COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Sia dato il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ $\quad U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 = 0\}$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare $U^\perp$.
   (ii) Calcolare $\|P\|, \quad \pi_U(P), \quad \pi_{U^\perp}(P), \quad \pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P), \quad d(P,U)$.

(i) Il sottospazio U è un piano per l'origine. Il suo complemento ortogonale $U^\perp$ è una retta per l'origine, precisamente la retta

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

contenuta nel piano (x_1, x_2). Questo si ricava sfruttando il fatto che il vettore $n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è normale al piano.

(ii) $\|P\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

I vettori

$$\{e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

formano una base ortonormale di U. Da cui

$$\pi_U(P) = (P \cdot e_1)e_1 + (P \cdot e_2)e_2 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\pi_{U^\perp}(P) = (\frac{P \cdot n}{n \cdot n})n = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\pi_U(P) \cdot \pi_{U^\perp}(P) = 0$, per definizione.

$d(P,U) = d(P, \pi_U(P)) = \|P - \pi_U(P)\| = \| \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \| = 1/\sqrt{2}$.

2. *Sia data* $\quad F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che F *è un'isometria di* $\mathbf{R}^2$.
   (ii) Determinare i punti fissi di F.
   (iii) Dare un'interpretazione geometrica di F.

(i) L'applicazione F è lineare. La matrice che la rappresenta $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale, in quanto soddisfa la condizione

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che F un'isometria lineare del piano: infatti, per ogni coppia di punti $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $Q \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, vale

$$d(F(P), F(Q)) = \|F(P) - F(Q)\| = \|F(P-Q)\| = \| \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix} \| =$$

$$= \ldots = \| \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix} \| = d(P, Q).$$

(ii) I punti fissi di F sono dati dai punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano la condizione

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 - 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ossia i punti della retta per l'origine di equazione

$$x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0.$$

Questa retta non è altro che l'autospazio di autovalore $\lambda = 1$ della matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(iii) L'isometria F è la riflessione rispetto alla retta per l'origine $x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$. Si può anche osservare che la matrice $\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ è della forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, per $\theta = \pi/3$, che definisce la riflessione rispetto ad una retta per l'origine che forma un angolo $\pi/6$ con l'asse delle x_1 positive.

3. *Sia $R_{\theta,P}$ rotazione del piano di un angolo $\theta = -\pi/2$ intorno al punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.*
   (i) Calcolare la formula generale di $R_{\theta,P}$.
   (ii) Determinare le immagini tramite $R_{\theta,P}$ dei punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) La rotazione cercata è data dalla composizione $T_P \circ R_{-\pi/2} \circ T_{-P}$, dove T_P indica la traslazione di passo $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $R_{-\pi/2}$ la rotazione di un angolo $-\pi/2$ intorno all'origine. La formula generale è data da

$$T_P \circ R_{-\pi/2} \circ T_{-P}(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = T_P(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix}) = T_P(\begin{pmatrix} x_2 - 5 \\ -x_1 + 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 - 4 \\ -x_1 + 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) $R_{\theta,P}(P) = P$, in quanto P è il centro di rotazione.

$R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$R_{\theta,P}(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. *Sia π il piano di equazione $x_1 - x_2 = 0$ in $\mathbf{R}^3$.*
   (i) Scrivere le formule della riflessione $R_\pi\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
   (ii) Calcolare le immagini tramite R_π dei punti $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) La retta normale al piano π e passante per un generico punto $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Essa interseca π nel punto A_π (che dipende da A) corrispondente al valore del parametro $t = \frac{(b-a)}{2}$

$$A_\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \frac{(b-a)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a+b)}{2} \\ \frac{(a+b)}{2} \\ c \end{pmatrix}.$$

Il punto simmetrico di A rispetto a π è il punto corrispondente al valore del parametro $t = 2\frac{(b-a)}{2} = (b-a)$, ossia

$$R_\pi(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che effettivamente

$$d(A, A_\pi) = d(R_\pi(A), A_\pi).$$

La formula generale per R_π è data da

$$R_\pi \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Si tratta di un'isometria lineare, dal momento che il piano π passa per l'origine.(i)

(ii) Si ha

$$R_\pi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_\pi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entrambi i punti P e Q si trovano infatti sul piano π.

Alternativamente:

Sia $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$, orientata positivamente, dove $\{e_1,\ e_2\}$ sono una base di π ed e_3 è un vettore normale a π. In questa base, la matrice della simmetria rispetto al piano π è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nella base canonica $\mathcal{C}$, la matrice della simmetria rispetto al piano π è data da $\tilde{A} = MAM^{-1} = MAM^t$, dove $M = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica, ossia la matrice che ha nelle sue colonne le coordinate dei vettori $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ nella base canonica:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{\tilde{A}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow{\scriptstyle M^{-1}} & & \uparrow{\scriptstyle M} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B}. \end{array}$$

Siano ad esempio

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

in questo caso

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$