Università degli Studi di Roma Tor Vergata. Corso di Laurea in Matematica.
Geometria 3 a.a. 2019-20. Docente F. Tovena, Codocente F. Flamini
Esercizi di Ripasso Festivita' Natalizie

R1) Sia $(A, \mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ uno spazio topologico in cui ogni aperto non vuoto e' denso.

(i) Mostra che per ogni coppia di aperti non vuoti U e V in A si ha che $U \cap V = \emptyset$.

(ii) Se $(A, \mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ come sopra e' prodotto di due spazi topologici $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{X}})$ e $(Y, \mathcal{U}_{\mathcal{Y}})$, mostra che la stessa prorpieta' vale per $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{X}})$.

R2) Sia $p : X \to Y$ un'applicazione continua. Una applicazione $s : Y \to X$ è una *sezione* di p se $p(s(y)) = y$ per ogni $y \in Y$.

a) Mostra che, se esiste una sezione continua di p, allora p è una applicazione quoziente.

b) Mostra che, se s è una sezione continua di p, Y compatto e X è di Hausdorff, allora s è una applicazione chiusa.

R3) Sia X il quoziente di $\mathbf{R}$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure } |x| = |y| > 1.$$

Discutere se X è connesso, se è compatto e se è di Hausdorff.

R4) Sia $X = (0, 1)$, con topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbf{R}$. Mostra che la compattificazione di Alexandroff $(X \times X)^{\infty}$ di $X \times X$ non è omeomorfa al prodotto $X^{\infty} \times X^{\infty}$, ove con X^{∞} si denoti la compattificazione di Alexandroff di X.

R5) Si considerino $\mathbf{R}^2$ e S^1 come sottospazi di $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea. Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \vec{0} \to S^1$ definita da $\vec{x} \mapsto \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$. Discutere se S^1 ha la topologia quoziente rispetto a f.

R6) Mostrare che $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $\mathbf{R}$ (con topologia euclidea).

R7) Sia D^2 il disco unitario chiuso in $\mathbf{R}^2$ (topologia euclidea). Mostra che il quoziente $D^2/\ S^1$ è omeomorfo a S^2.

R8) Sia $(0, 1]^{\infty}$ la compattificazione di Alexandroff di $(0, 1]$ (con topologia indotta dalla topologia euclidea in $\mathbf{R}$). Tale compattificazione è omeomorfa a S^1 (con top. euclidea)?

R9) Determina un modello per la compattificazione di Alexandroff della parabola

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y = x^2\}$$

e dell'iperbole

$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, xy = 1\}.$$

R10) Sia S uno spazio topologico qualsiasi, $\sim$ una relazione di equivalenza su S e $S/\sim$ lo spazio topologico quoziente.

(a) E' vero che se $S/\sim$ e' connesso, allora anche S e' connesso?

(b) E' vero che se S e' connesso allora $S/\sim$ e' connesso?

(c) E' vero che se ogni classe di $\sim$-equivalenza e' connessa, allora S e' connesso?

(d) E' vero che se $S/\sim$ e' connesso e se ogni classe di $\sim$-equivalenza e' connessa, allora S e' connesso?

R11) Sia $X = (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\mathrm{SSA}})$.

(a) X e' compatto?

(b) Ogni punto di X ammette un intorno compatto?

(c) La compattificazione di Alexandroff X^∞ di X e' T_2?

(d) Il punto $\infty \in X^\infty$ ammette solo un intorno?

R12) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$ euclideo:

$$X := \{(x, y, z, t) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

e

$$Y = X \cup \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

(a) X e' connesso per archi?

(b) X e' convesso?

(c) X e' contraibile?

(d) Ye' connesso per archi?

(e) Y e' convesso?

(f) Y e' stellato?

(g) Y e' contraibile?

R13) Sia X uno spazio topologico e sia X^∞ la sua compattificazione di Alexandroff.

(a) La chiusura di X in X^∞ coincide con X^∞?

(b) Se X^∞ e' T_2, allora anche X lo e'?

(c) Se X e' T_2, allora anche X^∞ lo e'?

R14) Siano X e Y spazi topologici tali che Y compatto. Siano $p_X : X \times Y \to Y$ e $p_Y : X \times Y \to Y$ le due proiezioni.

(a) p_X e' aperta?

(b) p_X e' chiusa?

(c) p_Y e' aperta?

(d) p_Y e' chiusa?

R15) Si consideri l'azione di $\mathbf{Z}_2$ su $\mathbf{R}$ data da $\pm 1 \cdot x = \pm x$.

(a) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' compatto?

(b) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' di Hausdorff?

(c) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ e' connesso?

(d) Le fibre della proiezione canonica $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ sono connesse?