriale della velocità materiale

Studiare moti di corpi rigidi in meccanica classica (43)
 Vuol dire studiare moti in cui Bè INDEFORMABILE
 in altre parole, si vuole che, $\forall t \in T$,

$$X_t : B \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Leftrightarrow |PQ(t)| = \text{cost.} \quad \forall t.$$

$$x \longmapsto X(x, t) = X_t(x)$$

è una congruenza o isometria di B (Geometria 1)

Perciò, se livello di vettori in $V = \mathbb{R}^3$ struttura vett.

$$X_t(x) - o = Q(t)(x - o) + u(t) \quad (A)$$

vetto re con
 pto appl. in o
 e estremo libero
 in $X(t, x)$

"ruotato" o le
 vetto re applicato
 in o e con estremo
 libero x al tempo
 t

+ traslazione
 al tempo t

$\Rightarrow$ pertanto, se $X(x, t) = X_t(x)$ è così definita $\Rightarrow$

$$v(x, t) = \left. \frac{d}{d\tau} (X_\tau(x)) \right|_{\tau=t} = \left. \frac{d}{d\tau} (Q(\tau)(x - o) + u(\tau) + o) \right|_{\tau=t}$$

$$= \dot{Q}(\tau)(x - o) + \dot{u}(\tau) \Big|_{\tau=t} = \dot{Q}(t)(x - o) + \dot{u}(t)$$

$$\Rightarrow v(x, t) = \dot{Q}(t)(x - o) + \dot{u}(t) \quad (B)$$

Isoliamo $(x - o)$ in (A) usando che $Q = Q(t)$ è
speciale ortogonale (cioè $Q = Q(t)$ rotazione) $\Rightarrow Q \cdot Q^T = Id$

$$[X_t(x) - o] - u(t) = Q \cdot (x - o) \Rightarrow \text{moltiplicando a sinistra per } Q^T \text{ ambo i membri}$$

$$Q^T (X_t(x) - o) - Q^T u(t) = (x - o)$$

Sostituendo in (B)

$$v(x, t) = \dot{Q} [Q^T (X_t(x) - o) - Q^T u(t)] + \dot{u}(t)$$

$$I \Rightarrow v(x, t) = \dot{Q} Q^T [X(x, t) - o] - \dot{Q} Q^T u + \dot{i}(t)$$

Ricordo che $\dot{Q} Q^T = W$ ~~matrice spin della rotazione~~,
come visto precedentemente.

Pertanto:

$$v(x, t) = W (X(x, t) - o) - W u + \dot{i}(t)$$

Per la corrispondenza assiale $\partial \times (W) = \omega$
cosicchè $W = W_\omega$

Poniamo

$$\bar{\omega} = \text{asse di } W = \text{velocità angolare}$$

$$\bar{o} = \dot{i} - W u = \text{velocità di traslazione}$$

Perciò, posto $P = X(x, t)$ il punto materiale

$$v(x, t) = \bar{\omega} \times \vec{OP} + \bar{o}$$

è l'espressione compatta della velocità materiale.

$$\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{0}.$$

Poichè

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= l_1 \mathbf{e}_1, \\ \vec{CB} &= l_2 (-\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2), \\ \vec{BA} &= -l (\sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_2),\end{aligned}$$

si trova:

$$\left. \begin{aligned} l_1 - \sin \alpha l_2 &= \sin \phi l \\ \cos \alpha l_2 &= \cos \phi l \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_1 = (\sin \phi + \cos \phi \tan \alpha) l, \quad l_2 = \frac{\cos \phi}{\cos \alpha} l.$$

Allora, dal momento che (9.2) implica che $\phi \rightarrow \pi/2$ ($\phi \rightarrow 0$) se $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \pi/2$), si vede che le posizioni limite di equilibrio della barra sono: quella verticale con $B \equiv C$, per $\alpha \rightarrow 0$; quella orizzontale, un po' più difficile da visualizzare, quando $l_1, l_2 \rightarrow \infty$ perchè $\alpha \rightarrow \pi/2$.

10 Cinematica

Sia $\mathcal{C}$ una regione limitata di $\mathcal{E}$; occupata da un corpo materiale del quale immaginiamo di etichettare i punti $P, Q, \dots$, una volta per tutte. Diciamo che il corpo $\mathcal{C}$ è *rigido*, riferendoci ad esso per memoria come a $\mathcal{C}_{rig}$, se la distanza tra due suoi punti qualunque non cambia nel corso di un qualunque suo moto:

$$|\vec{PQ}(t)| = \text{cost.} \quad (10.1)$$

Fissato un sistema di riferimento spazio-temporale, visualizzato nella Fig. 3.4

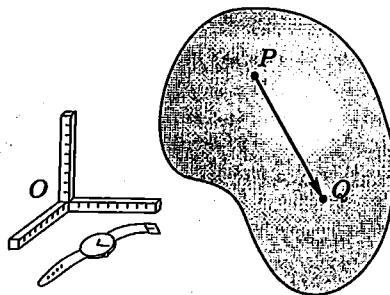


Figura 3.4.

per mezzo di tre regoli rigidi ortogonali e un orologio, l'applicazione a valori vettoriali

$$t \mapsto p_O(t) := \overrightarrow{OP}(t)$$

campo vettoriale

fornisce la posizione assoluta di P all'istante t rispetto all'origine O di quel riferimento. La posizione relativa a P di Q è:

$$p_P(Q, t) := \overrightarrow{PQ}(t) = Q(t) - P(t) = \overrightarrow{OQ}(t) - \overrightarrow{OP}(t) = p_O(Q, t) - p_O(P, t)$$

e può, quindi, essere intesa come la differenza tra le posizioni assolute di Q e P all'istante corrente. Differenziando la posizione assoluta di P :

$$t \mapsto \frac{d}{dt} p_O(t) =: v_O(P, t),$$

se ne ottiene la velocità assoluta all'istante t , mentre la velocità relativa a P di Q è la differenza delle rispettive velocità assolute:

$$\frac{d}{dt} (p_O(Q, t) - p_O(P, t)) = v_O(Q, t) - v_O(P, t) =: v_P(Q, t).$$

D'ora in avanti, avendo fissato un riferimento spazio-temporale "assoluto", scriveremo per semplicità $p(P, t)$ e $v(P, t)$, invece di $p_O(P, t)$ e $v_O(P, t)$, per posizione e velocità assolute di P al tempo t .

Una prima importante conseguenza dell'ipotesi di rigidità si ricava differenziando rispetto al tempo una versione equivalente dell'equazione (10.1) che la esprime:

$$|\overrightarrow{PQ}(t)|^2 = \text{cost.}$$

Si ottiene:

$$0 = \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{PQ} = p_P(Q, t) \cdot v_P(Q, t); \quad (10.2)$$

dunque, dati due punti P, Q di un corpo rigido in moto, ad ogni istante il luogo

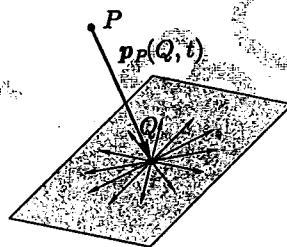


Figura 3.5.

delle possibili velocità $v_P(Q, t)$ di Q relative a P è il piano perpendicolare al vettore $p_P(Q, t)$, che specifica la posizione di Q relativa a P (Fig. 3.5). Precisamente, si può far vedere che vale la seguente formula di rappresentazione del campo di velocità relative:

$$\Rightarrow \exists \bar{\omega} = \bar{\omega}(t) \text{ t. c.}$$

10 Cinematica 61

$$U(Q) = W \times p(Q) \times Q \quad (10.3)$$

il vettore ω è detto **velocità angolare**

Mostriamo che ω non dipende dalla scelta di P , supponendo, per assurdo, che ne dipenda. Cominciamo scegliendo di rappresentare la velocità assoluta di Q in termini della velocità assoluta di P e della velocità di Q relativa a P :

$$\vec{v}(Q) = \vec{v}(P) + \vec{v}_P(Q) = \vec{v}(P) + \omega(P) \times \overrightarrow{PQ};$$

similmente, se per dare una rappresentazione della velocità assoluta di Q scegliamo un qualunque altro punto P' invece di P , otteniamo:

$$v(Q) = v(P') + \omega(P') \times \overrightarrow{P'Q};$$

d'altra parte, dev'essere anche vero che

$$\mathbf{v}(P') = \mathbf{v}(P) + \boldsymbol{\omega}(P) \times \overrightarrow{PP'}$$

Combinando le ultime tre relazioni, troviamo:

$$v(P) + \omega(P) \times \overrightarrow{PQ} = v(P) + \omega(P) \times \overrightarrow{PP'} + \omega(P') \times \overrightarrow{P'Q}.$$

e ne deduciamo che

$$\omega(P) \times (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PP'}) = \omega(P') \times \overrightarrow{P'Q} \Rightarrow (\omega(P) - \omega(P')) \times \overrightarrow{P'Q} = 0,$$

ovvero, visto che l'ultima relazione vettoriale vale qualunque sia Q e che, quindi, si può scegliere il vettore $\overrightarrow{P'Q}$ in modo arbitrario,

$$\omega(P) = \omega(P').$$

Ma, poiché anche la scelta di P' è arbitraria, si conclude che, nella rappresentazione (10.3) del campo delle velocità relative ad un punto P dei punti di un corpo rigido, la velocità angolare ω è effettivamente indipendente da P .

OSSERVAZIONI. 1. ~~Il presente documento è riservato ai soli~~
~~destinatari del prodotto. Qualora l'acquirente non fosse in grado di~~
~~ottenere:~~

$$T = \frac{m_1(Q_1 + Q_2)}{m_1(Q_1 + Q_2) + m_2(Q_1 + Q_2)} = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_2}{Q_1}}$$

2. Un campo vettoriale che abbia la forma

$$m(q) = n_0 + n_1 \times 10^{-3} q, \quad q \in [0, 1] \quad (10.4)$$

si dice un *arco di moto* *triviale* definito sulla regione G , è facile vedere che $w_0 = w(P_0)$, onde l'ultima relazione ammette la scrittura equivalente

¹ Qui e nel seguito di questa dimostrazione, per semplicità di scrittura, lasciamo sottintesa la dipendenza da t ; per la stessa ragione, scriviamo $v(P)$, invece di $v_0(P)$, per la velocità assoluta di P .

$$w(Q) = w(P_o) + \omega_o \times \overrightarrow{P_o Q}, \quad Q \in \mathcal{C} \quad (10.5)$$

Va da sé che, se $\mathcal{C}$ è occupata all'istante t da un corpo rigido $\mathcal{C}_{rig}$ in moto, il campo delle velocità assolute dei punti di $\mathcal{C}_{rig}$

$$v(Q, t) = v(P_o, t) + \omega(t) \times \overrightarrow{P_o(Q, t)}, \quad Q \in \mathcal{C}_{rig} \quad (10.6)$$

può essere inteso come uno speciale atto di moto rigido, quello che a quell'istante effettivamente si realizza nel corso di quel moto.

3. Si immagini un corpo rigido piano come in Fig. 3.6, in un moto in cui un suo punto P resti fisso e il vettore velocità angolare sia perpendicolare al piano del foglio: $\omega = \omega e_3$, $\omega > 0$. Allora, $|v(Q)| = \omega |PQ|$ misura l'angolo "spazzato" dal

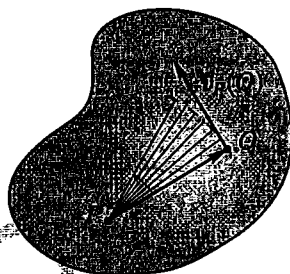


Figura 3.6.

vettore posizione $\overrightarrow{PQ}$ nell'unità di tempo; di qui il nome "velocità angolare" per il vettore ω che appare nella rappresentazione (10.3).

11 Potenza di un sistema di forze e coppie

La potenza spesa da una forza f applicata ad un punto che abbia velocità assoluta v è:

$$\Pi(f)[v] := f \cdot v.$$

Questa nozione è indipendente dalla natura del corpo materiale cui il punto di applicazione della forza appartiene.

Se di un corpo si considera un generico atto di moto rigido v_{rig} di tipo (10.4), la potenza spesa dalla forza $f(P)$ applicata a P prende l'aspetto seguente:

$$\Pi(f)[v_{rig}] = f(P) \cdot w_o + \overrightarrow{P_o P} \times f(P) \cdot \omega_o \quad (11.1)$$

Osservando la (11.1), si nota che le variabili cinematiche (w_o, ω_o), che parametrizzano la collezione degli atti di moto rigidi, sono coniugate, rispettivamente, alle variabili dinamiche ($f(P), \overrightarrow{P_o P} \times f(P)$), la forza applicata e il suo momento rispetto al punto P_o .

100 4 Catene Piane di Corpi Rigidi

che tutti i vincoli, sia interni che esterni, sono posizionali, ma che quelli interni limitano le *posizioni relative* di punti di corpi rigidi adiacenti, quelli esterni limitano *posizioni assolute* di punti del sistema rispetto ad un riferimento fissato.

Le catene cinematiche a un parametro schematizzano il funzionamento di vari *meccanismi attuatori*: lo schema a sinistra nella figura è il familiare complesso *biella/manovella*, che mette infatti il moto alternativo della biella tramite il moto circolare della manovella ad essa congiunta con una cerniera di connessione. Per comprendere come il moto di un elemento della catena si trasmetta agli altri, conviene rendersi conto che, *ad ogni istante, ogni elemento della catena compie un atto di moto rigido di tipo rotatorio*. Determineremo tale atto di moto nel caso semplice delle catene cinematiche *piane*; il caso generale non presenta alcuna maggiore complicazione concettuale.

19.1 Centro di rotazione istantaneo

Consideriamo il corpo rigido piano in figura.

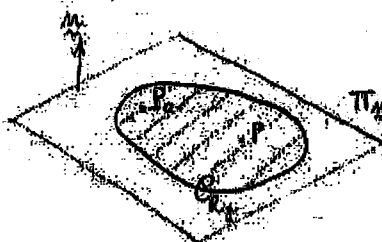


Figura 4.19.

Atto di moto rigido

Il nostro obiettivo è determinare, ad istante t , un punto C del piano π cui appartiene il corpo rigido, tale che

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{CP} \quad \forall P \in \pi$$

con

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{CC} = \mathbf{0}$$

Il nostro obiettivo è determinare, ad istante t , un punto C del piano π cui appartiene il corpo rigido, tale che

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{w} \times \mathbf{r}_{CP} \quad \forall P \in \pi \quad (19.1)$$

per una opportuna scelta del numero reale w . Vogliamo, cioè, stabilire se c'è un punto del piano del corpo rispetto al quale l'atto di moto si possa riguardare

come puramente rotatorio: vista la proprietà che lo definisce, diremo questo punto *centro di rotazione istantanea*.

Mostriamo anzitutto che, se tale punto esiste, allora $\omega_I = \omega$. Non lede la generalità immaginare che l'atto di moto del corpo sia la restrizione di un campo di velocità di identica forma, definito sull'intero piano π_n . Dati due punti $P_1, P_2 \in \pi_n$, si ha

$$\begin{aligned} v(P_1) &= v(P_0) + \omega \times \overrightarrow{P_0 P_1} = \omega_I \times \overrightarrow{IP_1}, \\ v(P_2) &= v(P_0) + \omega \times \overrightarrow{P_0 P_2} = \omega_I \times \overrightarrow{IP_2}. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni si ha

$$\omega \times (\overrightarrow{P_0 P_1} - \overrightarrow{P_0 P_2}) = \omega_I \times (\overrightarrow{IP_1} - \overrightarrow{IP_2}),$$

vale a dire:

$$\omega \times \overrightarrow{P_2 P_1} = \omega_I \times \overrightarrow{P_2 P_1};$$

dall'arbitrarietà di scelta di P_1 e P_2 segue che nella rappresentazione (19.1) si deve prendere $\omega_I = \omega$.

Affrontiamo adesso il problema della determinazione del punto I . La condizione definitoria che $v(I) = 0$ implica che risulti:

$$0 = n \times v(I) = n \times v(P_0) + \omega n \times (n \times \overrightarrow{P_0 I}) = n \times v(P_0) - \omega \overrightarrow{P_0 I}.$$

Infatti, quanto all'ultimo passaggio, è facile verificare che, comunque sia scelto



Figura 4.20.

$v \in V$ tale che $v \cdot n = 0$, si ha

$$n \times (n \times v) = -v$$

(Fig. 6.10). Poiché $\overrightarrow{P_0 I} \cdot n = 0$, concludiamo che il vettore che fornisce la posizione del punto cercato rispetto a P_0 è:

$$\overrightarrow{P_0 I} = \omega^{-1} n \times v(P_0);$$

la proprietà rilevante deducibile da questa formula è che il punto I si deve trovare nel piano π_n , sulla perpendicolare per P_0 al vettore $v(P_0)$. Di qui la procedura grafica per determinare il centro di rotazione istantanea di un corpo rigido piano: note le velocità di due suoi punti distinti in un atto di moto rigido compatibile con i vincoli eventualmente imposti al corpo, il centro di rotazione istantanea si trova nell'intersezione delle perpendicolari per quei due punti alle rispettive velocità.

OSSERVAZIONE: Se le velocità dei due punti prescelti sono parallele, tali ne sono le perpendicolari: il centro di rotazione istantanea coincide con il punto all'infinito di queste ultime e l'atto di moto del corpo è una traslazione nella direzione comune alle velocità dei due punti.

19.2 Atto di moto

Torniamo alle catene cinematiche ad un parametro. Quanto al sistema biel-la/manovella di Fig. 6.12, è chiaro che il centro di rotazione istantanea I_M della manovella M coincide con la cerniera in A , mentre il centro di rotazione

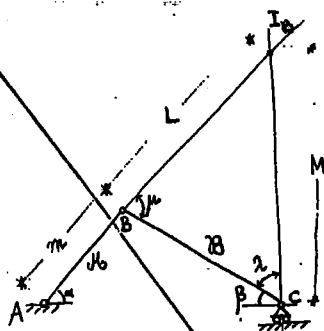


Figura 4.21.

istantanea I_B della biella B si trova sull'intersezione delle perpendicolari alle velocità di B e di C , cioè, sull'intersezione tra il prolungamento dell'asse di M e la normale alla via di corsa del carrello.

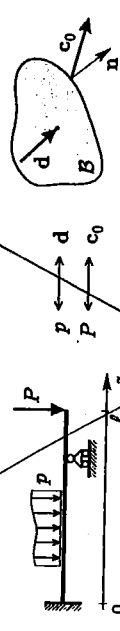
Ci poniamo il problema, data la velocità angolare $\omega_M = \omega_M n$ della manovella, di determinare quella $\omega_B = \omega_B n$ della biella.

Visto che abbiamo individuato i centri di rotazione istantanea, la risoluzione è pressoché immediata. Gli atti di moto dei due corpi ammettono le rappresentazioni seguenti:

$$\begin{aligned} v(P) &= \omega_M \times \overrightarrow{AP}, \quad P \in M; \\ v(P) &= \omega_B \times \overrightarrow{IB}P, \quad P \in B. \end{aligned}$$

in un maldestro tentativo di sottolinearne con l'aggettivazione la natura puntuale; le condizioni al bordo (9.4.2) sono dette equazioni *ai limiti*, altrettanto sovente e quasi altrettanto maldestramente.

Le equazioni (9.4.1)-(9.4.2) restringono la scelta dei sei campi indipendenti, cui il campo T equivale, costituendo un sistema che è, di regola, sottodeterminato. La situazione tridimensionale non è dunque diversa da quella di cui abbiamo esperienza nel caso delle travi linearmente elastiche: sulla base delle sole equazioni di equilibrio, di rado possiamo risolvere completamente il problema statico, cioè, determinare in modo unico le caratteristiche di sollecitazione (il corrispettivo, in quella teoria, del campo di sforzo, Fig. 9.11).



$$T' + p = 0, \quad M' + T = 0 \iff \text{Div } T + d = 0$$

$$T(t) = P \iff Tn = c_0$$

1D 3D
Figura 2.11

Di regola, tener conto delle relazioni di compatibilità tra spostamenti e deformazioni e delle relazioni costitutive è indispensabile per poter trovare quell'unico stato elastico della trave in esame - cioè, quell'unica terna di campi di spostamento, deformazione e, appiattito, caratteristiche di sollecitazione - che è compatibile con i carichi e i vincoli/dati. Se le sole equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare il campo di sforzo, si dice che il problema in esame è *staticamente determinato*, così come si fa nel caso delle travature.

Esaminiamo qui di seguito tre esempi di problema statico determinato, particolarmente semplici e tuttavia, come vedremo subito, importanti. In tutti questi problemi,

- (i) le forze a distanza sono identicamente nulle;
- (ii) si cercano soluzioni del tipo

$$d_0 \equiv 0 \quad \text{in } B; \quad (2.4.3)$$

$$T(X) \equiv \text{costante in } \bar{B}; \quad (2.4.4)$$
- (iii) la forza di contatto è assegnata su tutta la frontiera:

$$\partial B_f = \partial B. \quad (2.4.5)$$

Esempi

Quindi, l'equazione differenziale (9.4.1) è sempre identicamente soddisfatta; a determinare la soluzione è soltanto l'equazione algebrica (9.4.2).

2.4.1 Trazione

Facendo riferimento alla Figura 2.12, sia B un cilindro di sezione trasversale costante, ma per altro arbitraria, caricato soltanto sulle basi, proprio come il parallelepipedo di Fig. 2.3.

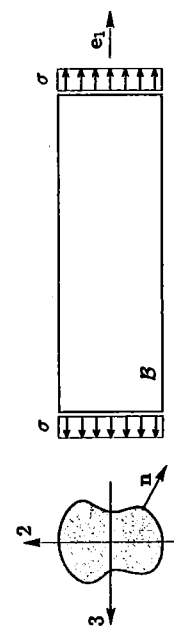


Figura 2.12

La forza di contatto applicata dall'ambiente esterno vale:

$$c_0 = \pm \sigma e_1 \quad \text{sulle basi, dove la normale è } n = \pm e_1;$$

$$= 0 \quad \text{sul mantello laterale, dove la normale è tale che } n \cdot e_1 = 0.$$

Il campo di sforzo a valori simmetrici

$$T(X) \equiv \sigma e_1 \otimes e_1, \quad \sigma > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

descrive uno stato di semplice trazione (compressione, se $\sigma < 0$) nella direzione di e_1 . Oltre a soddisfare identicamente l'equazione (9.4.1), questo campo soddisfa anche la condizione al bordo (9.4.2), tanto sulle basi del cilindro, dove

$$Tn = \pm \sigma e_1, \quad (2.4.7)$$

quanto sul mantello laterale, dove

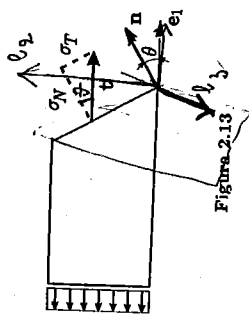
$$Tn = 0. \quad (2.4.8)$$

In un qualunque punto interno del cilindro, scelta una giacitura orientata dalla propria normale n , il vettore tensione vale

$$t = Tn = (\sigma e_1 \otimes e_1)n = (n \cdot e_1)\sigma e_1. \quad (2.4.9)$$

Dunque, in ogni punto di una sezione così orientata (Fig. 9.13),

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{\vec{E} \cdot \vec{E}} = \sqrt{(\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2) \cdot (\cos\theta \cdot \vec{e}_1 + \sin\theta \cdot \vec{e}_2)} = \cos\theta$$



$$\vec{n} \cdot \vec{e}_1 = \cos\theta$$

la componente perpendicolare del vettore tensione vale

$$\sigma_N = \|\vec{E}\| \cos\theta = \|\vec{E}\| \|\vec{n}\| \cos\theta = \|\vec{E}\| \|\vec{n}\| \cos\theta = \sqrt{\vec{E} \cdot \vec{E}} \cdot \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} \cos\theta = \cos\theta \cos\theta = \cos^2\theta \quad (2.4.10)$$

I piani normali sono quelli che passano di asse $\vec{e}_3$.
Inoltre, la componente perpendicolare alla sezione vale

$$\sigma_T = \vec{t} \cdot \vec{m} = (\vec{n} \cdot \vec{e}_1)(\vec{m} \cdot \vec{e}_1) \sigma, \quad \vec{m} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.4.11)$$

e quindi è nulla per $\vec{m} \times \vec{e}_3 = 0$, massima per $\vec{m} \cdot \vec{e}_3 = 0$, quando vale

$$\vec{m} \parallel \vec{e}_3 \quad (\sigma_T)_{\max} = (\sin\theta \cos\theta) \sigma \quad (2.4.12)$$

2.4.2 Pressione

In questo caso, $\mathcal{B}$ è una palla sferica soggetta ad una pressione uniforme

$$c_0 = -\pi n$$

e si sceglie come soluzione del problema statico

$$T(X) \equiv -\pi I, \quad \pi > 0 \quad (2.4.13)$$

(Fig. 9.14).

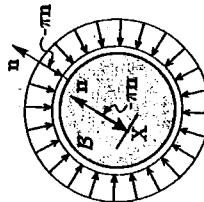


Figura 2.14

È facile vedere che la condizione al bordo

$$Tn = c_0$$

$$(2.4.14)$$

2.4 Il problema statico

è soddisfatta. Inoltre, in ogni punto $X \in \mathcal{B}$, il vettore tensione relativo ad una giacitura è perpendicolare alla giacitura stessa:

$$t(X, n) = -\pi n; \quad (2.4.15)$$

dunque,

$$\sigma_N = \vec{t} \cdot \vec{n} = -\pi \|\vec{t}\|, \quad \forall \vec{n} \in \mathcal{U};$$

$$\sigma_T = \vec{t} \cdot \vec{m} = 0, \quad \forall \vec{m}, \vec{n} \in \mathcal{U} : \vec{m} \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.4.16)$$

Uno stato di sforzo di uniforme pressione (trazione, se $\pi < 0$) si dice spesso di tipo idrostatico, pensando alla situazione di un corpo immerso nell'acqua.⁵

2.4.3 Taglio

In questo caso, $\mathcal{B}$ è un cubo con facce perpendicolari agli assi coordinati, sulle quali l'ambiente esterno esercita la forza di contatto

$$\begin{aligned} c_0 &= \pm \tau \vec{e}_2 \quad \text{sulle facce di normale } \vec{n} = \pm \vec{e}_1 \\ &= \pm \tau \vec{e}_1 \quad \text{sulle facce di normale } \vec{n} = \pm \vec{e}_2 \\ &= 0 \quad \text{sulle facce di normale } \vec{n} = \pm \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

(si veda la Fig. 9.15, fatta pensando $\tau > 0$; nulla di qualitativamente rilevante cambia se $\tau < 0$).

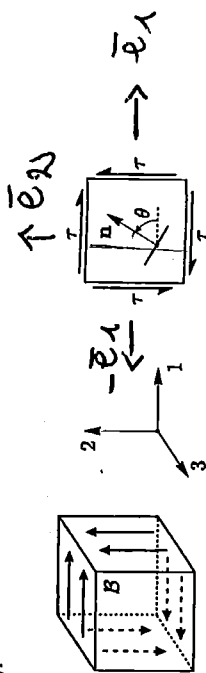


Figura 2.15

Come soluzione del problema statico, si sceglie

$$T(X) = \tau (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1), \quad \tau = \tau \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.18)$$

Controllare che la condizione (9.4.2) resta soddisfatta in ogni punto del bordo è facile. Resta da considerare quale sia l'aspetto del vettore tensione su una generica giacitura orientata per un punto scelto a piacere in $\mathcal{B}$. Si trova:

$$T(\vec{n}) = \tau ((\vec{n} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_1 + (\vec{n} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_2), \quad (2.4.19)$$

⁵Situazione che non è tuttavia esattamente la stessa, perchè la pressione idrostatica cambia con la quota.

$$\theta = \widehat{\vec{m}, \vec{e}_1} \quad \vec{m} \cdot \vec{e}_1 = \cos \theta \quad \vec{m} \cdot \vec{e}_2 = \sin \theta$$

dove

$$\begin{aligned} (*) \quad \sigma_N &= t \cdot n = 2(n \cdot e_1)(n \cdot e_2)\tau, \\ \sigma_T &= t \cdot m = ((m \cdot e_1)(n \cdot e_2) + (m \cdot e_2)(n \cdot e_1))\tau, \\ |t| &= \sqrt{((n \cdot e_1)^2 + (n \cdot e_2)^2)\tau} = \tau \sqrt{1 - (n \cdot e_3)^2}. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

In particolare, per le giaciture parallele al terzo asse coordinato, si ha:

$$\sigma_N = \sin(2\vartheta)\tau, \quad \sigma_T = \cos(2\vartheta)\tau, \quad |t| = \tau; \quad (2.4.21)$$

quindi, la componente normale della tensione è massima (minima) sulla giacitura di angolo $\vartheta = \pi/4$ ($\vartheta = (3/4)\pi$), sulla quale la tensione tangenziale è nulla; d'altra parte, la componente tangenziale massima (minima) si ottiene per $\vartheta = 0$ ($\vartheta = \pi$), quando la componente normale è nulla.

ESERCIZI

2.4. Una trave di sezione quadrata di lato a è soggetta ad un sistema di forze equilibrato. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ con origine nel centro della trave e asse z parallelo all'asse della trave, lo stato di sforzo è rappresentato dal tensore

$$[T(x, y, z)] = \sigma \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} & -\frac{xy}{a^2} & \frac{z}{a} \\ -\frac{xy}{a^2} & \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} & \frac{y}{a} \\ \frac{z}{a} & \frac{y}{a} & 1 + \frac{yz}{L^2} \end{bmatrix}$$

dove L è la lunghezza della trave. Determinare le forze a distanza d e le forze di contatto f e g che agiscono sulle facce di normale esterna e_1 ed e_2 ; calcolare inoltre il risultante F e il momento risultante M delle forze agenti sulla base di normale e_3 .

Soluzione. Per trovare le forze a distanza è sufficiente calcolare la divergenza del tensore T ; rammentando che $(\text{Div } T)_i = T_{1i,1} + T_{2i,2} + T_{3i,3}$, possiamo subito concludere che:

$$(\text{Div } T)_1 = T_{11,1} + T_{12,2} + T_{13,3} = \sigma \left(\frac{x}{a^2} - \frac{x}{a^2} \right) = 0,$$

$$(\text{Div } T)_2 = T_{21,1} + T_{22,2} + T_{23,3} = \sigma \left(-\frac{y}{a^2} + \frac{y}{a^2} \right) = 0,$$

$$(\text{Div } T)_3 = T_{31,1} + T_{32,2} + T_{33,3} = \sigma \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{y}{L^2} \right) = \frac{\sigma}{L} \left(\frac{2L}{a} + \frac{y}{L} \right).$$

Il vettore d è dunque dato da:

$$d = -\frac{\sigma}{L} \left(\frac{2L}{a} + \frac{y}{L} \right) e_3$$

Determiniamo adesso la forza di contatto f agente sulla faccia di normale e_1 ; basterà ricordare che

$$f = T \left(x = \frac{a}{2} \right) e_1 = \frac{\sigma}{8} e_1 - \frac{\sigma y}{2a} e_2 + \frac{\sigma}{2} e_3.$$

Per trovare la forza g agente sulla faccia di normale e_2 agiamo in maniera del tutto analoga:

$$g = T \left(y = \frac{a}{2} \right) e_2 = -\frac{\sigma x}{2a} e_1 + \frac{\sigma}{8} e_2 + \frac{\sigma}{2} e_3.$$

Ci resta da determinare il risultante e il momento risultante delle forze agenti sulla faccia di normale e_3 ; per far ciò calcoliamo per prima cosa le forze di contatto h che agiscono su tale faccia:

$$h = T e_3 = \frac{\sigma x}{a} e_1 + \frac{\sigma y}{a} e_2 + \sigma + \frac{\sigma y}{2L} e_3;$$

il risultante F è dato da

$$F = \int_{\Sigma} h \, dA$$

dove $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}], y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]\}$. Pertanto otteniamo:

$$F_1 = \int_{\Sigma} \frac{\sigma x}{a} \, dA = 0, \quad F_2 = \int_{\Sigma} \frac{\sigma y}{a} \, dA = 0, \quad F_3 = \int_{\Sigma} \left(\sigma + \frac{\sigma y}{2L} \right) \, dA = \sigma a^2.$$

Il momento risultante è invece dato da

$$M = \int_{\Sigma} (x - o) \times h \, dA,$$

dove $(x - o) = x e_1 + y e_2 + z e_3$. Otteniamo quindi che

$$M_1 = \int_{\Sigma} \left(\sigma y + \frac{\sigma y^2}{2L} - \frac{\sigma y z}{a} \right) \, dA = \frac{\sigma a^4}{24L},$$

$$M_2 = \int_{\Sigma} \left(\frac{\sigma x z}{a} - \sigma x - \frac{\sigma x y}{2L} \right) \, dA = 0,$$

$$M_3 = 0.$$

2.5 Analisi locale dello stato di sforzo

Questa sezione è dedicata all'analisi qualitativa e quantitativa del campo di sforzo in un punto, un prologo indispensabile alla stima, che compiamo nel Capitolo 12, del rischio associato al cimento locale del materiale.

2.5.1 Stato di sforzo come addizione di stati elementari

Lo studio dei problemi di trazione, pressione e taglio è importante non solo perché si tratta di tre esempi semplici di problema statico suscettibile di soluzione diretta, ma anche e soprattutto perché gli stati di sforzo corrispondenti sono i 'building blocks' con i quali possiamo sia costruire un qualunque stato di sforzo sia compierne una significativa analisi qualitativa.

Dato un tensore simmetrico T , ne definiamo la parte sferica

$$\text{sph } T := \frac{1}{3}(\text{tr } T)I \quad (2.5.1)$$

e la parte deviatorica

$$\text{dev } T := T - \text{sph } T \quad (2.5.2)$$

Notiamo subito che

$$\text{tr}(\text{dev } T) = 0, \quad \text{dev}(\text{sph } T) = 0, \quad (2.5.3)$$

e che la decomposizione additiva

$$T = \text{sph } T + \text{dev } T \quad (2.5.4)$$

è unica. Notiamo anche che, scelto un riferimento cartesiano ortogonale e posto

$$p = \frac{1}{3} \text{tr } T, \quad (2.5.5)$$

questa decomposizione ha l'aspetto:

$$T = pI + (T_{11} - p)e_1 \otimes e_1 + T_{12}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + \dots + (T_{33} - p)e_3 \otimes e_3,$$

ovvero, in notazione matriciale,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{22} & T_{23} & \\ T_{33} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{11} - p & T_{12} & T_{13} \\ T_{22} - p & T_{23} & \\ T_{33} - p & & \end{bmatrix}$$

$\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right] + (T_{11} - p) \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] + \dots + (T_{33} - p) \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right]$

$\xrightarrow{\text{pressione}} \quad \xrightarrow{\text{taglio}}$

(2.5.6)

Perciò, comunque si sia scelto un riferimento cartesiano ortogonale, ogni stato di sforzo si può interpretare come la somma di uno stato di pressione (o trazione) uniforme, di uno, due o tre stati di trazione (o compressione) semplice nella direzione degli assi coordinati, e di uno, due o tre stati di taglio nei piani coordinati. Nulla vieta, naturalmente, che qualcuno degli addendi sia nullo.

Esempio $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sph}(T) = \frac{1}{3} \cdot 6 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{dev } T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 41

$T = \text{sph}(T) + \text{dev}(T) = 2I - 1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + 1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + 4(e_2 \otimes e_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) + 1 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3.$

2.5.2 Tensioni e direzioni principali

In ogni punto di un corpo materiale continuo, nel quale si instauri un campo di sforzo, si possono sempre trovare almeno tre giaciture mutuamente ortogonali il cui vettore tensione è diretto come la normale, in direzione della quale la materia è dunque semplicemente tesa o compressa. La determinazione di queste giaciture e della tensione relativa si compie risolvendo un semplice problema algebrico, che si può formulare così:

dato un tensore simmetrico T , trovare una coppia $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$ tale che

$$Tv = \lambda v.$$

Si vede subito che ogni eventuale soluzione ha la proprietà:

$$(Tv) \times v = 0,$$

ovvero che l'aspetto geometrico del problema consiste nel trovare almeno un vettore v che l'applicazione lineare T trasformi in un vettore parallelo a se stesso; noto v , il calcolo del numero reale λ è immediato:

$$\lambda = (v \cdot v)^{-2} Tv \cdot v = T \frac{v}{|v|} \cdot \frac{v}{|v|}.$$

Questa formula rende evidente che, trovata una soluzione (λ, v) , anche $(\lambda, \alpha v)$ risolve il problema, e per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$; tanto vale, quindi, cercare il secondo elemento di ogni coppia risolvete nella sfera $\mathcal{U}$ dei vettori unimodulari, attribuendogli a piacere un verso. Si dice allora autocoppia di T , ogni coppia $(\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathcal{U}$ che risolve l'equazione

$$Tn = \lambda n; \quad (2.5.7)$$

coerentemente, n si dice un autovettore di T , associato all'autovalore λ .

Un ben noto teorema di algebra lineare afferma che (i) vi sono almeno 3 = dim(V) soluzioni del problema di ricerca delle autocoppie; e che (ii) autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.

La prova della seconda affermazione è immediata: se (λ_1, n_1) e (λ_2, n_2) sono autocoppie, allora

$$Tn_\alpha = \lambda n_\alpha, \quad \alpha = 1, 2;$$

di conseguenza, visto che T è un tensore simmetrico,

$$\lambda_1 n_1 \cdot n_2 = Tn_1 \cdot n_2 = n_1 \cdot Tn_2 = \lambda_2 n_1 \cdot n_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1 \cdot n_2) = 0;$$

dunque, data l'ipotesi che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dev'essere

$$n_1 \cdot n_2 = 0.$$

Teorema spettrale
per tensori autosimmetrici

La prova della prima affermazione è un po' più riposta; ci limiteremo ad esporne la traccia. Si comincia scrivendo (9.5.7) nella forma alternativa:

$$(T - \lambda I)n = 0 \quad (2.5.8)$$

e invocando il teorema di Rouché-Capelli per affermare che la solubilità in $\mathcal{U}$ di questa equazione richiede che il tensore $A := T - \lambda I$ non sia invertibile, cioè, che λ sia una soluzione della cosiddetta *equazione secolare*:

$$\det(T - \lambda I) = 0. \quad (2.5.9)$$

Nel nostro caso, l'equazione secolare è una cubica:

$$-\lambda^3 + I\lambda^2 - II\lambda + III = 0, \quad (2.5.10)$$

i cui coefficienti sono gli *invarianti ortogonali* di T :

$$\begin{aligned} I &:= T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr } T; \\ II &:= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}; \\ III &:= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det T. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che un tensore invertibile Q si dice *ortogonale* se il suo inverso coincide con il suo trasposto: $Q^{-1} = Q^T$. Gli invarianti ortogonali primo, secondo e terzo di un tensore simmetrico T , che le (9.5.11) definiscono, sono tre numeri reali che T condivide con ogni suo *coniugato ortogonale* $T^* = QTQ^T$. In particolare, II , l'invariante secondo, è per definizione la somma dei minori aggiunti agli elementi della diagonale principale di T in una qualsiasi sua rappresentazione matriciale.

Il Teorema Fondamentale dell'Algebra garantisce per l'equazione secolare tre radici reali, eventualmente di molteplicità due o tre, che conveniamo di numerare sempre in ordine non crescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3. \quad (2.5.12)$$

⁶Il nome dell'equazione (9.5.9) le viene da un problema di astronomia nel quale essa gioca un ruolo importante. Come si sa, l'equazione $Av = 0$ ammette sempre in V la soluzione banale $v = 0$, che in questo caso è inaccettabile; la condizione (9.5.9) garantisce che tale soluzione non sia l'unica.

⁷Ad esempio, ben note proprietà della funzione determinante e dei tensori ortogonali consentono di verificare rapidamente che

$$\det T^* = (\det Q)^2 \det T = \det T.$$

Se λ è una di esse, l'autovettore n corrispondente si trova risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} (T - \lambda I)n = 0, \\ n \cdot n = 1, \end{cases} \quad (2.5.13)$$

nel quale solo due tra le tre prime equazioni sono linearmente indipendenti. Notiamo come conseguenza di (9.5.7) che, per ogni autocoppia (λ_i, n_i) , si ha:

$$(Tn_i) \otimes n_i = T(n_i \otimes n_i) = \lambda_i n_i \otimes n_i,$$

dove non va eseguita la somma sull'indice i . Scegliendo, come sempre è possibile, tre autovettori mutuamente ortogonali, si trova per T la seguente importante rappresentazione:

$$T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i n_i \otimes n_i. \quad (2.5.14)$$

OSSERVAZIONE. Abbiamo qui tenuto conto del fatto che

$$I = \sum_{i=1}^3 n_i \otimes n_i,$$

fatto che *a posteriori* si può riguardare come un'applicazione della stessa formula di rappresentazione (9.5.14).

Come esempi di risoluzione del problema di ricerca delle autocoppie, usiamo gli stati di sforzo di trazione, pressione e taglio, esaminati nella Sezione 9.4.

9.5.1 TRAZIONE

Visto che

$$T = \sigma e_1 \otimes e_1, \quad \sigma > 0,$$

(cf. (9.4.6)), le definizioni (9.5.11) forniscono:

$$I = \sigma, \quad II = 0, \quad III = 0. \quad (2.5.15)$$

quindi,

$$\lambda_1 = \sigma > 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (2.5.16)$$

È evidente che e_1 è l'autovettore corrispondente all'autovalore λ_1 . Infatti,

$$Te_1 = \sigma e_1.$$

All'autovalore 0, che è doppio (cioè, ha molteplicità algebrica pari a 2), corrispondono tutti i vettori del piano perpendicolare ad e_1 (Figura 9.16). Infatti, il sistema (9.5.13) prende in questo caso l'aspetto:

$$\begin{cases} Te_1 = 0, \\ n \cdot e_1 = 0, \\ n \cdot n = 1. \end{cases}$$

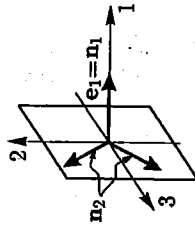


Figura 2.16

(b) Espressione

Poichè

(cf. (9.4.13)),

e quindi

è autovettore triplo, mentre ogni vettore n è autovettore, perchè(c) TAGLIO

In questo caso,

(cf. (9.4.18)), quindi

e l'equazione scalare ha l'aspetto

dove

Poichè gli autovalori sono distinti, c'è un'unica terna ortogonale di autovettori (a meno di un'inesenziale ambiguità di orientamento). Gli autovettori corrispondenti agli autovalori $\pm T$ si trovano risolvendo il sistema (9.5.13), la cui versione matriciale

$$\tau \begin{bmatrix} \mp 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \mp 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \mp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mp n_1 + n_2 = 0 \\ n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = T(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1), \quad T > 0$$

$$T = 0, \quad T = -T, \quad T = 0$$

$$T = T(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) = 0$$

$$T = T(e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) = -T$$

$$(2.5.21)$$

$$\begin{cases} \mp n_1 + n_2 = 0 \\ n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mp n_1 + n_2 = 0 \\ n_3 = 0 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

implica che

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), \quad n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), \quad n_3 = 0 \quad (2.5.22)$$

(Fig. 9.17).

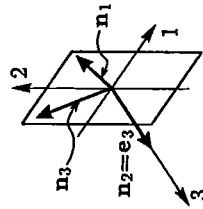


Figura 2.17

Scegliendo di orientare la terna degli autovettori come la terna degli assi coordinati, si ha quindi che

$$n_1 = e_1, \quad n_2 = e_2, \quad n_3 = e_3 \quad (2.5.23)$$

è l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda_0 = 0$. Un'applicazione della formula di rappresentazione (9.5.14) fornisce:

$$T_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.24)$$

Riprendendo adesso le considerazioni introduttive di questa sottosezione, quando T rappresenta il valore del campo di sforzo in un punto di un corpo materiale continuo, diremo che le direzioni dei suoi autovettori e tensioni corrispondenti autovettori lungo le direzioni principali, come anticipato, la materia è semplicemente tesa (o compressa) quanto stabiliscono le relative tensioni principali (Fig. 9.18).

perchè $\sigma = \bar{\sigma}_1 \otimes \bar{n}_1 + \bar{\sigma}_2 \otimes \bar{n}_2 + \bar{\sigma}_3 \otimes \bar{n}_3$

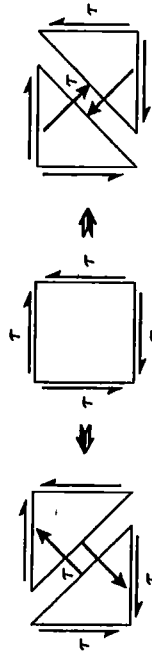


Figura 2.18: Direzioni di tensione principale massima e minima nel caso dello stato di sforzo di taglio.

OSSERVAZIONI. 1. Quando si cercano autovalori e autovettori di un tensore simmetrico a partire da una sua rappresentazione matriciale, è spesso utile ricordare che, se gli elementi di una riga di posto non diagonale sono entrambi nulli, allora l'elemento sulla diagonale principale e il versore dell'asse coordinato di indice

uguale all'indice di riga sono una coppia (autovalore, autovettore); viceversa, data un'autocoppia e scelto un asse nella direzione dell'autovettore, la matrice del tensore deve avere la riga corrispondente all'asse costituita da elementi nulli, salvo che sulla diagonale principale, dove va collocato l'autovalore. Se si può determinare un'autocoppia per ispezione diretta della matrice, si può di conseguenza abbassare di grado l'equazione secolare e trovarne facilmente le altre due radici, nonchè gli autovettori associati. Ad esempio,

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{22} & T_{23} \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow (T_{11}, e_1) \text{ è un'autocoppia di } T.$$

Viceversa,

$$Te_1 = T_{11}e_1 \Rightarrow [Te_1] = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T_{21} = T_{31} = 0.$$

2. Scelto un riferimento cartesiano con gli assi diretti come i suoi autovettori, un tensore simmetrico T ha una rappresentazione matriciale diagonale nella quale compaiono i suoi autovalori:

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.5.25)$$

In un riferimento di autovettori, gli invarianti ortogonali di T si calcolano in modo massimamente spedito:

$$\begin{aligned} I &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ II &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ III &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

3. Si chiamano linee isostatiche quelle curve la cui tangente in ogni punto coincide con una delle direzioni principali per quel punto: ad esempio, nel problema statico di trazione/compressione, i segmenti di retta paralleli alla direzione del carico formano la famiglia di linee isostatiche relative alla tensione principale massima (Fig. 9.19). Per un punto nel quale almeno due tensioni principali abbiano valori diversi passano almeno due linee isostatiche mutuamente ortogonali.

La natura tende a ottimizzare l'impiego di materia realizzando strutture che hanno, per la forma, l'ingombro e la robustezza desiderati, minima massa: così, ad esempio, in un osso 'lungo' (femore, omero, ...) le *trabecole* ossee tendono a disporsi lungo le linee isostatiche, in modo non troppo dissimile dalla situazione ideale di Figura 9.19. A questa osservazione sperimentale, di molto antecedente

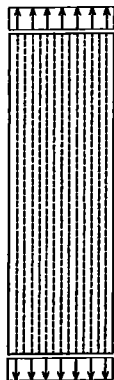


Figura 2.19: Isostatiche di trazione in un corpo cilindrico teso.

alla descrizione di Cauchy dello stato di sforzo, va associata l'osservazione più recente che molti organismi viventi si modellano e ri-modellano (si pensi, per restare nell'ambito dell'esempio delle ossa lunghe, alle attività combinate di *osteoclasti* e *osteoblasti*) a seguito di segnali che sono funzione dello stato di sforzo locale originato dal carico esterno da sostenere. La meccanica dei tessuti biologici è uno tra i tanti settori della conoscenza scientificamente organizzata dove ha importanza disporre di una descrizione dello stato di sforzo che consenta un completo e convincente resoconto formale delle osservazioni sul campo.

2.5.3 Tensione normale e tensione tangenziale

Se $t = Tn$ è il vettore tensione in un punto di un corpo continuo relativo alla giacitura di normale n , si dicono componente normale e componente tangenziale di t i vettori ottenuti come proiezioni ortogonali di t su, rispettivamente, una retta orientata parallela a n :

$$t_N := (n \otimes n)t = (t \cdot n)n, \quad (2.5.27)$$

e un piano perpendicolare a n :

$$t_T := (I - n \otimes n)t = t - (t \cdot n)n, \quad (2.5.28)$$

com'è ovvio,

$$t_N + t_T = t$$

(Figura 9.20).

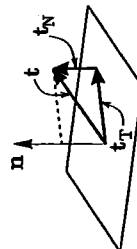


Figura 2.20

Le quantità scalari

$$\sigma_N := t_N \cdot n = t \cdot n, \quad \sigma_T := |t_T| = |t - (t \cdot n)n| \quad (2.5.29)$$

si dicono, rispettivamente, la tensione normale e la tensione tangenziale sulla giacitura di normale $\mathbf{n}$. La tensione normale misura l'azione di distacco (se positiva) o compenetrazione (se negativa) esercitata dalla parte $\oplus$ sulla parte $\ominus$; la tensione tangenziale, un numero reale non negativo, ne misura l'azione radente, senza tener conto del verso della componente tangenziale, che si sa per esperienza influente al fine di stimare il cimento nel materiale. Si osserverà che

$$\sigma_N = \mathbf{Tn} \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma_T^2 = |\mathbf{t}|^2 - \sigma_N^2, \quad (2.5.30)$$

ad esempio, se $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = T_{13}\mathbf{e}_1, \quad t_N = T_{33}\mathbf{e}_3, \quad t_T = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2, \quad \sigma_N = T_{33}, \quad \sigma_T = (T_{13}^2 + T_{23}^2)^{1/2}. \quad (2.5.31)$$

È di evidente interesse tecnico determinare gli estremi della funzione tensione normale al variare di $\mathbf{n}$. Come mostra la definizione, il valore di questa funzione, in quanto ottenuto come prodotto scalare di due vettori, è indipendente dal sistema di riferimento. Conviene allora far uso di un riferimento di autovettori, nel quale a $\mathbf{T}$ tocca la rappresentazione particolarmente semplice (9.5.25), e quindi

$$\sigma_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2. \quad (2.5.32)$$

La funzione da studiare è dunque

$$(n_1, n_2, n_3) \mapsto \sigma_N(n_1, n_2, n_3) = \lambda_1 n_1^2 + \lambda_2 n_2^2 + \lambda_3 n_3^2,$$

per

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Tenendo conto dell'ordinamento convenuto per gli autovalori in (9.5.12), possiamo scrivere

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \geq \sigma_N(n_1, n_2, n_3) \geq \lambda_3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \lambda_3. \quad (2.5.33)$$

Perciò, la massima (minima) tensione normale vale λ_1 (λ_3), e si esplica sulla giacitura di normale $\mathbf{e}_1$ ($\mathbf{e}_3$), dove induce un'azione di distacco (compenetrazione) se $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_3 < 0$).

La tensione tangenziale su una giacitura di assegnata normale $\mathbf{n}$ misura la massima azione radente sulla quella giacitura. Questa affermazione si può dimostrare vere risolvendo un problema di massimo che è un caso particolare del problema generale seguente:

dato il valore T del campo di sforzo, trovare le coppie $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ di direzioni ortogonali che rendono estrema la funzione

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto \sigma_T(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = |\mathbf{m} \cdot \mathbf{Tn}|, \quad (2.5.34)$$

che misura l'azione radente su quella coppia di giaciture.⁸

Questo problema di estremo si può risolvere con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, introducendo la funzione ausiliaria

$$\varphi(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mu_1, \mu_2, \mu_3) := |\mathbf{m} \cdot \mathbf{Tn}| + \mu_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mu_2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1) + \mu_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} - 1). \quad (2.5.35)$$

Se $(\lambda_i, \mathbf{n}_i)$, $i = 1, 2, 3$ sono tre autocopie di $\mathbf{T}$ (al solito, con gli autovalori ordinati come in (9.5.12)), si trova:

$$\max_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sigma_T(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3), \quad \text{per } \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_3), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_3) \quad (2.5.36)$$

(Esercizio 2).

Se la giacitura di normale $\mathbf{n}$ è fissata, la funzione ausiliaria da considerare diviene più semplice:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{m}; \mu_1, \mu_2) := |\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}| + \mu_1 \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mu_2 (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1), \quad \text{con } \mathbf{t} = \mathbf{Tn}. \quad (2.5.37)$$

Differenziando nella situazione di interesse (cioè, quando $\mathbf{m} \cdot \mathbf{t} \neq 0$), otteniamo:

$$\partial_{\mathbf{m}} \tilde{\varphi} = \text{sgn}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + \mu_1 \mathbf{n} + 2\mu_2 \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (2.5.38)$$

nonchè le equazioni dei vincoli:

$$\partial_{\mu_1} \tilde{\varphi} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \partial_{\mu_2} \tilde{\varphi} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - 1 = 0; \quad (2.5.39)$$

queste tre relazioni individuano gli argomenti $(\mathbf{m}; \mu_1, \mu_2)$ per i quali la funzione $\tilde{\varphi}$ è stazionaria. Tre immediate conseguenze di (9.5.38) e (9.5.39) sono:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})|\mathbf{t}|^2 + \mu_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) + 2\mu_2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}) &= 0, \\ \text{sgn}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})|\mathbf{t}|^2 + \mu_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) + 2\mu_2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

Combinando le prime due relazioni con la terza, si ha:

$$\text{sgn}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})|\mathbf{t}|^2 - \text{sgn}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})^2 - |\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}|(\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}) = 0,$$

ovvero

$$|\mathbf{t}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})^2 = |\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}|^2,$$

relazione che, in vista della Figura 9.20 e delle (9.5.30), stabilisce il risultato annunciato, che la massima azione radente su una giacitura data è pari alla tensione tangenziale.

⁸L'ordinamento della coppia $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ non è importante: infatti, dato che $\mathbf{T}$ è simmetrico, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{Tn} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Tm}$.

⁹Qui sgn indica la funzione su $\mathbb{R}$ il cui valore è il segno, la derivata della funzione 'valore assoluto':

$$|x|^2 = x^2 \Rightarrow 2|x| \frac{d|x|}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{d|x|}{dx} = \frac{x}{|x|} =: \text{sgn} x.$$

Capitolo 3

Polarità d'inerzia



La descrizione dello stato di sforzo nei punti della sezione trasversale di una trave coinvolge varie caratteristiche geometriche della sezione stessa. In questo capitolo raccogliamo il materiale preparatorio indispensabile per compiere quella descrizione.

3.1 Il tensore d'inerzia

Pur conservando la nomenclatura classica, che fa riferimento a generiche distribuzioni di massa su regioni dello spazio euclideo a tre dimensioni, ci occuperemo qui esclusivamente di *distribuzioni di area*, cioè, di misure di massa m su regioni $\mathcal{R}$ bidimensionali limitate e *piatte* - come lo sono le sezioni trasversali delle travi - la cui densità ρ rispetto alla misura di area a valga identicamente 1 su $\mathcal{R}$:

$$dm = \rho(P) da \equiv da, \quad P \in \mathcal{R};$$

di solito, $\mathcal{R}$ sarà un sottoinsieme aperto e connesso, con frontiera regolare a tratti, del piano perpendicolare ad un fissato versore e_3 . Per una regione $\mathcal{R}$ siffatta, il tensore d'inerzia è così definito:

$$J_O(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} ((p \cdot p)I - p \otimes p) da, \quad p \cdot e_3 = 0, \quad (3.1.1)$$

dove $p := P - O$ indica il vettore posizione del punto $P \in \mathcal{R}$ rispetto al polo O , un punto arbitrariamente scelto nel piano cui appartiene $\mathcal{R}$.

È evidente dalla definizione che ogni tensore d'inerzia è simmetrico e, quindi, ammette una rappresentazione spettrale del tipo (9.5.14). Un poco meno evidente, ma facile da provare, è che ogni tensore d'inerzia è positivo, cioè, che

$$v \cdot Jv > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \quad (3.1.2)$$

(qui, per brevità, $J \equiv J_O(\mathcal{R})$); ne segue che tutti gli autovalori di ogni tensore d'inerzia sono positivi.¹ Di conseguenza, la rappresentazione spettrale di J è speciale, per doppia ragione: da un lato, per definizione

$$J e_\alpha = J_\alpha e_\alpha, \quad J_\alpha = \int_{\mathcal{R}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) da = \frac{1}{2} \operatorname{tr} J \quad (3.1.3)$$

dove J_α è il momento d'inerzia polare della regione $\mathcal{R}$, l'autovettore corrispondente all'autovettore e_α ; dall'altro, tutti gli autovalori sono positivi e J_α è il grande tra essi. Si può dunque scrivere, in generale,

$$J = \sum_{\alpha=1,2} \gamma_\alpha g_\alpha \otimes g_\alpha + J_0 e_3 \otimes e_3, \quad J_0 = \gamma_1 + \gamma_2 > 0, \quad (3.1.4)$$

e fissare l'attenzione sul tensore d'inerzia ridotto

$$J_r = J - J_0 e_3 \otimes e_3. \quad (3.1.5)$$

Infatti, l'informazione riguardo alle proprietà d'inerzia di una regione $\mathcal{R}$ del tipo che ci interessa che J_r e J forniscono è la stessa; di qui in avanti, salvo avviso contrario, scriveremo J intendendo J_r .

Qui di seguito ci occuperemo di ottenere le formule di trasformazione delle componenti del tensore d'inerzia al variare del riferimento cartesiano impiegato per calcolarle: esamineremo prima le trasformazioni conseguenti a un cambiamento d'origine, poi quelle dovute ad una rotazione.

3.1.1 Teorema di Huyghens

Se si vuol valutare il tensore d'inerzia di $\mathcal{R}$ rispetto a un secondo polo O' , che differisca dal primo per d :

$$O - O' = d, \quad d \cdot e_3 = 0,$$

si indichi con $\mathbf{p}'$ il vettore posizione di $P \in \mathcal{R}$ rispetto al secondo polo:

$$\mathbf{p}'(P) = P - O' = P - O + \bar{O} - O' = \mathbf{p}(P) + d$$

¹ Per dimostrare (10.1.2), basta osservare che

$$\mathbf{v} \cdot J \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) I - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \mathbf{v} > 0$$

e che

$$\mathbf{v} \cdot ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) I - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \mathbf{v} = |\mathbf{p}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{p}| |\mathbf{v}|}.$$

Se (γ, g) è una coppia (autovettore, autovettore) di J , segue da (10.1.2) che

$$g \cdot J g = \gamma > 0.$$

3.1 Il tensore d'inerzia

e si indichi con s il vettore momento statico rispetto al primo polo:

$$s = s_O(\mathcal{R}) := \int_{\mathcal{R}} \mathbf{p} da. \quad (3.1.6)$$

Un'applicazione diretta della definizione (10.1.1) mostra che vale la formula di trasporto:

$$J' = J + m((d \cdot d) I - d \otimes d) + 2(d \cdot s) I - d \otimes s - s \otimes d, \quad (3.1.7)$$

dove

$$J' = J_O(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} ((\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}') I - \mathbf{p}' \otimes \mathbf{p}') da, \quad m = m(\mathcal{R}).$$

Quando si sceglie O coincidente con il centro di massa (o meglio, di area) G , si ha che

$$s = s_G(\mathcal{R}) = 0;$$

così dalla formula (10.1.7) si ricava il teorema di Huyghens:

$$J_O(\mathcal{R}) = J_G(\mathcal{R}) + m(\mathcal{R})((d \cdot d) I - d \otimes d). \quad (3.1.8)$$

OSSERVAZIONI. 1. Invece di cambiare il polo, si può immaginare che la regione $\mathcal{R}$ sia assoggettata a una traslazione rigida $-d$ nel proprio piano. Dopo una traslazione siffatta, il punto P occupa la posizione $\bar{P} = P + (-d)$; il vettore posizione di $\bar{P}$ rispetto ad O' è:

$$\mathbf{p}'(\bar{P}) = \mathbf{p}'(P) - d = \mathbf{p}(P).$$

2. La dimostrazione contenuta nella precedente nota a piè di pagina ci permette di stabilire immediatamente le proprietà di minimo dei momenti d'inerzia rispetto ad assi baricentrici, proprietà che sono insite nel teorema di Huyghens. Infatti, per ogni versore u , abbiamo da (10.1.2) e (10.1.8) che

$$u \cdot J_O(\mathcal{R}) u = u \cdot J_G(\mathcal{R}) u + m(\mathcal{R}) u \cdot ((d \cdot d) I - d \otimes d) u > u \cdot J_G(\mathcal{R}) u.$$

3. Tornando alla formula di trasporto (10.1.7), le rappresentazioni matriciali di J , d e s nel riferimento cartesiano ortogonale $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ sono:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}, \quad [d] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [s] = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.9)$$

con

$$S_x = \int_{\mathcal{R}} y da, \quad S_y = \int_{\mathcal{R}} x da.$$

Di qui, prendendo $O \equiv G$, la scrittura abituale del teorema di Huyghens:

$$J_x' = J_x + m\beta^2 \quad \text{etc.},$$

dove x' è l'asse per O' parallelo all'asse baricentrico x e distante $|\beta|$ da quest'ultimo.

Tensore di inerzia : $\mathcal{R}$ regione bi-dimensionale limitata ⁽⁵⁾
 e piana (come sez. trasv. di una trave)

J simmetrico

J definito positivo

$$J(\bar{e}_3) = j_0 \bar{e}_3 \quad \text{con} \quad j_0 = \frac{\text{momento di inerzia}}{\text{di una regione } \mathcal{R} \text{ rispetto}} \\ \text{ad un polo } O$$

$$j_0 = \frac{1}{2} \text{tr}(J)$$

Pertanto

$$J = \begin{pmatrix} j_x & -j_{xy} & 0 \\ -j_{xy} & j_y & 0 \\ 0 & 0 & j_0 \end{pmatrix}$$

j_x, j_y momenti di inerzia
affidi rispetto a 2 assi
 x e y passanti per il
 centro di massa di $\mathcal{R}$

j_{xy} = prodotto di inerzia
 rispetto ad una coppia di
 assi xy per il centro di massa
 di $\mathcal{R}$

Kronecker

$$j_x > 0$$

$$j_x j_y - j_{xy}^2 > 0$$

$$j_0 > 0$$

$$j_0 = j_x + j_y$$

Se δ_1 e δ_2 i 2 autovalori $\neq j_0$ di J

$$\delta_1 + \delta_2 = j_x + j_y = j_0$$

$\delta_1, \delta_2 > 0$ e $j_0 > 0$ è il più grande dei 3

$\Rightarrow \bar{e}_3$ è la direzione lungo cui la tensione
momento di inerzia è MASSIMA

Se

$$\tau_1 \rightsquigarrow \bar{g}_1 \text{ autovettore}$$

$$\tau_2 \rightsquigarrow \bar{g}_2 \quad "$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_1 \text{ e } \tau_2 \text{ momenti di} \\ \text{inerzia principali} \\ \bar{g}_1, \bar{g}_2 \text{ assi di inerzia} \\ \text{principali} \end{cases}$$

$$\text{Span} \{ \bar{g}_1, \bar{g}_2 \} = \text{Span} \{ \bar{e}_1, \bar{e}_2 \}$$

Eol

in base e

$$\Downarrow \bar{g}_1 \perp \bar{g}_2 \text{ sempre} \\ \text{per t.m. spettrale}$$

$$J = \begin{pmatrix} j_x & -j_{xy} & 0 \\ -j_{xy} & j_y & 0 \\ 0 & 0 & j_0 \end{pmatrix} = \overbrace{j_x \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + j_y \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + j_0 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3}^{\text{trazioni}} - \underbrace{j_{xy} (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1)}_{\text{taglio}}$$

in base $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$

$$J = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & j_0 \end{pmatrix} = \overbrace{\tau_1 \bar{g}_1 \otimes \bar{g}_1 + \tau_2 \bar{g}_2 \otimes \bar{g}_2 + j_0 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3}^{\text{trazioni}}$$

Tensore di inerzia ridotto

$$J_{\text{red}} = J - j_0 \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} j_x & -j_{xy} & 0 \\ -j_{xy} & j_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo identifichiamo con

$$\begin{pmatrix} j_x & -j_{xy} \\ -j_{xy} & j_y \end{pmatrix}$$

$$(*) \lambda^2 - (j_x + j_y) \lambda + (j_x j_y - j_{xy}^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{j_x + j_y \pm \sqrt{j_x^2 + j_y^2 + 2j_x j_y - 4j_x j_y + 4j_{xy}^2}}{2} =$$

$$= \frac{(j_x + j_y)}{2} \pm \frac{\sqrt{(j_x - j_y)^2 + 4j_{xy}^2}}{2} =$$

$$= \frac{(j_x + j_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(j_x - j_y)^2}{2} + j_{xy}^2}$$

$$(*) \text{ Prendo } \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ autovett. relativo a } j_{\xi} = \frac{(j_x + j_y)}{2} + \sqrt{\frac{(j_x - j_y)^2}{2} + j_{xy}^2}$$

$$\begin{pmatrix} j_x & -j_{xy} \\ -j_{xy} & j_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = j_{\xi} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$$

Basta una eq.

$$\begin{cases} j_x \xi_1 - j_{xy} \xi_2 = j_{\xi} \xi_1 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \end{cases} \quad \triangleq \Delta$$

$$\begin{cases} (j_x - j_{\xi}) \xi_1 - j_{xy} \xi_2 = 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \end{cases}$$

Vettore normale autosp. $\vec{m} = \begin{pmatrix} j_x - j_{\xi} \\ -j_{xy} \end{pmatrix}$

$\Downarrow$
generatore autosp

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} j_{xy} \\ j_x - j_{\xi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} =$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j_{xy}^2}{(j_x - j_{\xi})^2 + j_{xy}^2}} \\ \sqrt{\frac{(j_x - j_{\xi})^2}{(j_x - j_{\xi})^2 + j_{xy}^2}} \end{pmatrix} = \vec{\xi}$$

3.2. Dimostrare che, se per una rotazione di asse e_3 non banale ($\vartheta \neq 0$) accade che

$$J_r Q = Q J_r,$$

allora

$$J_r = \gamma(I - e_3 \otimes e_3).$$

Soluzione. Vista la rappresentazione spettrale di J_r :

$$J_r = \sum_{\alpha=1,2} \gamma_\alpha g_\alpha \otimes g_\alpha,$$

(cf. (10.1.4)), la condizione proposta si traduce nelle due relazioni scalari

$$\gamma_\beta = \sum_{\alpha=1,2} \gamma_\alpha (Q g_\alpha \cdot g_\beta)^2, \quad \beta = 1, 2,$$

che equivalgono all'unica relazione

$$\sin^2 \vartheta (\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

3.3. Teorema delle autocopie del tensore d'inerzia relativo ad una qualunque regione contenuta nel piano $\pi_\pi = 0$.

Soluzione. Basta cercare le autocopie di J_r . Per cominciare, si considera l'equazione

$$\begin{vmatrix} J_x - \lambda & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - (J_x + J_y)\lambda + (J_x J_y - J_{xy}^2) \quad (3.1.15)$$

e se ne calcolano le radici. Per trovare l'autovettore ξ ortogonale a e_3 corrispondente all'autovale

$$J_\xi = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} (J_x - J_\xi)\xi_1 - J_{xy}\xi_2 = 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \end{cases}, \quad (3.1.16)$$

ottenendo

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{J_{xy}^2}{(J_x - J_\xi)^2 + J_{xy}^2}}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{(J_x - J_\xi)^2}{(J_x - J_\xi)^2 + J_{xy}^2}}. \quad (3.1.17)$$

Per trovare poi l'autovettore η corrispondente all'autovale

$$J_\eta = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

3.1 Il tensore d'inerzia

il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} -J_{xy}\eta_1 + (J_y - J_\eta)\eta_2 = 0 \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1 \end{cases}; \quad (3.1.18)$$

è l'ortogonale

si ottiene:

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{(J_y - J_\eta)^2}{(J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{J_{xy}^2}{(J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2}}. \quad (3.1.19)$$

Interpretazione. J_x, J_y, J_{xy} sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi x, y e il prodotto d'inerzia. Osservazione. Le formule costruite nell'ultimo esercizio hanno una ben nota versione grafica, dovuta a O. Mohr (Figura 10.2). Il cerchio di Mohr relativo ad

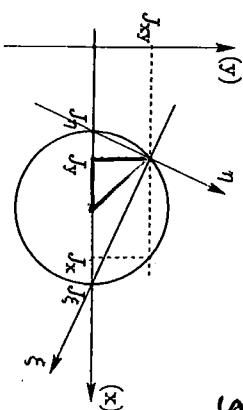


Figura 3.2

una figura piana, che abbia momenti d'inerzia assiali J_x, J_y e prodotto d'inerzia J_{xy} , rispetto ad una coppia di assi x, y per il centro di massa, si costruisce nel piano coordinato degli assi x, y , con

$$\text{centro} \equiv \left(\frac{J_x + J_y}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \text{raggio} = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (3.1.20)$$

È facile vedere che, una volta costruito questo cerchio, i momenti principali se ne ottengono come intercedute con l'asse orizzontale; e che gli assi principali hanno le direzioni delle rette mutuamente ortogonali che congiungono tali intercedute con il punto sul cerchio di coordinate (J_y, J_{xy}) .⁴ Precisamente, le autocopie sono:

$$\begin{aligned} (J_\xi, \xi), \quad \text{con } \xi &:= ((J_\xi - J_x)^2 + J_{xy}^2)^{-1/2} (J_{xy}e_1 - (J_\xi - J_x)e_2), \\ (J_\eta, \eta), \quad \text{con } \eta &:= ((J_y - J_\eta)^2 + J_{xy}^2)^{-1/2} ((J_y - J_\eta)e_1 + J_{xy}e_2), \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

dove ξ, η sono i versori degli assi d'inerzia principali centrali ξ, η .

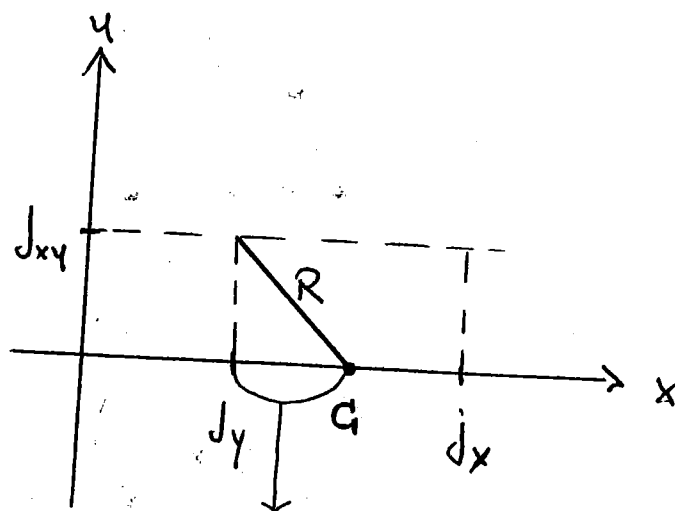
⁴Infatti, ad esempio, si deduce dalla figura che la retta che passa per i punti (J_y, J_{xy}) e $(J_\eta, 0)$ ha coefficiente angolare $J_{xy}/(J_y - J_\eta)$, pari al rapporto η_2/η_1 , fornito dalla prima delle (10.1.18); questa retta fornisce quindi la posizione dell'asse principale centrale η rispetto all'asse

$$\begin{aligned} \left(Z_x - \frac{J_x + J_y}{2} + Z_y^2 \right) &= \frac{J_x - J_y}{2} + J_{xy}^2 = D \quad Z_x = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \end{aligned}$$

Cerchio di Mohr

(58)

$$\left. \begin{array}{l} j_x > j_y \\ j_{xy} > 0 \end{array} \right\} \text{assumo}$$



$$\frac{j_x + j_y}{2} - j_y = \frac{j_x - j_y}{2}$$

$$C = \left(\frac{j_x + j_y}{2}, 0 \right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{j_x - j_y}{2} \right)^2 + j_{xy}^2}$$

Cerchio di Mohr

$$P: \left(X - \left(\frac{j_x + j_y}{2} \right) \right)^2 + Y^2 = R^2$$

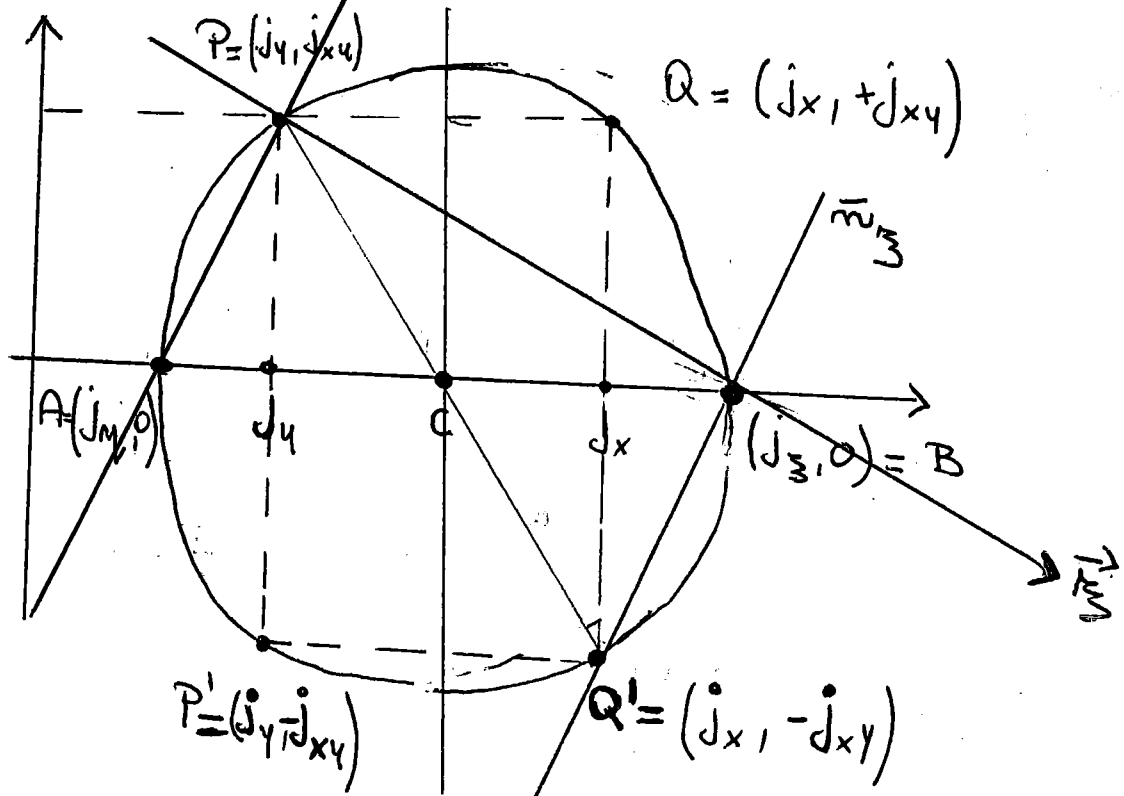
$$X^2 + Y^2 - (j_x + j_y)X + \left(\frac{j_x + j_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{j_x - j_y}{2} \right)^2 + j_{xy}^2$$

$$P \cap \{y=0\} = \left\{ X^2 - (j_x + j_y)X + \frac{1}{4} \left(\cancel{j_x^2 + j_y^2} + 2j_x j_y - \cancel{j_x^2 - j_y^2} \right) - j_{xy}^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ X^2 - (j_x + j_y)X + (j_x j_y - j_{xy}^2) = 0 \right\}$$

↓
Eq. secolare di J_{xz}

I momenti principali d'asse x. $\vec{n}$ sono le intersezioni di $\vec{n}$ con Σ (58C)



$$\vec{n}_1 \sim \begin{pmatrix} j_{xy} \\ j_x - j_y \end{pmatrix} \Downarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} j_x - j_y \\ -j_{xy} \end{pmatrix} \Downarrow \text{Congiungente } Q' \text{ con } B$$

$$e \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} j_y - j_x \\ j_{xy} \end{pmatrix} \Downarrow \text{Congiungente } P \text{ con } A \quad (ok)$$

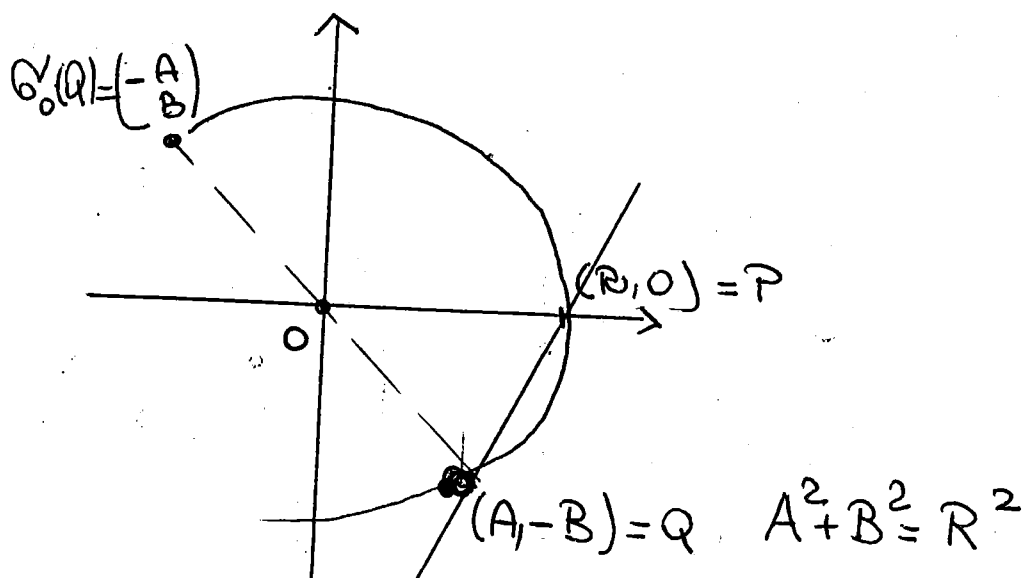
$$r: (j_x - j_y)(x - j_y) - j_{xy}(y) = 0$$

$$Q = G'_{C,y}(P) \quad G'_{C,y} = \text{simmetria rispetto asse orizzontale passante per } C \text{ e } \parallel \text{ asse } y$$

$$Q' = G'_{C,x}(Q) \quad G'_{C,x} = \text{simmetria rispetto asse orizzontale passante per } C \text{ e } \parallel \text{ asse } x$$

$$Q' = (G'_{C,x} \circ G'_{C,y})(P) = G'_C(P) \Rightarrow G'_C = \text{simmetria rispetto } C$$

A meno di isometria considero



$$G_0((A, -B)) = \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -A-B \\ B \end{pmatrix} = \overrightarrow{G_0(Q)P}$$

$$\begin{pmatrix} A-R \\ -B \end{pmatrix} = \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{G_0(Q)P} \cdot \overrightarrow{QP} =$$

$$\begin{pmatrix} -A-B \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A-R \\ -B \end{pmatrix} =$$

$$= -A^2 + \cancel{AR} - \cancel{AB} + R^2 - B^2 =$$

$$= R^2 - (A^2 + B^2) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_0(Q)P} \perp \overrightarrow{QP}$$

Conseguenza

$\vec{\gamma}$ è la congiungente di $P = (j_y, j_x u)$

con $B = (j_z, 0)$

Pecchio con il cerchio di Mohr

(580)

momenti principali

$$I \cap \{y=0\} = \begin{cases} A = (J_z, 0) \\ B = (J_y, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sim. rispetto a} \\ C \end{matrix}$$

assi di inerzia principali

$$\vec{J} \rightarrow \text{congiungo } A \text{ con } I = \begin{pmatrix} J_y \\ J_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\vec{J}_y \rightarrow \text{congiungo } B \text{ con } P = \begin{pmatrix} J_x \\ J_{xy} \end{pmatrix}$$

Otte nismo le autocoppie

$$\begin{pmatrix} J_z, \vec{J} \end{pmatrix} \text{ con } \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{(J_y - J_z)^2 + J_{xy}^2}} ((J_y - J_z) \vec{e}_1 + J_{xy} \vec{e}_2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(J_x - J_z)^2 + J_{xy}^2}} (J_{xy} \vec{e}_1 + (J_x - J_z) \vec{e}_2)$$

$$\begin{pmatrix} J_y, \vec{J}_y \end{pmatrix} \text{ con } \vec{J}_y = \frac{1}{\sqrt{(J_y - J_y)^2 + J_{xy}^2}} ((J_y - J_y) \vec{e}_1 + J_{xy} \vec{e}_2)$$

Esempio

(59)

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$J_0 = 5, \quad J_x = 2, \quad J_y = 3$$

$$J_x + J_y = J_0$$

$$J_{xy} = \sqrt{2}$$

Verificare che è un tensore di inerzia, assi di inerzia princ. e cerchio Mohr.

$$J_{xx} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \\ 6 - 4 = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{J_{xx} \text{ def. positivo}}$$

$\Rightarrow J$ è def. positivo. i.e., $\lambda_1, \lambda_2, J_0 > 0$

J è tensore di inerzia, infatti $J_0 = 5 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 3$.

$$\begin{aligned} P_{J_{xx}}(t) &= t^2 - \text{tr}(J_{xx})t + \det(J_{xx}) \\ &= t^2 - 5t + 4 \end{aligned}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

infatti $\lambda_1 = 4 > 0$, $\lambda_2 = 1 > 0$

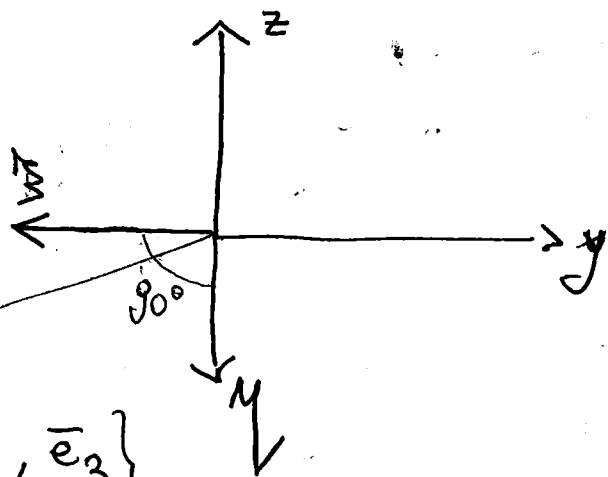
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 4 + 1 = 5 = \text{tr}(J_{xx}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(J)$$

Autovett. $J_3 = 4$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 4x \\ -2x + 3y = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x + 3y = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = y \end{cases}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ però in } \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{z}$$

$$\underline{J_M = 1} \Rightarrow \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



In tale riferimento $\{\vec{e}_1, \vec{\eta}, \vec{e}_3\}$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

olet e T_2 invarianti

Centro di Mohr

$$\left(\frac{4+1}{2}, 0 \right) = \left(\frac{5}{2}, 0 \right) = \left(\frac{J_x + J_y}{2}, 0 \right) = \left(\frac{J_x + J_M}{2}, 0 \right)$$

Raggio di Mohr

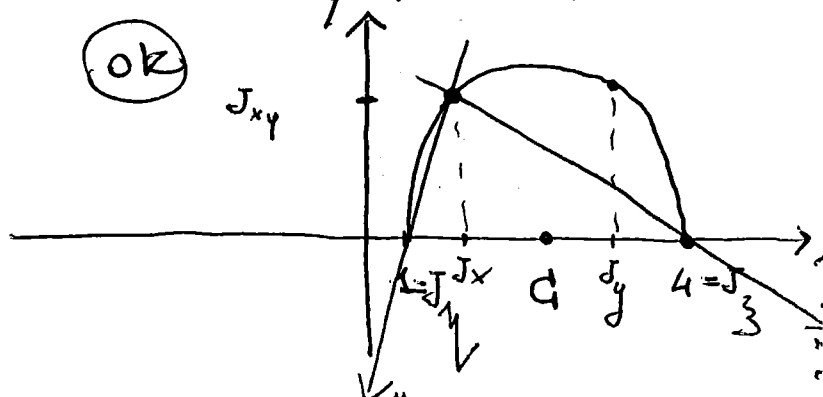
$$R_+ = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{3-2}{2} \right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

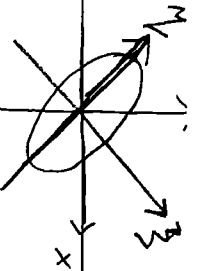
Cerchio di Mohr

$$\mathcal{C}: \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{17}{4}$$

$$(J_y, J_{xy}) = (3, 2) \in \mathcal{C} ? \quad \left(3 - \frac{5}{2} \right)^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad (\text{ok})$$

$$(J_x, J_{xy}) = (2, 2) \in \mathcal{C} \quad (\text{ok})$$





3.2 L'ellisse d'inerzia

Data una distribuzione di massa su una regione piana $\mathcal{R}$, e scelto un riferimento cartesiano ortogonale di assi x, y per il centro di massa di $\mathcal{R}$, le quantità

$$\rho_x(\mathcal{R}) := \sqrt{\frac{J_x(\mathcal{R})}{m}}, \quad \rho_y(\mathcal{R}) := \sqrt{\frac{J_y(\mathcal{R})}{m}} \quad (3.2.1)$$

sono, rispettivamente, il raggio d'inerzia di $\mathcal{R}$ relativo all'asse x e quello relativo all'asse y . In particolare,

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{m}} \quad (3.2.2)$$

si dicono raggi d'inerzia principali (centrali). L'ellisse d'inerzia è l'ellisse che, nel riferimento costituito dagli assi principali centrali, ha equazione canonica:

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1 \quad (3.2.3)$$

Questa conica ha un ruolo cruciale nella descrizione di tre corrispondenze di conica - l'una tra rette, le altre due tra punti e rette - che intervengono nello studio, che svolgeremo nel prossimo capitolo, dello stato di sforzo nelle sezioni di travi soggette simultaneamente a carichi assiali e flettenti. E per questo immediato interesse applicativo che compiamo qui di seguito uno studio elementare di tali particolari corrispondenze, il cui affascinante studio in astratto è compito della geometria proiettiva classica.

3.2.1 Polarità tra rette

L'ellisse d'inerzia subordina una relazione di coppia (detta in geometria proiettiva di congruenza), vogliamo sperare senza l'intenzione di portare un attacco all'istituto della famiglia) tra rette appartenenti al fascio che ha per sostegno il centro di massa.

Facciamo riferimento alla Figura 10.3, sia $\bar{x}$ una retta generica di quel fascio, di equazione

$$\eta = (\tan \alpha) \xi \quad \tan \alpha = m \quad (3.2.4)$$

La retta del fascio parallela alla tangente in P (o in E) all'ellisse d'inerzia è la retta $\bar{x}$ di equazione

$$\eta = (\tan \alpha) \xi \quad (3.2.5)$$

che taglia l'ellisse in due punti dove la tangente è parallela alla retta $\bar{x}$. Semplici sviluppi di geometria analitica, che troviamo opportuno confinare nell'osservazione sottostante, mostrano che il coefficiente angolare della retta $\bar{x}$ è tale da

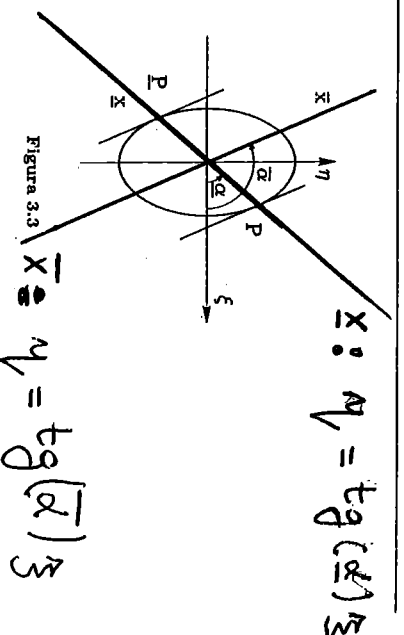


Figura 3.3

soddisfare la relazione di coniugio annunciata, che è:

$$\tan \alpha \tan \bar{\alpha} = \frac{\rho_\xi^2}{\rho_\eta^2} \quad (3.2.6)$$

Nel linguaggio della geometria proiettiva, una relazione di questo tipo si dice una polarità involutoria; le rette di una coppia ($\bar{x}, \bar{\alpha}$) che la soddisfatti si dicono coniugate rispetto all'ellisse (10.2.3). È facile vedere che (10.2.6) istituisce una corrispondenza biunivoca e senza eccezioni $\bar{x} \leftrightarrow \bar{\alpha}$ tra rette del fascio per G che tagliano gli assi ξ, η risultano coniugate reali (se ve ne fossero, dovrebbe valere la relazione impossibile $\tan^2 \alpha + \rho_\xi^2/\rho_\eta^2 = 0$).

OSSERVAZIONE. Al fine di dimostrare vera la relazione (10.2.6), ricordiamo anzitutto un ben noto risultato di geometria analitica: due rette, di equazioni $y = \kappa_1 x + y_1$ e $y = \kappa_2 x + y_2$, sono ortogonali se e solo se i loro coefficienti angolari verificano la condizione

$$\kappa_1 \kappa_2 = -1 \quad (3.2.7)$$

(anche questa relazione, naturalmente, è una polarità involutoria). Ora, la retta $\bar{x}$ taglia l'ellisse in una coppia di punti $P \equiv (a, b)$, $E \equiv (a', b')$, le cui coordinate, che si trovano risolvendo il sistema (10.2.3)-(10.2.4), verificano la condizione

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \tan \alpha.$$

D'altra parte, dato che il vettore gradiente in un punto (a, b) dell'ellisse è:

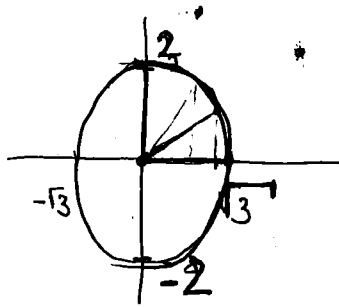
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{\rho_\eta^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} = \frac{2\eta}{\rho_\xi^2} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{\rho_\eta^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} = \frac{2\eta}{\rho_\xi^2} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{\rho_\eta^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} = \frac{2\eta}{\rho_\xi^2}$$

la normale all'ellisse in quel punto è una retta di equazione

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \eta} \eta = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{2\xi}{\rho_\eta^2} \xi + \frac{2\eta}{\rho_\xi^2} \eta = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{2\xi}{\rho_\eta^2} \xi + \frac{2\eta}{\rho_\xi^2} \eta = \mathcal{E}$$

Esempio

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$



$$X = (1, 3)$$

$$\sqrt{3} \sim 1,73 \dots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{9}{4} = \frac{4+27}{12} = \frac{31}{12} > 1 \Rightarrow X \text{ esterno } \mathcal{E}$$

$$s_x: \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}y = 1$$

$$\frac{3}{4}y = 1 - \frac{1}{3}x \Rightarrow d(0, s_x) = \frac{12}{\sqrt{97}} \sim \frac{12}{9,84} = 1,2$$

$$d(0, s_x) = \frac{|1 \cdot 0 - \frac{4}{3}|}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{16+81}{144}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{97}}{12}} = \frac{12}{\sqrt{97}} \quad \begin{cases} x=t \\ y = \frac{4}{3}(1-\frac{t}{3}) \end{cases}$$

$$\frac{t^2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} \left(1 - \frac{t}{3}\right)^2 = 1$$

$$P_{\mathcal{E}} \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d(0, P_{\mathcal{E}}) &= \sqrt{3 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{3 \cos^2 t + 3 \sin^2 t + \sin^2 t} = \\ &= \sqrt{3 + \sin^2 t} \end{aligned}$$

poichè $0 \leq \sin^2 t \leq 1$

$$\sqrt{3} \leq d(0, P_{\mathcal{E}}) \leq 2 \Rightarrow \forall P_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$$

$$d(0, P_{\mathcal{E}}) > d(0, s_x) \Rightarrow s_x \text{ interno}$$

e quindi, per soddisfare (10.2.7), la tangente deve avere il coefficiente angolare

$$\tan \bar{\alpha} = -\frac{a}{\rho_n^2} \frac{b}{\rho_\xi^2} = -\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\rho_\xi^2}{\rho_n^2}; \quad \Delta$$

questo risultato conclude la dimostrazione.

$$\tan(\bar{\alpha}) \cdot \tan(\alpha) = -\frac{\rho_\xi^2}{\rho_n^2} \quad (*)$$

3.2.2 Polarità tra punti e rette

Si definisce centro relativo all'asse x il punto X di coordinate

$$\begin{cases} x(X) = \frac{\int_R xy \, dm}{\int_R y^2 \, dm} = \frac{J_{xy}}{J_x} \\ y(X) = \frac{\int_R y^2 \, dm}{\int_R y \, dm} = \frac{m(R)y(G)}{J_x} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

L'ellisse d'inerzia subordina una relazione di coniugio anche tra rette ($\equiv$ assi) e punti ($\equiv$ centri), relazione che è definita dall'equazione:

$$\frac{\xi(X)}{\rho_n^2} \xi + \frac{\eta(X)}{\rho_\xi^2} \eta + 1 = 0, \quad \leftarrow \text{N.B. segue } (*)$$

nella quale $\xi(X), \eta(X)$ sono le coordinate del punto X nel riferimento principale centrale; in quel riferimento, (10.2.9) è l'equazione dell'asse congiugato al centro.
X. La corrispondenza così istituita è biunivoca, senza eccezioni. Infatti, assegnato il sistema di masse che occupa la regione R, sono determinati i relativi raggi principali d'inerzia ρ_ξ, ρ_η ; fissato X, cioè, fissate le coordinate $(\xi(X), \eta(X))$, ad X corrisponde l'unica retta R di equazione (10.2.9). Per converso, fissata una retta del piano di equazione

$$a_1 \xi + a_2 \eta + 1 = 0, \quad (3.2.10)$$

cioè, fissati i coefficienti (a_1, a_2) , resta univocamente determinato X, il punto di coordinate

$$\xi(X) = a_1 \rho_n^2, \quad \eta(X) = a_2 \rho_\xi^2.$$

Non vi sono coppie (x, X) autoconjugate reali o, altrimenti detto, assi che contengano il proprio centro: se una ve ne fosse, dovrebbe valere la condizione

$$\frac{\xi^2(X)}{\rho_n^2} + \frac{\eta^2(X)}{\rho_\xi^2} + 1 = 0, \quad (3.2.11)$$

che non può evidentemente essere soddisfatta in R.

OSSERVAZIONI. 1. Anche la corrispondenza $R \leftrightarrow X$ tra rette e punti del piano è, nel linguaggio della geometria proiettiva, una polarità involutoria, nella quale si corrispondono il polo X e la polare R.

X polo e R polare

3.2 L'ellisse d'inerzia

2. Siano (x, X) e (y, Y) due coppie polo-polare, sicché, mentre la prima coppia soddisfa (10.2.9), la seconda soddisfa l'analoga relazione

$$\frac{\xi(Y)}{\rho_n^2} \xi + \frac{\eta(Y)}{\rho_\xi^2} \eta + 1 = 0. \quad (3.2.12)$$

Allora,

il punto Y appartiene alla retta R, il punto X appartiene alla retta R.

come subito si verifica esprimendo le condizioni di appartenenza per mezzo di (10.2.9) e (10.2.12).

3. Deduciamo l'equazione di coniugio (10.2.9). Anzitutto, impieghiamo ben note formule di trasformazione coordinate per stabilire le seguenti relazioni, che forniscono le coordinate del punto X nel riferimento principale centrale in funzione di quelle nel riferimento equiorientato di origine O e assi x, y:

$$\begin{cases} \xi(X) = \cos \varphi (x(X) - x(G)) - \sin \varphi (y(X) - y(G)), \\ \eta(X) = \sin \varphi (x(X) - x(G)) + \cos \varphi (y(X) - y(G)) \end{cases} \quad (3.2.13)$$

(si faccia riferimento alla Fig. 10.4 per verificare che si deve prendere $\xi \equiv x'$,

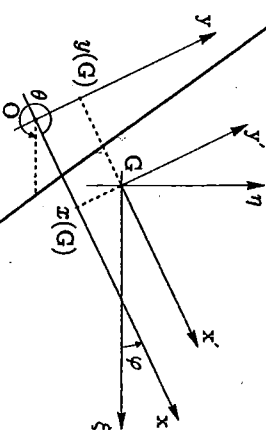


Figura 10.4

$\eta \equiv y'$ e $\vartheta = 2\pi - \varphi$; e che, così facendo, quelle formule implicano, ad esempio, che:

$$\begin{cases} \xi(X) = \cos \varphi (x(X) - x(G)) - \sin \varphi (y(X) - y(G)) + \alpha, \\ 0 = \cos \varphi (x(X) - x(G)) + \sin \varphi (y(X) - y(G)) + \alpha, \end{cases}$$

donde, eliminando α si ottiene la prima delle (10.2.13).

Nella Fig. 10.4, la coppia di assi centrali (x', y') è parallela e equiorientata alla coppia (x, y) . Usiamo in successione le (10.2.8), (10.1.8) (con (x', y') in luogo di (x, y) , e viceversa) e il teorema di Steiner (con (ξ, η) in luogo di (x, y) , per cui $J_{\xi\eta} = 0$), per ottenere che

$$x(X) - x(G) = \frac{J_{xy} - m x(G) y(G)}{m y(G)} = \frac{J_{x'y'}}{m y(G)} = \sin \varphi \cos \varphi \frac{\rho_\xi^2 - \rho_n^2}{y(G)}. \quad (3.2.14)$$

In modo del tutto analogo, da (10.2.8)₂, (10.1.8)₁ e dal teorema di Steiner deduciamo anche che

$$y(X) - y(G) = \frac{J_x - m y^2(G)}{m y(G)} = \frac{J_x}{m y(G)} = \frac{\cos^2 \varphi \rho_\eta^2 + \sin^2 \varphi \rho_\eta^2}{y(G)} \quad (3.2.15)$$

Combinando le ultime due relazioni con (10.2.13), ne ricaviamo che:

$$\begin{cases} \xi(X) = \sin \varphi \cos^2 \varphi \frac{\rho_\xi^2 - \rho_\eta^2}{m y(G)} - \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi \rho_\xi^2 + \sin^3 \varphi \rho_\eta^2}{m y(G)} = -\frac{\rho_\eta^2}{y(G)} \sin \varphi, \\ \eta(X) = \sin^2 \varphi \cos \varphi \frac{\rho_\xi^2 - \rho_\eta^2}{m y(G)} - \frac{\cos^3 \varphi \rho_\xi^2 + \sin^2 \varphi \cos \varphi \rho_\eta^2}{y(G)} = -\frac{\rho_\xi^2}{y(G)} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Dunque, le coordinate del centro X relativo all'asse x nel riferimento principale centrale sono:

$$\begin{cases} \xi(X) = -\frac{\rho_\eta^2}{y(G)} \sin \varphi, \\ \eta(X) = -\frac{\rho_\xi^2}{y(G)} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.2.17)$$

D'altra parte, se si scrive l'equazione dell'asse x in quel riferimento nella forma (10.2.10), la figura mostra che le costanti a_1, a_2 debbono valere:

$$a_1 = -\frac{\sin \varphi}{y(G)}, \quad a_2 = \frac{\cos \varphi}{y(G)},$$

ovvero, tenendo conto delle (10.2.17),

$$a_1 = \frac{\xi(X)}{\rho_\eta^2}, \quad a_2 = \frac{\eta(X)}{\rho_\xi^2}; \quad (3.2.18)$$

con queste relazioni, l'equazione (10.2.10) prende il desiato aspetto dell'equazione (10.2.9).

3.2.3 Antipolarità tra punti e rette

Consideriamo una polarità particolare, la polarità di inerzia, che ad ogni punto X fa corrispondere la sua retta polare X rispetto al centro di massa. Se indichiamo con $\bar{x}$ questa applicazione e con π la polarità $x \leftrightarrow X$ studiata nella sottosezione precedente, vediamo che l'applicazione composta

$$\bar{x} \circ \pi = \bar{x} \circ \pi(X) = \bar{x}(X) = X$$

trasforma la retta polare di un punto X in un punto che coincide con X, e viceversa. La corrispondenza tra rette e punti del piano, in breve, una polarità (Fig. 10.5);⁵ a

3.2 L'ellisse d'inerzia

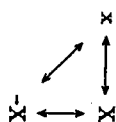


Figura 3.5

ci si riferisce come a una antipolarità mentre il punto X viene detto l'antipolo di -X.

La relazione tra antipolo e polare è descritta dalla modificazione ovvia della relazione (10.2.9) tra polo e polare, vale a dire,

$$(3.2.19)$$

Dunque, la retta polare di un punto X è la retta X.
Dunque, la retta polare di una retta X è il punto X.
Inoltre, due coniugate reali (in altre parole, due punti coniugati propri, antipoli) tutte e sole le tangenti all'ellisse centrale d'inerzia (10.2.5).
Nella Figura 10.6, consideriamo la retta x, il suo centro X e la sua parallela $\bar{x}$.

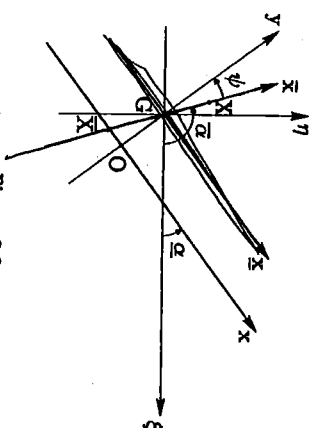


Figura 3.6

per il centro di massa, osserviamo che quest'ultima retta, a causa di (10.2.9), ha coefficiente angolare

$$\tan \alpha = -\frac{\xi(X) \rho_\xi^2}{\eta(X) \rho_\eta^2};$$

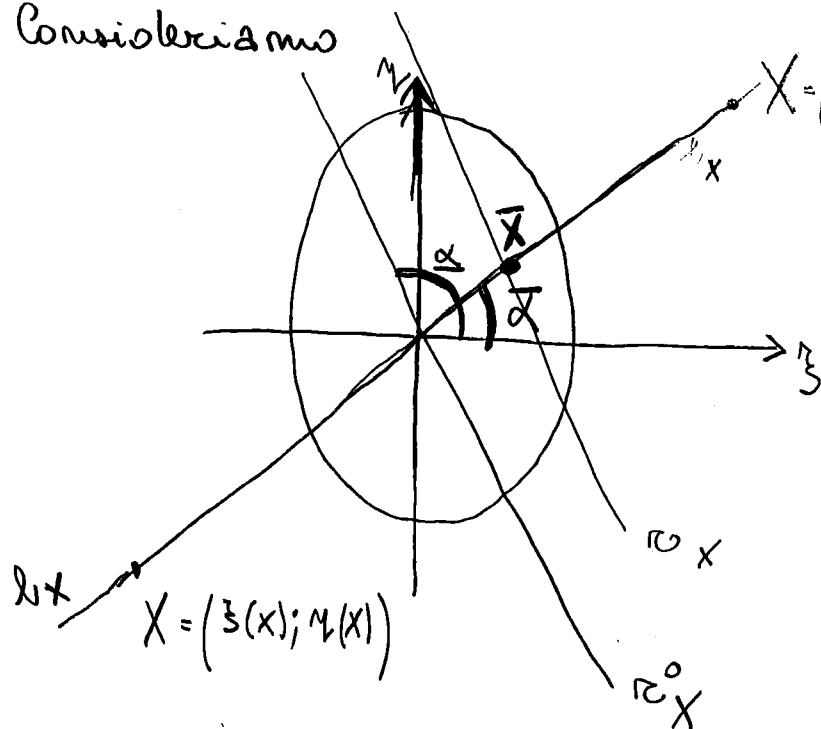
e che la retta $\bar{x}$ per G e per X ha coefficiente angolare

$$\tan \bar{\alpha} = \frac{\eta(X)}{\xi(X)}.$$

Dunque, le rette $\bar{x}$ e $\bar{x}$ sono coniugate nel senso della polarità espressa dalla (10.2.6).

⁵Questa è appunto l'equazione della polare di $-X \equiv (-\xi(X), -\eta(X))$.

Consideriamo



$$X = (\xi(X), \eta(X)) \in r_X: \frac{\xi(X)}{S_\eta^2} \xi + \frac{\eta(X)}{S_\xi^2} \eta = 1$$

r_X^0 = retta per centro di massa O

$$\frac{\xi(X)}{S_\eta^2} \xi + \frac{\eta(X)}{S_\xi^2} \eta = 0$$

coeff. ang. $r_X^0 = \tan(\alpha) = - \frac{S_\xi^2}{S_\eta^2} \cdot \frac{\xi(X)}{\eta(X)}$

La retta l_X congiungente X e centro di massa O ha coeff. ang

$$\tan(\bar{\alpha}) = \frac{\eta(X)}{\xi(X)}$$

Ma allora

$$\tan(\bar{\alpha}) \cdot \tan(\alpha) = - \frac{S_\xi^2}{S_\eta^2}$$

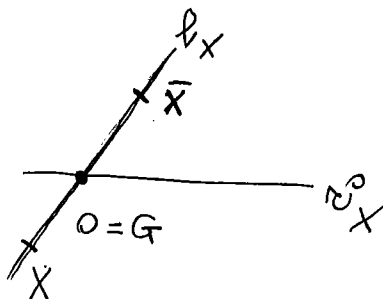
che era la condizione di Polarit  retta-retta definita da $\mathcal{E}$

Conseguenza: r_X^0 e l_X sono coniugate fra loro mediante $\mathcal{E}$

Sia $\bar{X} = l_X \cap r_X^0$

Nel riferimento

$$c_{l_X}(\bar{X}) \cdot c_{r_X^0}(X) = -k^2$$



4
Pertanto:

se la retta π_X trasla parallelamente a se stessa $\Rightarrow$
cambiamo le posizioni sulla retta l_X sia di X che di $\bar{X}$
Poichè

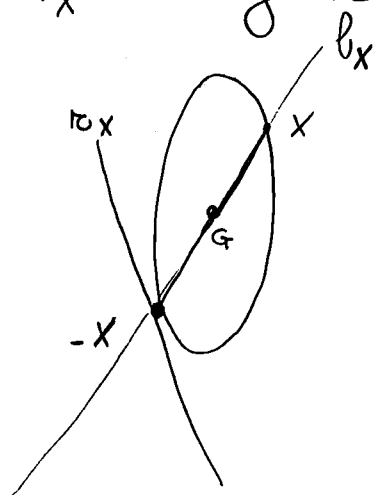
$$c_{e_X}(\bar{X}) = \frac{-k^2}{c_{e_X}(X)}$$

se $X \rightarrow G$ cioè $\pi_X \rightarrow \pi_X^0$ allora $\bar{X}$ tende al
punto all'infinito di l_X e viceversa

In altre parole, se G centro di massa si considera
come CENTRO o polo, l'asse (o la sua polare)
è la retta impropria del piano (ξ, η)

inoltre se π_X è tangente a $\mathcal{E} \Rightarrow \bar{X} = -X$

Pertanto GX misura il raggio di inerzia relativo
all'asse π_X^0 quando le distanze si valutano nelle
direzione l_X coniugata a π_X^0 .



In altri termini, l'ellisse
di inerzia è il diagramma
polare dei raggi di inerzia
centrali

Esercizio 1

(64)

Sia $A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ la matrice di equilibrio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

- (1) Stabilire che tipo di equilibrio definisce A .
- (2) Determinare lo spazio dei carichi compatibili, scrivendo l'espressione del generico carico ammissibile.
- (3) Utilizzando la forma algebrica del teorema dei lavori virtuali, determinare l'espressione del generico carico incompatibile con la struttura.

Svolg.

$$(1) \det(A) = 10 - 12 - (40 - 42) = 52 - 52 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \Rightarrow \text{Equilibrio } \underline{\underline{\text{degenero}}}$$

$$(2) \bar{F}_{\text{comp.}} \in \text{Im}(A) \Rightarrow \bar{F}_{\text{comp.}} = \begin{pmatrix} 2t + s \\ 3t \\ 2t + 4s \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 14x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{rg}(A) = 2 \Rightarrow \text{le eq. indep. di } A^T \bar{x} = \bar{0} \text{ sono 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = t \\ x_1 = -4t \\ -8t + 3x_2 + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4t \\ 3x_2 = 6t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\text{Infatti } \text{Im}(A)^\perp = \text{Span}\{\bar{w}\} \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

Sia

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Lin.}$$

Determinare l'asse della parte antisimmetrica di T e descrivere l'isomorfismo assiale.

soluz

$$\begin{aligned} W_T &= \frac{1}{2} (T - T^t) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ -6 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5/2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{L'asse di } W_T \text{ è } \ker W_T = \begin{cases} 3y - \frac{5}{2}z = 0 \\ -3x - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = -\frac{5}{2}z \\ z = -3x \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ 3y = -\frac{5}{2} \cdot 3t \\ z = -3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t \\ z = -3t \end{cases}$$

$$\ker W_T = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{\omega} \wedge \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 2 & -5 & -6 \\ x & y & z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6y - 5z \\ - \\ - \end{pmatrix} \Rightarrow \omega_T = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\cong} W_T$$

Sia S la sfera di centro O e raggio 1

Sia $\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ e sia T un tensore di sforzo che opera su S

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Determinare il vettore tensione $\vec{T}(P)$ relativo alla sezione tangenziale di S in P .

2) Calcolare le componenti normale e tangenziale di $\vec{T}(P)$

3) Determinare i valori di tensione normale e tangenziale.

Soluzione

$$1) \vec{m}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}(P) = T(\vec{m}_P) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

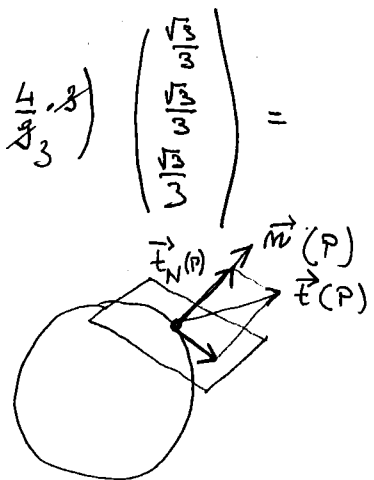
$$2) \vec{t}_N(P) = (\vec{m}(P) \otimes \vec{m}_P)(\vec{t}(P)) =$$

$$= (\vec{t}(P) \cdot \vec{m}(P)) \vec{m}(P) = \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{11}{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \frac{11}{9} \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_T(P) = \vec{t}(P) - \vec{t}_N(P) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{11}{9}\sqrt{3} \\ \frac{11}{9}\sqrt{3} \\ \frac{11}{9}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{9}\sqrt{3} \\ \frac{1}{9}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$



$$3) \quad \alpha_N = \vec{t}(P) \cdot \vec{m}(P) = \vec{t}_N(P) \cdot \vec{m}(P) = \frac{11}{3} \vec{m}(P) \cdot \vec{m}(P) = \frac{11}{3}$$

$$\boxed{\alpha_N = \frac{11}{3}}$$

$$\alpha_T^2 = \|\vec{t}_T\|^2 = \vec{t}_T \cdot \vec{t}_T =$$

$$= \|\vec{t} - \vec{t}_N\| \cdot \|\vec{t} - \vec{t}_N\| = \|\vec{t}\|^2 - 2 \vec{t} \cdot \vec{t}_N + \|\vec{t}_N\|^2$$

$$= \|\vec{t}\|^2 - 2 \vec{t} \cdot (\alpha_N \vec{m}) + \vec{t}_N \cdot \vec{t}_N =$$

$$= \|\vec{t}\|^2 - 2 \alpha_N \cdot \alpha_N + (\alpha_N \vec{m}) \cdot (\alpha_N \vec{m}) =$$

$$= \|\vec{t}\|^2 - 2 \alpha_N^2 + \alpha_N^2 \cdot \|\vec{m}\|^2 =$$

$$= \|\vec{t}\|^2 - \alpha_N^2$$

$$\alpha_T^2 = \|\vec{t}\|^2 - \alpha_N^2 =$$

$$= \left(3 + \frac{16}{3} + \frac{16}{3}\right) - \frac{121}{9} = \frac{9+32}{3} - \frac{121}{9} = \frac{41}{3} - \frac{121}{9} =$$

$$= \frac{123 - 121}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{\alpha_T = + \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria - CCS Edilizia ed Edile/Architettura

Geometria ed Algebra Tensoriale: complementi
Docente F. Flamini, Roma, Tor Vergata

ESERCIZI DI RIEPILOGO PROPOSTI

Esercizio. Sia $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ la matrice di equilibrio

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia $\bar{f} \in \mathbb{R}^3$ un vettore di forze attive, di coordinate rispetto alla base canonica

$$\text{e di } \mathbb{R}^3 \bar{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire se $\bar{f}$ e' un carico compatibile per la struttura la cui matrice di equilibrio e' A .
- (ii) In caso di risposta affermativa al punto (i), scrivere l'espressione del generico vincolo $\bar{v} \in \mathbb{R}^4$ necessario per mantenere l'equilibrio con la sollecitazione $\bar{f}$ data (i.e. per risolvere il problema $A\bar{v} = \bar{f}$).
- (iii) Dedurre il tipo di equilibrio indotto da A .

Esercizio. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore di trazione

$$T = 5\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1.$$

- (i) Stabilire se T e' semidefinito positivo oppure indefinito.
- (ii) Determinare la traccia ed il determinante del tensore T .
- (iii) Scrivere l'equazione scalare (o polinomio caratteristico) di T .

Esercizio 3. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore del secondo ordine

$$T = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2.$$

- (i) Stabilire se T rappresenta il valore del campo di sforzo in un punto di un corpo materiale continuo.
- (ii) In caso affermativo, trovare gli invarianti ortogonali di T e l'equazione secolare (o polinomio caratteristico) di T .
- (iii) Trovare infine le tensioni principali e le direzioni principali di T .

Esercizio. Si consideri l'applicazione lineare di equilibrio $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + z \\ x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare la matrice di equilibrio $A := A_F$ che rappresenta F nelle rispettive basi canoniche.
- (ii) Determinare l'espressione della generica sollecitazione autoequilibrata (o vincolo scarico), cioè in equilibrio con carichi esterni nulli.
- (iii) Determinare l'espressione del generico carico compatibile; dedurre infine il tipo di equilibrio indotto da A .

Esercizio. Siano dati i 4 vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e le relative diadi $\bar{x} \otimes \bar{y}, \bar{v} \otimes \bar{w} \in Lin$.

- (i) Determinare le relative matrici rappresentative delle due diadi.
- (ii) Calcolare $(\bar{x} \otimes \bar{y})(\bar{v}), (\bar{v} \otimes \bar{w})(\bar{x})$.
- (iii) Stabilire se le diadi $\bar{x} \otimes \bar{y}$ e $\bar{v} \otimes \bar{w}$ possono essere ortogonali fra loro.

Esercizio. Sia data in $\mathbb{R}^3$ il tensore parametrico del secondo ordine

$$T = 4\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \lambda \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro.

- (i) Determinare i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui T risulti essere un tensore di taglio nel piano (x, z) .
- (ii) Per i valori trovati al punto (i), calcolare gli invarianti ortogonali, le tensioni principali e le direzioni principali di T .
- (iii) Scrivere l'espressione del tensore T nella base f di $\mathbb{R}^3$ costituita dai versori che generano le direzioni principali e determinare la relazione matriciale che lega l'espressione matriciale del tensore T in base canonica e e nella base f delle direzioni principali.

Esercizio. Si consideri l'applicazione lineare di equilibrio $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ 4y - 3x \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare la matrice di equilibrio $A := A_F$ che rappresenta F nelle rispettive basi canoniche, e dedurre il tipo di equilibrio indotto da A .

- (ii) Determinare la matrice cinematica B associata ad A .
 (ii) Utilizzando il Teorema dei lavori virtuali (formulazione in ALGEBRA LINEARE), utilizzare B per determinare lo spazio dei carichi non compatibili di A .

Esercizio. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i due vettori $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e si consideri

la diade $\bar{a} \otimes \bar{b}$.

- (i) Senza utilizzare il calcolo esplicito della rappresentazione matriciale di $\bar{a} \otimes \bar{b}$, giustificare per quale motivo $\bar{a} \otimes \bar{b}$ non potrà MAI essere un tensore contenuto in *Skew*, cioè nello spazio dei tensori antisimmetrici del II ordine su $\mathbb{R}^3$.
 (ii) Scrivere l'espressione matriciale dell'endomorfismo associato alla diade $\bar{a} \otimes \bar{b}$.
 (iii) Trovare tutti e soli i vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ per cui risulti che la diade $\bar{a} \otimes \bar{x} \in \text{Sym}$, i.e. risulti essere un tensore simmetrico del II ordine.

Esercizio. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore di sforzo

$$T = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + 2(\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1) - \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + 3(\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2) + 6\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3.$$

- (i) Determinare la parte sferica di T .
 (ii) Determinare la parte Deviatorica di T .
 (iii) Decomporre T come somma di stati di sforzo elementari di pressione, trazione e taglio.

Esercizio. Sia $A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo di equilibrio la cui matrice corrispondente nella base canonica è

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -14 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire se A definisce un equilibrio ISOSTATICO.
 (ii) In caso di risposta negativa al punto (i), determinare lo spazio dei carichi compatibili, scrivendo l'espressione del generico carico siffatto.
 (iii) Utilizzando il Teorema dei lavori virtuali (formulazione in ALGEBRA LINEARE), determinare l'espressione del generico carico incompatibile con la struttura.

Esercizio. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore del secondo ordine

$$T = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + 2\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 - 3\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 - 4\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + 4\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + 2\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + 6\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3.$$

- (i) Determinare la decomposizione ortogonale di $T \in \text{Lin}$ come

$$T = S_T + M_T,$$

dove S_T e' la parte simmetrica di T e M_T e' la parte antisimmetrica di T , i.e. $S_T \in Sym$ e $M_T \in Skew$.

(ii) Determinare il rango sia di S_T che di M_T .

(iii) Descrivere la corrispondenza assiale tra il tensore M_T ed il suo asse ω_{M_T} , calcolando esplicitamente le coordinate di un vettore generatore di tale asse.

Esercizio. Si denoti con S la sfera di centro l'origine di $\mathbb{R}^3$ e raggio 1. Sia

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \in S \text{ e sia}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice rappresentativa di un tensore degli sforzi nel punto $P \in S$.

(i) Determinare il vettore tensione $\vec{t} = \vec{t}(P)$ dato dal tensore T nel punto P .

(ii) Calcolare la componente normale $\vec{t}_N$ e quella tangenziale $\vec{t}_T$ di $\vec{t}$.

(iii) determinare i valori di tensione normale σ_N e di tensione tangenziale σ_T .

Esercizio. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore del II ordine

$$J = 2\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + (\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1) + 2\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3.$$

(i) Verificare che J e' un tensore di inerzia, determinando i valori J_x, J_y, J_{xy} e J_0 dei rispettivi momenti.

(ii) determinare l'espressione del tensore di inerzia ridotto J_r e l'equazione secolare ridotta di J (equivalentemente di J_r), gli autovalori ed i versori generatori degli assi di inerzia principali centrali.

(iii) Denotati con ξ e η le coordinate nel sistema del riferimento ortogonale individuato dagli assi di inerzia principali centrali, determinare i raggi di inerzia principali centrali e l'equazione cartesiana dell'ellisse di inerzia $\mathcal{E}$ per una massa $m = 2$. Disegnare $\mathcal{E}$ nel suo riferimento.

Esercizio. Sia $A_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la matrice parametrica di equilibrio

$$A_t := \begin{pmatrix} t & -1 \\ 2t & 1 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro variabile.

(i) Stabilire per quali valori di t il carico $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ risulti essere compatibile per la struttura.

(ii) Per i valori di t trovati al punto (i), stabilire che tipo di equilibrio induce la matrice A_t .

(iii) Determinare l'espressione del generico vincolo $\bar{v}$ compatibile (i.e. che risolve $A_t \bar{v} = \bar{b}$) per i valori di t determinati al punto (i).

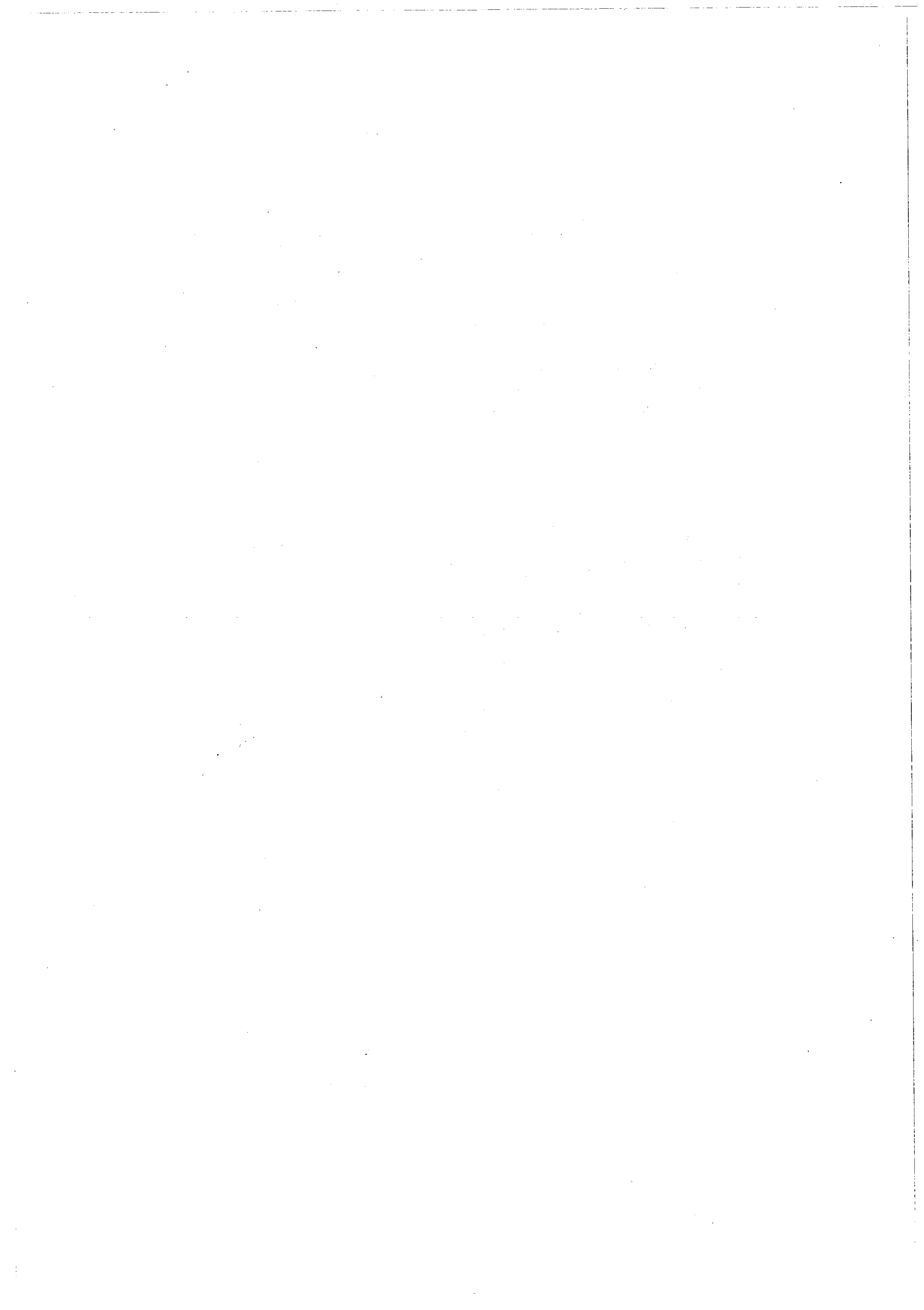
Esercizio. Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i due vettori $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Determinare generatori per $Ker(\bar{a} \otimes \bar{b})$.
- (ii) Determinare generatori di $Im(\bar{a} \otimes \bar{b})$.
- (iii) Calcolare la componente simmetrica e la componente antisimmetrica della diade $\bar{a} \otimes \bar{b} \in Lin$.

Esercizio. Sia dato in $\mathbb{R}^3$ il tensore del secondo ordine

$$T = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2.$$

- (i) Stabilire se T rappresenta il valore del campo di sforzo in un punto di un corpo materiale continuo.
- (ii) In caso affermativo, trovare gli invarianti ortogonali di T e l'equazione secolare (o polinomio caratteristico) di T .
- (iii) Trovare infine le tensioni principali e le direzioni principali di T .



Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Facolta' di Ingegneria Edile ed Edile/Architettura

Complementi di Geometria Proiettiva

Docente F. Flamini

POLARITA' DEFINITA DA UNA CONICA

§ 1 **Spazio vettoriale duale.** Ricordiamo che dato V spazio vettoriale, lo *spazio vettoriale duale di V* , denotato con V^* , e' lo spazio vettoriale

$$Hom(V, \mathbb{R})$$

delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$ (equiv., dei *funzionali lineari* su V).

Se V ha dimensione $n + 1$, una volta fissata una qualsiasi base di V , lo spazio $V^* = Hom(V, \mathbb{R})$ e' lo spazio vettoriale delle matrici $(n + 1) \times 1$, una cui base e' data quindi dalle matrici riga

$$(1) \quad \bar{e}_i^* = (0, \dots, 0, 1^{posto\ i}, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Pertanto anche $\dim(V^*) = n + 1$.

In particolare, se $e = \bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ indica la base prefissata su V , cosicche' in base e si ha

$$\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1^{posto\ j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq j \leq n$$

allora si ha

$$\bar{e}_i^*(\bar{e}_j) = \delta_{i,j}, \quad 0 \leq i, j \leq n$$

dove $\delta_{i,j}$ e' il *delta di Kronecher*.

Definizione. 1 La base $e^* := \bar{e}_0^*, \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$ di V^* si chiama la *base duale della base e di V* .

Osservazione 2 In termini piu' concreti, una volta fissata la base e , la base e^* si puo' vedere naturalmente determinata dai **funzionali lineari coordinata**, cioe' si puo' porre

$$\bar{e}_i^* = X_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

dove X_i e' la coordinata od indeterminata che, come funzionale lineare associa ad un qualsiasi vettore $\bar{v} \in V$ la sua componente i -esima rispetto alla base e , i.e. se $\bar{v} = \sum_{i=0}^n v_i \bar{e}_i$ allora

$$X_i(\bar{v}) := v_i \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

§ 2 Piano proiettivo duale. Sia ora V di dimensione 3. Fissiamo una base $e = \bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2$ di V , cosicche' $V \cong \mathbb{R}^3$. Ad ogni vettore $\bar{a} = a_0 \bar{e}_0 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 \in V$ resta naturalmente associato un funzionale lineare $f_{\bar{a}} \in (\mathbb{R}^3)^*$ definito in tal modo:

$$f_{\bar{a}}(\bar{v}) := \langle \bar{a}, \bar{v} \rangle = a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2, \quad \forall \bar{v} = v_0 \bar{e}_0 + v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\langle, \rangle$ denota l'usuale prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$. In altre parole, si ha

$$f_{\bar{a}} = a_0 \bar{e}_0^* + a_1 \bar{e}_1^* + a_2 \bar{e}_2^* \in (\mathbb{R}^3)^*$$

od equivalentemente, da **Osservazione 2**,

$$f_{\bar{a}} = a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2.$$

Possiamo considerare un'applicazione lineare

$$\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$$

definita da

$$\delta(\bar{a}) := f_{\bar{a}}.$$

Essa e' chiaramente un isomorfismo di spazi vettoriali, dato che e' un'applicazione lineare iniettiva tra due spazi vettoriali della stessa dimensione (ricordare Teorema di Nullita' piu' Rango). In particolare, grazie all'isomorfismo δ , abbiamo che

$$\mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^*.$$

Tuttavia **in generale** non sussiste un isomorfismo tra V e V^* (precisamente sussiste se V e' euclideo); in altre parole l'isomorfismo δ e' *non-canonical*, dipende i.e. dalla scelta della base e di V .

D'ora in poi, consideriamo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Per costruzione, ricordiamo che $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$, con V un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione 3

$$(2) \quad \mathbb{P}(V) = \frac{V \setminus \{\bar{0}\}}{\sim},$$

dove $\sim$ denota la relazione di equivalenza definita dalla proporzionalita' (equiv. collinearita') di vettori in V .

Definizione. 3 Definiamo il piano proiettivo duale di $\mathbb{P}^2$ come

$$(\mathbb{P}^2)^* := \mathbb{P}((\mathbb{R}^3)^*)$$

nel senso di (2). L'isomorfismo δ sopra definito induce un isomorfismo di passaggio al duale, che indichiamo con

$$\tilde{\delta} : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

definito da

$$\tilde{\delta}([\bar{a}]) := [\delta(\bar{a})] = [f_{\bar{a}}], \quad \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^3.$$

Osservazione 3 Si noti invece che esiste un'isomorfismo *canonico*, i.e. indipendente dalla scelta di una base, tra

$$V \cong (V^*)^*.$$

Definiamo infatti

$$\alpha : V \rightarrow (V^*)^*$$

ponendo, per ogni $\bar{v} \in V$, $\alpha(\bar{v}) \in V^*$ che e' quel funzionale lineare su V^* tale che, per ogni $f \in V^*$ si abbia

$$\alpha(\bar{v})(f) := f(\bar{v}) \in \mathbb{R}.$$

Passando in termini proiettivi, si ha in tal modo anche un isomorfismo canonico

$$\mathbb{P}^2 \cong (\mathbb{P}^2)^{**} := \mathbb{P}((V^*)^*).$$

Osservazione 4 Da Osservazione 2 sappiamo che ogni elemento di $f_{\bar{a}} = a_0 \bar{e}_0^* + a_1 \bar{e}_1^* + a_2 \bar{e}_2^* \in (\mathbb{R}^3)^*$ puo' essere riguardato come una forma (cioe' un funzionale lineare)

$$a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

dove X_0, X_1, X_2 sono le indeterminate associate alla base duale di e . Pertanto, il "punto" $[a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ si puo' identificare alla retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana

$$(3) \quad a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0.$$

In altre parole, dato il punto $A = [a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2$, ad esso corrisponde il "punto" $[a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ che non e' altro che una classe di equivalenza di funzionali lineari su $\mathbb{R}^3$; in altre parole un generico elemento rappresentato da $[a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2]$ e' un funzionale lineare della forma

$$\lambda a_0 X_0 + \lambda a_1 X_1 + \lambda a_2 X_2$$

per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Questo "punto" $[a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ si puo' interpretare come la retta $r_A \subset \mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana (3). La retta r_A si chiama *retta duale del punto A*.

Osserviamo allora che $(\mathbb{P}^2)^*$ e' il luogo geometrico che **parametrizza** tutte le rette di $\mathbb{P}^2$, i.e. ogni punto di $(\mathbb{P}^2)^*$ individua una ed una sola retta di $\mathbb{P}^2$ e viceversa. In definitiva ad ogni "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ e' associata una ed una sola retta r_A di $\mathbb{P}^2$ il cui punto duale e' $A \in \mathbb{P}^2$ e viceversa.

Esempio Sia $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore espresso nelle sue componenti rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^3$. Il funzionale lineare

$$f_{\bar{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

che questo vettore definisce e' l'elemento di $(\mathbb{R}^3)^*$ dato da

$$f_{\bar{a}} = \bar{e}_0^* + 3\bar{e}_2^* = X_0 + 3X_2$$

che e' quell'applicazione lineare che ad ogni vettore $\bar{v} = v_0\bar{e}_0 + v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 \in \mathbb{R}^3$ associa lo scalare $f_{\bar{a}}(\bar{v}) = v_0 + 3v_2$. Ad esempio, se $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, si ha $f_{\bar{a}}(\bar{v}) = 2 + 3 \cdot 5 = 17 \in \mathbb{R}$. Ora, il vettore $\bar{a}$ individua il punto $A = [1, 0, 3] \in \mathbb{P}^2$ mentre il funzionale $f_{\bar{a}}$ individua il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ (cioe' una classe di proporzionalita' di funzionali lineari) dato da $[f_{\bar{a}}] = [X_0 + 3X_2]$. Tale punto si identifica alla retta $r_A : X_0 + 3X_2 = 0$ di $\mathbb{P}^2$ che e' la retta duale al punto A .

Abbiamo il seguente

Teorema. 5 (*Teorema di dualita'*) Date r_A e r_B due rette di $\mathbb{P}^2$ posto $C = r_A \cap r_B \in \mathbb{P}^2$, la retta r_C duale del punto C e' la retta congiungente i punti A e B di $\mathbb{P}^2$ che sono i punti duali di r_A ed r_B , rispettivamente.

Dimostrazione. Supponiamo che $r_A : a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0$ e che $r_B : b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0$. Il punto di intersezione $C = r_A \cap r_B$ ha coordinate omogenee date dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \\ b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto $C = [a_1b_2 - b_1a_2, b_0a_2 - a_0b_2, a_0b_1 - a_1b_0] \in \mathbb{P}^2$. Per quanto discusso precedentemente, la retta r_C duale di C ha equazione cartesiana

$$(4) \quad r_C : (a_1b_2 - b_1a_2)X_0 + (b_0a_2 - a_0b_2)X_1 + (a_0b_1 - a_1b_0)X_2 = 0.$$

Ricordiamo che, per quanto definito precedentemente, il punto A duale di r_A (resp., B duale di r_B) ha coordinate omogenee $[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2$ (resp. $[b_0, b_1, b_2] \in \mathbb{P}^2$). La dimostrazione si conclude osservando semplicemente che l'equazione cartesiana della retta congiungente i punti A e B si determina considerando

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

che fornisce proprio l'equazione (4). $\square$

Corollario. 6 *Con le notazioni precedenti, dati $A, C \in \mathbb{P}^2$ si ha $A \in r_C$ se e solo se $C \in r_A$.*

§ 3 Correlazione del piano proiettivo. In questo paragrafo consideriamo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, e $(\mathbb{P}^2)^*$ con coordinate omogenee $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$. Sia $A = (a_{ij}) \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ una matrice, $0 \leq i, j \leq 2$. Consideriamo la seguente relazione matriciale

$$(5) \quad \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*;$$

in altri termini

$$(6) \quad \lambda \alpha_0 = \sum_{i=0}^2 a_{0i} x_i, \quad \lambda \alpha_1 = \sum_{i=0}^2 a_{1i} x_i, \quad \lambda \alpha_2 = \sum_{i=0}^2 a_{2i} x_i.$$

Definizione. 7. *Si dice che (5) definisce una correlazione*

$$\varphi = \varphi_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

che non e' altro che una proiettivita' che ad un punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ associa il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^$ di coordinate omogenee $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \in (\mathbb{P}^2)^*$ come in (6), dove $x_i = p_i$, $0 \leq i \leq 2$. Equivalentemente, φ associa al punto P la retta di $\mathbb{P}^2$ di equazione cartesiana*

$$(7) \quad \left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) X_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) X_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) X_2 = 0.$$

La correlazione si dira' non degenerare (rispettivamente, degenerare) se la matrice A ha rango 3 (rispettivamente, ha rango minore di 3).

Osservazione 8 Sia $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e sia r la retta come in (7) ad esso correlata. Osserviamo che P in generale non appartiene ad r . Supponiamo che r

passi per un punto $Q = [q_0, q_1, q_2] \in \mathbb{P}^2$; in particolare

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i}p_i\right) q_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i}p_i\right) q_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i}p_i\right) q_2 = 0.$$

Tenendo presente (5), quest'ultima eguaglianza si puo' scrivere anche in forma matriciale

$$0 = (q_0, q_1, q_2) \begin{pmatrix} \lambda\alpha_0 \\ \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \end{pmatrix} = (q_0, q_1, q_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Poiche' pero' quest'ultima eguaglianza e' fra due numeri reali, la stessa eguaglianza sussiste se applichiamo la trasposizione di matrici. In altri termini, vale anche

$$0 = {}^t0 = {}^t \left((q_0, q_1, q_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right).$$

Poiche' e' ben noto che la trasposizione di matrici inverte l'ordine delle matrici, questa ultima eguaglianza diventa

$$0 = (p_0, p_1, p_2) {}^tA \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che allora il punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e' correlato con il "punto" di $(\mathbb{P}^2)^*$ di coordinate omogenee date da

$$\left[{}^tA \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\sum_{j=0}^2 a_{j0}q_j, \sum_{j=0}^2 a_{j1}q_j, \sum_{j=0}^2 a_{j2}q_j \right] \in (\mathbb{P}^2)^*.$$

Si trova cosi' un'altra correlazione

$${}^t\varphi : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*$$

detta la *correlazione trasposta* di φ , dato che e' determinata dalla matrice tA che e' la trasposta della matrice che determina la correlazione φ . In altri termini:

SIGNIFICATO GEOMETRICO se $Q = [q_0, q_1, q_2] \in \mathbb{P}^2$ appartiene alla retta di equazione cartesiana

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i}p_i\right) X_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i}p_i\right) X_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i}p_i\right) X_2 = 0$$

allora il punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ appartiene alla retta di equazione cartesiana

$$\left(\sum_{j=0}^2 a_{j0} q_j \right) X_0 + \left(\sum_{j=0}^2 a_{j1} q_j \right) X_1 + \left(\sum_{j=0}^2 a_{j2} q_j \right) X_2 = 0$$

Esempio Sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la correlazione non-degenere determinata dalla matrice (invertibile)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il punto P e' correlato alla retta determinata da $\varphi_A(P) = \left[A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] =$

$[9, 1, 11] \in (\mathbb{P}^2)^*$ cioe' la retta di equazione cartesiana

$$s : 9X_0 + X_1 + 11X_2 = 0.$$

Il punto $Q = [0, 11, -1] \in \mathbb{P}^2$ manifestamente appartiene alla retta s . Poiche'

$${}^tA := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da quanto discusso precedentemente deve discendere che il punto P deve appartenere alla retta ℓ individuata dalla correlazione trasposta ${}^t\varphi$, cioe' da

$$\varphi_{{}^tA}(Q) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = [-2, 8, 0] \in (\mathbb{P}^2)^*.$$

Infatti la retta ℓ ha quindi equazione cartesiana

$$\ell : X_0 - 4X_1 = 0$$

ed in effetti e' facile verificare che $P \in \ell$.

§ 4 Polarita' del piano proiettivo definita da una conica.

Definizione. 9. Se in (5) la matrice A e' simmetrica e non-degenere, allora la correlazione individuata da A ,

$$\varphi = \varphi_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^*,$$

si chiama polarita' di $\mathbb{P}^2$. La retta $\varphi(P)$ correlata ad un punto P si chiama la polare di P , mentre il punto P si chiama il polo di $\varphi(P)$.

Osservazione 10 Essendo A simmetrica, e' chiaro che $\varphi = {}^t\varphi$. Inoltre, in generale il polo P non appartiene alla sua retta polare e, viceversa, in generale una retta non passa per il suo polo.

Esempio Sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il punto P ha come retta polare la retta individuata da $\varphi_A(P) = \left[A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = [9, 3, 4] \in (\mathbb{P}^2)^*$ cioe' la retta di equazione cartesiana

$$9X_0 + 3X_1 + 4X_2 = 0.$$

Sostituendo dentro questa equazione le coordinate di P e' facile verificare che P non appartiene alla sua polare.

Osservazione 11 Poiche' per ipotesi A e' non degenera, l'equazione (5) si puo' risolvere rispetto alle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i.e.

$$(8) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Poiche' siamo in ambito proiettivo, si puo' moltiplicare ambo i membri della precedente eguaglianza per lo scalare non-nullo $\det(A)$ ottenendo cosi'

$$(9) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \gamma A^* \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\det(A)} \in \mathbb{R}^*,$$

dove A^* e' la *matrice aggiunta* di A , cioe' la trasposta della matrice dei *cofattori* (equiv. dei *complementi algebrici*) di A . Ma poiche' A e' simmetrica, anche A^* e' simmetrica, quindi coincide direttamente con la matrice dei *cofattori* (equiv. dei *complementi algebrici*) di A .

In definitiva (9) definisce quindi una polarita'

$$\varphi^* : (\mathbb{P}^2)^* \rightarrow \mathbb{P}^2$$

detta la *polarita' duale* di φ , cioe' quella polarita' che ad una qualsiasi retta r di $\mathbb{P}^2$ (corrispondente ad un punto $[r] \in (\mathbb{P}^2)^*$) associa il suo *polo* $\varphi^*([r]) \in \mathbb{P}^2$.

Notare che date due rette r e s e due punti P e Q , allora

- (i) la retta r e' la polare di P se $[r] = \varphi(P)$, e

(ii) il punto Q e' il polo di s se $Q = \varphi^*([s])$.

Notare inoltre che per costruzione si ha ovviamente

$$\varphi^* \circ \varphi = Id_{\mathbb{P}^2} \quad \varphi \circ \varphi^* = Id_{(\mathbb{P}^2)^*},$$

i.e. se la retta r e' la polare di P allora il polo di r e' P ; analogamente se Q e' il polo di una retta s , allora la polare di Q e' proprio s .

Esempio Dall'esercizio precedente, sia $P = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ e sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che la retta polare di P era la retta r di equazione cartesiana

$$9X_0 + 3X_1 + 4X_2 = 0,$$

pertanto $[r] = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] = [9, 3, 4] \in (\mathbb{P}^2)^*$. Calcoliamo ora la matrice dei cofattori di A , che e':

$$A^* := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare $\varphi^*([r])$ basta fare il conto

$$A^* \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

che stabilisce che il polo di r e' il punto $P = [-12, -3, -15] = [4, 1, 5] \in \mathbb{P}^2$ come e' ovvio che fosse.

Proposizione. 12. *Siano P e Q due punti di $\mathbb{P}^2$. Se P appartiene alla polare di Q , allora Q appartiene alla polare di P .*

Dimostrazione. Discende direttamente da Osservazione 8 con Significato Geometrico e dal fatto che A e' simmetrica. $\square$

Definizione. 13. *Due punti P e Q tali che ciascuno appartenga alla polare dell'altro si dicono coniugati (o reciproci) rispetto alla polarita' φ .*

Analogamente due rette r e s tali che ciascuna passi per il polo dell'altra si dicono coniugate (o reciproche) rispetto alla polarita' φ^ .*

Un punto P che appartiene alla sua polare si dice autoconiugato ed una retta che passi per il suo polo si dice autoconiugata.

Osservazione 13 Da quanto definito discende chiaramente che per trovare graficamente la polare di un punto P basta tracciare la retta passante per i poli di due qualsiasi rette del fascio di centro P . Viceversa, per trovare il polo di una retta r , basta prendere due punti distinti su r , determinare le loro polari e poi farne l'intersezione.

Osservazione 14 Se $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$ e' un punto autoconiugato, dal fatto che $a_{ij} = a_{ji}$, $0 \leq i, j \leq 2$, allora dal Significato Geometrico vuol dire che

$$\left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} p_i \right) p_0 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{1i} p_i \right) p_1 + \left(\sum_{i=0}^2 a_{2i} p_i \right) p_2 = 0.$$

Questa eguaglianza si puo' scrivere in termini matriciali come

$$(p_0, p_1, p_2) A \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Pertanto, il luogo dei punti autoconiugati rispetto ad una polarita' φ definita da una matrice simmetrica A e' dato dai punti di una *conica* (proiettiva) $\Gamma = \Gamma_A$ di equazione cartesiana

(10)

$$(X_0, X_1, X_2) A \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = a_{00}X_0^2 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + 2a_{12}X_1X_2 = 0.$$

In altre parole, la conica Γ e' la conica che ha come matrice simmetrica associata la matrice A che definisce la polarita' φ . Posto

$$F(X_0, X_1, X_2) = a_{00}X_0^2 + a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + 2a_{12}X_1X_2$$

e' immediato verificare che

$$(11) \quad (X_0, X_1, X_2) \cdot A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right).$$

dove

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right) = \left(\sum_{i=0}^2 a_{0i} X_i, \sum_{i=0}^2 a_{1i} X_i, \sum_{i=0}^2 a_{2i} X_i \right).$$

Con questa interpretazione, dato un punto $P = [p_0, p_1, p_2] \in \mathbb{P}^2$, la sua retta polare e' la retta di equazione cartesiana

$$p_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + p_1 \frac{\partial F}{\partial X_1} + p_2 \frac{\partial F}{\partial X_2} = 0.$$

Utilizzando le espressioni delle derivate parziali precedentemente calcolate, l'equazione della polare diventa anche

$$(12) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial X_0} \right) |_P X_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_1} \right) |_P X_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial X_2} \right) |_P X_2 = 0,$$

dove come consuetudine con il simbolo $\left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right) |_P$ si denota la valutazione della derivata parziale i -esima nel punto P , $0 \leq i \leq 3$. In particolare, si ha il seguente immediato risultato:

Corollario. 15 *Se Γ e' una conica a punti reali e $P \in \Gamma$, allora la polare di P non e' altro che la retta tangente a Γ in P .*

Osservazione 16 Osserviamo che, per come abbiamo definito le polarita', la matrice A e' sempre non-degenere (cioe' di rango 3). Pertanto la conica Γ e' sempre una conica generale. Pertanto il Corollario 15 fornisce questa interessante interpretazione geometrica della polare nel caso in cui Γ sia a punti reali. In effetti, essendo non degenere ed a punti reali, ogni punto di Γ ammette una ben determinata retta tangente. Effettivamente ci sono anche estensioni di queste nozioni a coniche (e quindi polarita') degeneri, ma non fanno parte dell'obiettivo di questi brevi note.

Esempio Dall'esercizio precedente, sia φ la polarita' determinata dalla matrice (invertibile e simmetrica)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la conica Γ dei punti autoconiugati rispetto a φ e' la conica proiettiva di equazione cartesiana

$$X_0^2 + 2X_0X_2 + 3X_1^2 = 0.$$

Poiche' il punto $[0, 0, 1] \in \Gamma$, dal fatto che A e' non degenere e dalla classificazione proiettiva delle coniche, Γ e' necessariamente una conica proiettiva generale a punti reali. Calcoliamo

$$(X_0, X_1, X_2) \cdot A = (X_0 + X_2, 3X_1, X_0)$$

e contemporaneamente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right) = (2(X_0 + X_2), 6X_1, 2X_0)$$

che verifica - come doveva essere - la relazione (11).

Notiamo che

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_0}|_P, \frac{\partial F}{\partial X_1}|_P, \frac{\partial F}{\partial X_2}|_P \right) = (1, 0, 0).$$

In altre parole troviamo - come doveva essere - che Γ e' una conica non singolare in P dato che il gradiente del polinomio omogeneo $F(X_0, X_1, X_2)$ che definisce l'equazione cartesiana di Γ non si annulla in P . Piu' precisamente il gradiente di F non si annulla in nessun punto del piano proiettivo, dato che porre

$$(2(X_0 + X_2), 6X_1, 2X_0) = (0, 0, 0)$$

ha come unica soluzione $X_0 = X_1 = X_2 = 0$ che non corrisponde a nessun punto di $\mathbb{P}^2$. A fortiori, ritroviamo che la conica Γ , non essendo singolare in alcun punto, e' sicuramente generale.

La retta polare di P e' quindi la retta di equazione

$$X_0 = 0.$$

Verifichiamo in due modi differenti che tale retta e' la tangente alla conica Γ nel punto P .

- (1) Intersecando la conica Γ con la retta di equazione $X_0 = 0$, si determina il sistema

$$3X_1^2 = 0 = X_0$$

che ha come soluzione il punto $P = [0, 0, 1]$ contato con molteplicita' di intersezione uguale a 2. Essendo P un punto non singolare di Γ questo necessariamente comporta che $X_0 = 0$ e' la retta tangente a Γ in P .

- (2) Per calcolare la tangente a Γ in P , conviene passare a coordinate affini. Ovviamente $P \in A_2 \subset \mathbb{P}^2$. In questa carta affine P diventa il punto origine e la conica assume l'equazione

$$f(s, t) = s^2 + 2s + t^2 = 0,$$

dove come usuale $s = \frac{X_0}{X_2}, t = \frac{X_1}{X_2}$ sono le coordinate affini della carta A_2 . Poiche' il punto in cui dobbiamo calcolare la retta tangente alla conica affine $\Gamma' := \Gamma \cap A_2$ e' l'origine, sappiamo che la sua equazione e' semplicemente data dall'annullarsi dei termini lineari come discende immediatamente dalla formula del polinomio di Taylor e dal fatto che $f(s, t) = 0$ e' un polinomio. Pertanto, la tangente a Γ' nell'origine e' $s = 0$. La chiusura proiettiva di tale tangente e' ovviamente la tangente alla conica proiettiva Γ e, visto che siamo nella carta affine A_2 , la chiusura proiettiva della tangente e' effettivamente la retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$.