COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $m \subset \mathbf{R}^2$ la retta di equazione $x + y = 1$. Calcolare un'equazione cartesiana della retta m rotata intorno al punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ di un angolo di 60 gradi in senso antiorario.

Per ogni punto sulla retta m si ha che $y = 1 - x$. Il punto generico di m ha quindi la forma $P = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$. Adesso trasliamo P di passo $-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ruotiamo intorno all'origine di un angolo di 60 gradi in senso antiorario e (ri-)trasliamo di passo $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Siccome la rotazione intorno all'origine è un'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, la formula per l'immagine di P è data da

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ 1-x-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Un'equazione cartesiana è quindi data da $(1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y = -3 + \sqrt{3}$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 6/7 & -2/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per A.
(a) Dimostare che A è una matrice ortogonale.
(b) Determinare i punti fissi di f.
(c) Determinare gli autovalori e autospazi di f.

(a) Si verifica che il prodotto di A per la sua trasposta è uguale alla matrice identità.
(b) I punti fissi di f sono i vettori $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ per cui vale $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. In altre parole, i punti fissi formano l'autospazio di f di autovalore $\lambda = 1$. Determiniamo questo autospazio nella parte (c).
(c) Siccome la matrice è ortogonale, gli autovalori λ reali sono necessariamente uguali a ± 1. Per $\lambda = 1$, ogni riga della matrice $A - \lambda \cdot \mathrm{id}$ è proporzionale a $(-\frac{3}{7}\ \frac{1}{7}\ \frac{2}{7})$. Questo siginifa che l'autospazio di f di autovalore $\lambda = 1$ è uguale al piano di equazione $-3x + y + 2z = 0$.
Per $\lambda = -1$ abbiamo che

$$A - \lambda \cdot \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 5/7 & 3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 13/7 & -2/7 \\ 6/7 & -2/7 & 10/7 \end{pmatrix}.$$

Usando i metodi del corso di Geometria I, si risolve il sistema omogeneo corrispondente a questa matrice. L'autospazio di autovalore $\lambda = -1$ è uguale allo spazio delle soluzioni del sistema e coincide con lo span del vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Sia $C \subset \mathbf{P}^2$ la conica di equazione $y^2 + xy - z^2 = 0$ e sia m la retta di equazione $x + y - z = 0$. Di quanti punti consiste l'intersezione $C \cap m$? Determinarne le coordinate.

Eliminiamo la coordinata x sostituendo $x = z - y$ nella equazione della conica. Troviamo che ogni punto $(x : y : z)$ di $C \cap m$ soddisfa $y^2 + (z - y)y - z^2 = 0$. Questo implica che $zy - z^2 = z(z - y) = 0$. Ci sono quindi due possibilità. Abbiamo che $z = 0$ oppure che $y = z$. Adesso usiamo l'equazione della retta $x + y - z = 0$. Nel primo caso abbiamo che $x = -y$ e troviamo quindi il punto $(1 : -1 : 0)$. Nel secondo caso abbiamo che $x = 0$ e troviamo il punto $(0 : 1 : 1)$. L'intersezione $C \cap m$ consiste quindi nei due punti $(1 : -1 : 0)$ e $(0 : 1 : 1)$.

4. Sia r la retta disegnata qui sotto e sia f la proiettività $r \longrightarrow r$ che fissa il punto A, mandando il punto B in C e il punto C in D. Costruire i punti di r fissati da f

Chiaramente f fissa il punto A. Una costruzione del secondo punto fissato da f è come segue. Disegnamo una retta ausiliaria s passante per A. Scegliamo un punto S non appartenente ne a r, ne a s. La retta passante per B e S interseca la retta s nel punto B'. La retta passante per C e S interseca la retta s nel punto C'. Sia u la retta che passa per B' e C e sia v la retta che passa per C' e D. Sia S' il punto di intersezione $u \cap v$. La retta che passa per i punti S e S' interseca la retta r di partenza nel secondo punto fissato da f.