

UNIVERSITÀ di ROMA TOR VERGATA

Corso di Laurea in Matematica

Matematica zero

Foglio di Esercizi n.2: POLINOMI, ESPRESSIONI RAZIONALI DISEQUAZIONI RAZIONALI

- (1) Eseguire le seguenti operazioni tra polinomi riducendo i termini simili:

$$3xz^2 - \left(\frac{1}{2}xz + \frac{4}{3}y\right) + (5xyz - 7x^2z + \frac{2}{3}z^2x + y) +$$

$$-(-3 + 2xy + \frac{2}{5}y + x) + (-2zx + 1 - \frac{1}{2}yzx)$$

- (2) Eseguire i seguenti prodotti di polinomi:

(a) $(a - 3bc)(3bc + a)$

(b) $(2u - 5v)(5u + 2v)$

(c) $(x - 5y + t)^2 - (5y + t + x)^2$

- (3) Fattorizzare i seguenti polinomi:

(a) $x^4 + x^3 + x^2$

(b) $125x^6 + a^6$

(c) $2x^3 + x^2y - x^2 + 2xy + y^2 - y$

- (4) Scrivere, se possibile, i seguenti polinomi come prodotti di polinomi di grado più basso:

(a) $2x - 5ay + 4y - \frac{5}{2}ax$

(b) $3xy - 2a^2xy - 6ay^2 + ax^2$

FRAZIONI DI POLINOMI ed ESPRESSIONI RAZIONALI

- (1) Completare le seguenti uguaglianze:

(a)

$$\frac{1}{a+b} = \frac{?}{a^2 - b^2}$$

(b)

$$\frac{1}{a-b} = \frac{?}{a^3 - b^3}$$

- (2) Semplificare le seguenti espressioni:

(a)

$$\frac{1}{ab + a^2} - \frac{2b}{ab^2 - a^3} - \frac{1}{b^2 - ab} + \frac{a+b}{ab^2 - a^2b}$$

2

(b)

$$\frac{a^2x - ax^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^3 + a^2x}{a^2 + 2ax + x^2} - \frac{a^2 - 2ax}{a - x}$$

(c)

$$\left(\frac{x+b}{2x-2b} - \frac{x-b}{2x+2b} - \frac{2b^2}{b^2-x^2} \right) : \frac{x-b}{2b}$$

(d)

$$\left[\left(\frac{a+1}{a} - \frac{a}{a-1} \right) : \left(1 - \frac{1}{a} \right) : \frac{1}{1-a^2} + 1 \right] : \frac{a}{a^2b-b}$$

(e)

$$\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-3a+2} \right)^2 \left(a + \frac{4}{a} - 4 \right)$$

(3) E' vero che , per ogni numero reale x diverso da zero:

- (a) $(x^2x^{-3})^2x^2 = x$
- (b) $(x^2x^{-3})^2x^2 = 1$
- (c) $(x^2x^{-3})^2x^2 = x^{-4}$
- (d) $(x^2x^{-3})^2x^2 = x^4$

(4) Calcolare il valore dell'espressione $\frac{m^2-n^2}{m-n}$ per $m = \frac{1}{3}$ e $n = \frac{1}{4}$.

(5) Qual è il risultato della somma e della semplificazione delle frazioni:

$$\frac{4a}{a+b} + \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{a}{a-b}$$

(6) Trovare due numeri che, sostituiti ad A e B rendono vera la uguaglianza seguente:

$$\frac{3x}{4-x^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x}$$

Potremmo scegliere i valori di A e B in più modi?

(7) Semplificare il più possibile:

$$\left(\frac{3ab^2c}{\sqrt{2a^3c}} \right)^4 : \left(\frac{\sqrt[3]{3b^2}}{(3a-b)^2a^2} \right)^3 + \left(\frac{(3a-b)^3}{2ac} \right)^2$$

POLINOMI IN UNA INDETERMINATA

- (1) Dire per quali valori di x il polinomio $2x - 3$ vale 4.
- (2) Eseguire le seguenti divisioni, determinando quoziente e resto:
 - (a) $2x^3 - 3x^2 + 4x + 2 : x^2 - 2x$
 - (b) $3s^6 + 6s^4 - 12s^2 + 4 : s^4 + 4$
- (3) Trovare il resto della divisione tra i polinomi $\frac{9}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ e $3x + 1$ senza eseguire la divisione.

- (4) Dire se il polinomio

$$3x^5 - x^2 + x^4 - 3x + 2$$

è divisibile per $3x - 2$

EQUAZIONI POLINOMIALI

- (1) Discutere, al variare di
- a
- e
- b
- nell'insieme dei numeri reali, le soluzioni dell'equazione

$$ax + b = 0.$$

- (2) Risolvere le seguenti equazioni:

(a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(b) $2x^2 - 5x + 2 = -3x + x^2.$

- (3) Risolvere le seguenti equazioni in
- x

(a) $(x - 2)^3 - (x + 2)^3 + 19 = 0$

(b) $(x + 1)(x - 1)(x - 2)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2 = 4$

- (4) Determinare per quali valori reali di
- a
- e
- b
- l'equazione

$$b(a - b)x^2 - ax + 1 = 0$$

ammette radice $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$

- (5) Verificare che
- -1
- e
- 3
- sono soluzioni dell'equazione

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 4x - 21 = 0$$

e calcolare le altre soluzioni.

- (6) Risolvere la seguente equazione fratta

$$\frac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2} - \frac{27}{x - 2} = 1 - \frac{26 + x}{x - 1}$$

DISEQUAZIONI POLINOMIALI

- (1) Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $3x + 2 > 2x - 1.$

(b) $\frac{-2x-1}{3} + 1 < \frac{1}{2} - \frac{3-2x}{6}$

(c) $x^2 - 3x + 1 > 0$

(d) $-3x^2 + x + 2 > 0$

(e) $3x^2 - 3x + \frac{3}{4} < 0.$

(f) $x^2 + x + \frac{1}{2} > 0$

(g) $x^2 - 5x + 6 > 0.$

(h) $(x - 1)(x^2 + x + 5) > 0$

(i) $(2x - \sqrt{2})(x^2 + 3x + 2) < 0$

DISEQUAZIONI RAZIONALI FRATTE

(1) Risolvere le seguenti disequazioni razionali fratte

(a)

$$\frac{x-1}{x+2} > 0$$

(b)

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x-2}$$

(c)

$$\frac{(x+2)(x^2-5x+6)}{x^2-1} \geq 0.$$

(d)

$$\frac{(x^2-1)(9-x^2)}{x^2-7x+12} \geq 0.$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON MODULO

(1) Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni:

(a) $|x-5| = 3$

(b) $|x-1| > 1$

(c) $|x-5| < 3$

(d) $|x^2-1| < 15$