COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. *Sia dato il sottospazio* $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *e sia* $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (i) Determinare una base di $U^\perp$.
   (ii) Calcolare la distanza $d(P, U^\perp)$.

(i) I vettori normali dei due piani $x_1 - x_2 = 0$ e $x_2 - x_3 = 0$ formano la base $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$ di $U^\perp$.

(ii) La distanza $d(P, U^\perp)$ è uguale alla distanza $d(P, Q)$ dove Q è il punto di intersezione di $U^\perp$ e lo spazio affine $P + U$. Siccome $U = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, lo spazio $U^\perp$ è il piano di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $P + U$ è la retta di forma parametrica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il punto Q corrisponde al valore di t per cui il punto $(1 + t, t, 1 + t)$ appartiene a U. Questo vuol dire che $(1 + t) + t + (1 + t) = 0$ e quindi $t = -2/3$. Abbiamo che $Q = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. La distanza cercata è $\sqrt{(1 - 1/3)^2 + (2/3)^2 + (1 - 1/3)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. *Sia* $M = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$ *e sia* $F \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, *definita da* $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
   (i) Far vedere che M *è una matrice ortogonale.*
   (ii) Determinare i punti fissi di F.
   (iii) Dare un'interpretazione geometrica di F.

(i) La trasposta ${}^tM$ di M è uguale a $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$. Siccome il prodotto di ${}^tM$ e M è la matrica identità, la matrice M è ortogonale.

(ii) I punti fissi non nulli sono esattamente gli autovettori di autovalore $\lambda = 1$. Per trovare gli autovettori risolviamo il sistema omogeneo di matrice $M - \mathrm{id} = \begin{pmatrix} -2/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 0 & -2/5 \end{pmatrix}$.
Le soluzioni formano la retta $l = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

(iii) Siccome i punti fissi di M formano una retta, si tratta di una rotazione intorno questa retta.

3. *Nel nel piano proiettivo* $\mathbf{P}^2$*, siano dati i punti* $P = (1:0:1)$*,* $Q = (1:0:-1)$*,* $R = (1:0:0)$ *e la retta* m *di equazione* $x_0 + x_1 - x_2 = 0$*.*
   (i) Dimostrare che P*,* Q*,* R *stanno su una stessa retta* r*.*
   (ii) Determinare un'equazione per r *e determinare un quarto punto* $S \in r$*.*
   (iii) Determinare l'intersezione $r \cap m$*.*

(i) I vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono dipendenti. Tutti e tre appartengono al piano di equazione $x_1 = 0$. Nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ quindi, i tre punti P, Q e R stanno sulla retta di equazione $x_1 = 0$.

(ii) Un quarto punto sulla retta r è dato da $S = (3:0:7)$.

(iii) Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{cases}$ sono i vettori $t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Il punto corrispondente $(1:0:1)$ è il punto di intersezione $r \cap m$ in $\mathbf{P}^2$.

4. *Sia* $F\colon \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ *la proiettività indotta dalla matrice* $M = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$*.*
   (i) Determinare i punti fissi di F*.*
   (ii) Sia l *una retta in* $\mathbf{P}^2$*. Costruire graficamente una proiettività* $G\colon l \longrightarrow l$ *con due punti fissi distinti.*

(i) Gli autovalori di M sono $\lambda = 2$ con autospazio $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ e $\lambda = 1$ con autospazio $\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$. I punti fissi correspondenti sono $(1:0)$ e $(1:-1)$.

(ii) Siano $P, Q, R, S \in l$ quattro punti distinti. Supponiamo che P, Q siano i due punti fissi di G e che $G(R) = S$. In questo modo G risulta diversa dall'identità. Sia m una retta ausiliaria passante ad esempio per il punto fisso P. Sia α un punto esterno ad l ed m, sia $\pi_\alpha\colon l \longrightarrow m$ la prospettività di centro α e siano $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$ e $R_0 = \pi_\alpha(R)$. Consideriamo poi la prospettività $\pi_{\alpha'}\colon m \longrightarrow l$ di centro il punto

$$\alpha' = \overline{R_0 S} \cap \overline{Q_0 Q}.$$

La composizione $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha\colon l \longrightarrow l$ è una proiettività diversa dall'identità (manda R in S) che fissa P e Q, come richiesto.