COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Determinare la forma canonica metrica della conica* $2XY + X + Y = 1$.

La matrice associata alla parte quadratica dell'equazione della conica è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ e autospazi rispettivamente $V_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V_{-1} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. L'isometria lineare

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2X' - \sqrt{2}/2Y' \\ \sqrt{2}/2X' + \sqrt{2}/2Y' \end{pmatrix}$$

porta l'equazione nella forma

$$(X')^2 - (Y')^2 + \sqrt{2}X' = 1.$$

La traslazione

$$\begin{cases} X' = \bar{X} - \sqrt{2}/2 \\ Y' = \bar{Y} \end{cases}$$

porta l'equazione della conica nella forma canonica metrica

$$\frac{\bar{X}^2}{3/2} - \frac{\bar{Y}^2}{3/2} = 1.$$

La conica è un'iperbole equilatera.

2. *Sia* $f\colon \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ *la proiettività indotta dalla matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calcolare i punti fissi di* f *in* $\mathbf{P}^1$.

I punti fissi $(x_0 : x_1)$ di f in $\mathbf{P}^1$ sono in corrispondenza con le soluzioni dell'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

ossia con le rette per l'origine di $\mathbf{R}^2$ mandate in se stesse dall'applicazione lineare $X \mapsto MX$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, con autospazi rispettivamente $V_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $V_{-1} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. I punti fissi di f sono $P = (1 : 1)$ e $Q = (1 : -1)$.

3. *Siano date le rette proiettive* $l : x_0 - x_1 = 0$ *ed* $m : x_1 - x_2 = 0$ *in* $\mathbf{P}^2$. *Sia* $\pi_R\colon l \longrightarrow m$ *la prospettività di centro* $R = (2 : 1 : 0)$.
   (i) Verificare che $P = (1 : 1 : -1)$ *appartiene ad* l.
   (ii) Calcolare $\pi_R(P)$.

(i) Il punto $P = (1 : 1 : -1)$ appartiene ad l: infatti le coordinate del punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ soddisfano l'equazione del piano $x_0 - x_1 = 0$, la cui immagine tramite la proiezione canonica è proprio l. Il punto R non appartiene né ad l né ad m.

(ii) La retta proiettiva per R e P ha equazione

$$\overline{RP} = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x_0 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Il punto $\pi_R(P)$ è dato dall'intersezione della retta $\overline{RP}$ con la retta m, ossia

$$\pi_R(P) = \overline{RP} \cap m = (3:1:1) \in \mathbf{P}^2.$$

4. *Siano P, Q, R, S quattro punti distinti su una retta proiettiva $l \subset \mathbf{P}^2$ (come in figura).*
   (i) Costruire geometricamente la proiettività $f\colon l \longrightarrow l$ che manda P, Q, R rispettivamente in Q, P, R.
   (ii) Determinare $f(S)$.

(ii) Tracciamo una retta ausiliaria m passante per il punto fisso R. Sia α un punto esterno ad l ed m e sia $\pi_\alpha\colon l \longrightarrow m$ la prospettività di centro α. Siano $P_0 = \pi_\alpha(P)$, $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$, sia $\alpha' = \overline{Q_0P} \cap \overline{QP_0}$ e $\pi_{\alpha'}\colon m \longrightarrow l$ la prospettività di centro α'. La composizione

$$\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha\colon l \longrightarrow l$$

è una proiettività che, come f, manda la terna di punti distinti P, Q, R rispettivamente in Q, P, R. Dunque coincide con f.
(ii) Per costruire $f(S)$ basta costruire $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha(S) = \pi_{\alpha'}(\pi_\alpha(S))$.