

ESERCIZI GASBARRI

Esercizi Gasbarri

MATEMATICA ZERO

Il corso consiste essenzialmente in questi fogli di esercizi: in essi sono raccolti esercizi sui principali argomenti trattati al liceo, quindi in principio argomenti già noti!. Gli esercizi sono raggruppati per temi (e seguono essenzialmente l'ordine cronologico in cui dovrebbero essere stati appresi); se non si è in grado di risolvere un tipo di esercizio (p. es quelli della sez. jj) allora vuol dire che c'e' una lacuna (e sarebbe meglio colmara al piu' presto!). Resto a disposizione per dare spiegazioni e quindi aiutare a colmare tali lacune. Se si e' in grado di svolgere tutte le tipologie di esercizi, allora questi fogli possono servire per rinfrescarsi la memoria.

Mi si puo' contattare nei seguenti modi:

- dopo le lezioni di geometria I mod
- per email: gasbarri@mat.uniroma2.it
- all'orario di ricevimento.

buon lavoro!

Carlo Gasbarri

a) Trovare il valore delle seguenti espressioni:

a.1

$$\left[\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9} \right)^{-1} \right] + 4$$

a.2

$$-\left\{ \left[4 - \left(\frac{39}{56} - \frac{5}{7} \right) \right] + \left[\left(\frac{25}{56} + 1 \right) + \left(\frac{1}{4} + 2 \right) \right] \right\} - \left[\left(\frac{1}{4} - 3 \right) - \frac{27}{28} \right]$$

b) semplificare le seguenti espressioni letterali:

b.1

$$(a - 2b)^2 + (3a - 2b)(3a + 2b)$$

b.2

$$z^2 - 3z + 1)(z^2 + 3z - 3) - (z + 1)(z - 2)(z^2 + z - 1) + 2(z^3 + 3) - z(11 - z)$$

2

c) Eseguire le seguenti divisioni tra polinomi:

c.1

$$(2x^3 - 7x^2 + 8x - 3):(2x - 3)$$

c.2

$$(12b^4 + 47b^3 + 10b^2 + 12):(-3b^2 - 8b + 6)$$

c.3

$$(2y^4 + 5y^3 + 2y^2 - 2y - 1):(y^3 + 2y^2 - 1)$$

c.4

$$(6b^2 - 5b^3 - 5b^2 + 1):(3b^2 + 2b - 1)$$

d) Applicando la regola di Ruffini eseguire le seguenti divisioni tra polinomi:

d.1

$$(2a^3 - 3a^2 - 11a + 2):(a - 3)$$

d.2

$$(a^4 - a + 3a^3 - 3):(a + 3)$$

e) Scomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi:

e.1

$$8a^5 - 2a^3$$

e.2

$$-16a^2x^2 + 16abx^2 - 4b^2x^2$$

e.3

$$2a^3b^2 - 12a^2b^4 + 24ab^6 - 16b^8$$

e.4

$$12b^2y^2 + 6b^2y + 24b^2 - 6by^2 - 3by - 12b$$

f) Semplificare la seguente espressione algebrica:

$$\frac{\left(\frac{2}{a} - \frac{a-b}{a^2} - \frac{a+b}{ab}\right)}{\left(\frac{2a+3b}{ab} - \frac{2}{a} - \frac{3}{b}\right)}$$

g) Risolvere le seguenti equazioni lineari:

g.1

$$3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$$

g.2

$$3(3 + 2x) - (1 - x) = 2(4 + 3x) + x$$

g.3

$$3(x - 2) + 5(x + 1) = 2(2x + 7) + 4(x + 2)$$

h) trovare per quali valori dell'incognita le seguenti disequazioni lineari sono verificate:

h.1

$$3x - 2(x + 3) < x - 3(x + 1)$$

h.2

$$12(x + 2) + 5 < 3(4x + 1) + 3$$

h.3

$$5x(4x - 5) - (5x - 3)^2 < 5x(1 - x)$$

h.4

$$(x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - x - 1)^2 > 4x^3$$

i) Trovare per quali valori dell'incognita i seguenti sistemi di equazioni sono verificati:

i.1

$$\begin{cases} 2x + 3(x - 1) < x + 1 \\ 2(x + 3) - x > 2 \end{cases}$$

i.2

$$\begin{cases} 2(x + 3) - (x + 1)^2 < 1 - (x - 1)(x + 1) + 3x \\ (x - 3)^2 + (x - 1)^2 < (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \end{cases}$$

j) Si risolvano le seguenti equazioni:

j.1

$$x - \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$

j.2

$$3 - \frac{1}{x - 2} = \frac{1 - 3x}{2 - x}$$

j.3

$$\frac{2x}{3x - 6} - \frac{2}{2x - 4} = 1 + \frac{5x - 12}{12 - 6x}$$

k) trovare per quali valori dell'incognita le seguenti disequazioni sono verificate:

k.1

$$\frac{x}{x + 1} - 2 < \frac{x - 1}{x + 1} - 3$$

k.2

$$\frac{6x + 6}{9 - x^2} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{3 - x}$$

k.3

$$\frac{1}{3} - \frac{x}{6x + 12} + \frac{x}{3x + 6} < \frac{3x^2 + 8}{6x^2 + 24x + 24}$$

k.4

$$\frac{5x - 2}{x^2 + 3x} + \frac{1}{x + 3} < \frac{2}{x}$$

l) Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

l.1

$$|2(x - 3) + x + 7| = 2 - (x + 1)$$

5

l.2

$$4(x+1) - |(x+1)^2 + x(3-x)| = 2(2x+3)$$

l.3

$$|2(x+1) - 3(x-1)| > (x+1)^2 - x(x+2) + 6$$

l.4

$$|4x-3| = |x-5|$$

l.5

$$\frac{2}{|x+3|} = \frac{3}{x-2}$$

l.6

$$\frac{1}{|2(x-1)+x|} < \frac{5}{|2(x-1)+5|}$$

l.7

$$|3x+1| + |2x-1| + |x-2| < 4$$

m) Risolvere le seguenti particolari equazioni di grado superiore al primo

m.1

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

m.2

$$x^4 - 6x^3 - x^2 + 54x - 72 = 0$$

m.3

$$x^5 + (3a-2b)x^4 + (3a^2-6ab+b^2)x^3 + a(a^2-6ab+3b^2)x^2 - a^2b(2a-3b)x + a^3b^2 = 0$$

n) Risolvere le seguenti particolari disequazioni di grado superiore al primo

n.1

$$x^4 + 7x^3 + 10x^2 > 0$$

n.2

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4} > 0$$

o) Nell'insieme dei numeri assoluti verificare le seguenti identità:

6

o.1

$$\sqrt{112} + \sqrt{63} - \sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{175}$$

o.2

$$(\sqrt{x} + \sqrt{3x-2})^2 - 2\sqrt{3x^2 + 2x} = 2(2x+1)$$

o.3

$$\left(\sqrt{\frac{x+y}{x+2y}} + \sqrt{\frac{x+2y}{x+y}} \right)^2 - 2 = \frac{2x^2 + 6xy + 5y^2}{x^2 + 3xy + 2y^2}$$

p) razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni irrazionali:

p.1

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

p.2

$$\frac{x}{\sqrt{x(x-1)^2}}$$

p.3

$$\frac{10}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

q) Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado:

q.1

$$(2x-3)(2x+3) - x(x-1) - 5 = 0$$

q.2

$$(3x+1)(4x-3) + x(x-1) = x(x+3) + 63$$

q.3

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{4}{x+1} = \frac{5x-3}{(x-2)(x+1)}$$

q.4

$$\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{x-4}{x^2-1}$$

r) Stabilire per quali valori del parametro le seguenti equazioni hanno radici reali:

r.1

$$x^2 - 4(k-1)x + 4k^2 = 0$$

r.2

$$(m-2)x^2 - 2(m-3) + m - 5 = 0$$

r.3

$$3sx^2 - 2(3s + 4) + 3s - 2 = 0$$

s) Stabilire per quali valori del parametro la seguente equazione di secondo grado

$$(m+3)x^2 - 2(m-3)x + m - 5 = 0$$

- s.1 ha due radici reali e positive;
 s.2 ha due radici reali e negative;
 s.3 ha due radici reali e discordi.

t) Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado:

t.1

$$2x(x+3) - 2(3x+5) + x > 0$$

t.2

$$(x+1)(x-3) - 2x(x+1) + 24 > 0$$

t.3

$$x - \frac{x-1}{x+1} < \frac{3x-1}{2}$$

t.4

$$\frac{x-3}{x} + \frac{x+3}{x^2} > \frac{2}{3}$$

t.5

$$\frac{4-x}{x^2+2x+1} - \frac{2-x}{x+1} > 2$$

t.6

$$\frac{1 - \frac{x+1}{1-\frac{1}{x+3}}}{\frac{x-3}{x+2}} > \frac{2x+5}{x-3}$$

u) Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ -x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$$

v) risolvere le seguenti equazioni:

v.1

$$|x^2 + 4x| - 5 = 0$$

v.2

$$(x+1)^2 - 3|x+1| = 0$$

v.3

$$\frac{x+1}{|x-1|} - \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

v.4

$$\frac{|x-1|}{x-3} = \frac{1}{|x+3|} - \frac{x^2-1}{x^2-9}$$

w) Nell'insieme dei numeri reali risolvere le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali:

w.1

$$\sqrt[3]{x+27} = 3$$

w.2

$$x+1 - \sqrt{5x-1} = 0$$

w.3

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x-1} = 0$$

w.3

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

w.4

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{3x-5}$$

w.5

$$\sqrt{\frac{2x+3}{x+2}} - 4 = 3x$$

w.6

$$\sqrt{x-1} < 3(x-1)$$

w.7

$$\frac{x - \sqrt{x-1}}{x^2+2} > 0$$

x) Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche:

x.1

$$3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 40$$

x.2

$$2^{1-x} - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$$

x.3

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} = 4$$

x.4

$$\log(x+3) - \frac{1}{2} \log(x) = \log 5 - \frac{1}{2} \log 2$$

x.5

$$\log(x+2) + \log(x+1) < \log(5x+2)$$

x.6

$$\log x + 2 \log(x+3) < \log(x^3 + 15)$$

RISPOSTE

- a.1 0
- a.2 -4
- b.1 $10a^2 - 4ab$.
- b.2 1.
- c.1 $Q = x^2 - 2x + 1, r = 0$.
- c.2 $Q = -4b^2 - 5b, r = 46b$.
- c.3 $Q = 2y + 1, r = 0$.
- c.4 $Q = 2b^2 - 3b + 1, r = -5b + 2$.
- d.1 $Q = 2a^2 + 3a - 2, r = -4$.
- d.2 $Q = a^3 - 1, r = 0$.
- e.1 $2a^3(2a - 1)(2a + 1)$.
- e.2 $-4x^2(2a - b)^2$.
- e.3 $2b^2(a - 2b^2)^3$.
- e.4 $3b(2b - 1)(2y^2 + y + 4)$.
- f.1 $\frac{a+b}{a}$.
- g.1 $x = 1$.
- g.2 identitá.
- g.3 impossibile.
- h.1 $x < 1$.
- h.2 assurda.
- h.3 x qualunque.
- h.4 $x < 0$.
- i.1 $-4 < x < 1$.
- i.2 $x > 1$.
- j.1 $x = 0$.
- j.2 impossibile.
- j.3 identitá per $x \neq 2$.
- k.1 $-2 < x < -1$.
- k.2 $x < 3$ ma $x \neq -3$.
- k.3 $x < 0$ ma $x \neq -2$.
- k.4 $x < -3$ e $0 < x < 2$.
- l.1 $x = -1, 0$.
- l.2 assurda.
- l.3 $x < -2$ e $x > 12$.
- l.4 $x = -2/3, 8/5$.
- l.5 $x = -13, -1$.
- l.6 $x < 7/17$ ma $x \neq -3/2$, e $x > 1$.
- l.7 assurda. m.1 $x = -2, 1, 4$.
- m.2 $x = -3, 2, 3, 4$.
- m.3 $x = -a, -a, -a, b, b$.
- n.1 $x < -5$ e $x > -2$ ma $x \neq 0$.
- n.2 $x < -2, 0 < x < 2$ e $x > 4$.
- p.1 $\frac{2\sqrt{x-1}}{x-1}$ con $x > 1$.
- p.2 $\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ se $0 < x < 1$, $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ se $x > 1$.
- p.3 $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
- q.1 $x = -7/3, 2$.

q.2 $x = -2, 11/4.$

q.3 $x = 3, 4.$

q.4 assurda

r.1 $k \leq 1/2.$

r.2 $m \geq 1/13.$

r.3 $s \geq -8/15.$

s.1 $m < -3$ e $5 < m \leq 6.$

s.2 mai

s.3 $-3 < m < 5.$

t.1 $x < -5/2$ e $x > 2.$

t.2 $-7 < x < 3.$

t.3 $-3 < x < -1$ e $x > 1.$

t.4 $x \neq 0$ e $x \neq 3.$

t.5 $-6 < x < 0$ ma $x \neq -1.$

t.6 $x < -3$ e $-2 < x < 3.$

u. $-2 < x/3.$

v.1 $x = \pm 1, \pm 4.$

v.2 $x = -4, -1, 2.$

v.3 $x = -1/4, 0, 2.$

v.4 assurda.

w.1 $x = 0.$

w.2 $x = 1, 2.$

w.3 $x = 1.$

w.4 $x = 3.$

w.5 $x = -1.$

w.6 $x > 10/9.$

w.7 $x \geq 1.$

x.1 $x = 3.$

x.2 $x = -2.$

x.3 $x = -1/2, 1.$

x.4 $x = 2, 9/2.$

x.5 $0 < x < 2.$

x.6 $0 < x < 1.$