Geometria 2. 3^o Appello. 2 settembre 2005, 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia l la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Ruotare il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ intorno alla retta l di un angolo di 45 gradi e calcolarne le coordinate.

   Siccome la retta m di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$, passa per l'origine, la rotazione intormo a m è un'applicazione *lineare* ed è data dalla molteplicazione per la matrice
   $$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
   Putroppo la retta l non passa per l'origine. Per poter applicare questo fatto lo stesso, trasliamo prima di passo $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In questo modo portiamo l nella retta m e il nostro punto nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Adesso moltiplichiamo per la matrice M e poi trasliamo il risultato di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Otteniamo $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

2. Esibire una matrice 2×2 che induce una proiettività $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ che fissa i punti $(1\colon 0)$ e $(0\colon 1)$, ma non è l'identità.

   Un esempio è dato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. La proiettività chiaramente fissa $(1\colon 0)$ e manda $(0\colon 1)$ nel punto $(0\colon 2)$, il quale è proiettivamente equivalente a $(0\colon 1)$. La proiettività *non* è l'identità perché il punto $(1\colon 1)$ va mandato nel punto $(1\colon 2)$ il quale *non* è equivalente a $(1\colon 1)$.

3. Sia $Q \subset \mathbf{R}^3$ la quadrica di equazione $xz + yz + x + y = 0$. Determinare di che tipo di quadrica si tratta.

   Il modo più facile per procedere è di osservare che l'equazione di Q si scrive come $(x+y)(z+1) = 0$. Si vede subito che le quadrica è unione del piano di equazione $x + y = 0$ e quello di equazione $z + 1 = 0$. Alternativamente si può seguire i metodi del corso: determinare gli autovalori e autovettori della matrice associata, mettere l'equazione in forma "diagonale" ed eliminare i termini lineari completando quadrati. Il risultato è uguale: si ottengono due piani incidenti.

4. Disegnare la configurazione di rette e punti in $\mathbf{P}^2$ che è duale alla configurazione di 6 punti e 5 rette data qua sotto.

   Le sei rette della configurazione duale si possono disegnare come i quatro lati e le due diagonali di un rettangolo. In questo modo i cinque punti sono i quattro vertici più il punto di intersezione delle due diagonali.