

Chapter 1

Trasformazioni in spazi euclidei

Esercizio 1.0.1 *Dato, in \mathbb{R}^3 , il piano*

$$\pi : x - y + z = 1,$$

si scrivano le formule di trasformazione per la riflessione rispetto a π nel sistema di riferimento standard.

Soluzione 1:

Presentiamo due soluzioni di cui questa prima è la più generale e prescinde dal tipo di problema da risolvere. Essa ricalca fedelmente la tecnica usata per calcolare le formule per una rotazione vista nelle lezioni precedenti.

Osserviamo innanzitutto che, se il piano fosse $\pi' : z = 0$, la matrice rappresentativa della trasformazione sarebbe la assai semplice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Costruiamo allora un sistema di riferimento avente come piano $z' = 0$ il nostro piano π in cui sappiamo come scrivere la trasformazione e poi “convertiamo” queste con l’opportuno cambiamento di coordinate.

Innanzitutto semplifichiamo un momento il problema considerando il piano $\pi'' : x - y + z = 0$, così da poter scegliere la medesima origine anche per il nuovo sistema di riferimento, ora scegliamo gli assi. Due giaceranno in π'' e il terzo sarà normale, perciò quest’ultimo risulterà $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre per gli altri due

osserviamo come al solito che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è al primo normale e infine con il prodotto vettoriale completiamo la terna ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che deve solo essere normalizzata.

Osservazione 1.0.2 *L'ordine dei vettori non è casuale, se infatti vogliamo usare A come matrice di trasformazione, allora i primi due vettori devono essere lasciati fissi e dunque devono essere quelli appartenenti al piano, l'ordine di questi due determina se la matrice di cambiamento di base sia o meno ortogonale speciale.*

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

è allora la matrice che trasforma le coordinate dei punti *rispetto al nuovo sistema di riferimento* nelle coordinate degli stessi punti *nel sistema di riferimento standard*, la matrice della riflessione R è allora

$$R = MAM^{-1} = MAM^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Non dimentichiamoci tuttavia che abbiamo calcolato le formule di riflessione rispetto al piano π'' , ora modifichiamo quelle trovate in modo che il piano lasciato fisso sia non questo bensì π , scegliamo allora un punto su tale piano, ad

esempio $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e otteniamo che il riflesso di un punto \underline{x} avrà coordinate

$$R(\underline{x} - P) + P = R\underline{x} - RP + P = R\underline{x} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

In una versione più esplicita:

$$\begin{cases} x' &= 1/3x + 2/3y - 2/3z + 2/3 \\ y' &= 2/3x + 1/3y + 2/3z - 2/3 \\ z' &= -2/3x + 2/3y + 1/3z + 2/3 \end{cases}.$$

Soluzione 2:

Questa soluzione sfrutta il significato geometrico del problema. Dato un punto

P di coordinate $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, il suo riflesso è l'unico punto altro punto sulla normale

a π passante per P avente dal piano la stessa distanza $d(\pi, P)$.

Per trovarlo, calcoliamo tale retta normale che risulta essere semplicemente

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Calcoliamo allora l'intersezione tra n e π inserendo nell'equazione di quest'ultimo le coordinate del generico punto di n e risolvendo in t :

$$(t + a) - (-t + b) + (t + c) = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{1 - a + b - c}{3}$$

Il \bar{t} trovato “codifica” il punto di intersezione lungo la retta n , e il riflesso di P è codificato dal parametro $2\bar{t}$, vedasi le lezioni per la motivazione. Otteniamo le coordinate del riflesso P' allora semplicemente sostituendo $2\bar{t}$ in n , scrivendo al posto di a, b, c le più usuali x, y, z :

$$\begin{cases} x' &= & 1/3x + 2/3y - 2/3z + 2/3 \\ y' &= & 2/3x + 1/3y + 2/3z - 2/3 \\ z' &= & -2/3x + 2/3y + 1/3z + 2/3 \end{cases} ,$$

che, miracolosamente, coincidono con quelle trovate più sopra.

Chapter 2

Coniche e quadriche

2.1 Coniche

Esercizio 2.1.1 Data la conica in \mathbb{R}^2

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}xy - \frac{1}{4}y^2 + (\sqrt{3} + 1)x + (2\sqrt{3} - 1)y + 2 = 0,$$

trovare l'equazione corrispondente alla sua forma canonica e scrivere esplicitamente l'isometria della trasformazione.

Come prima cosa, ci calcoliamo la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dopodiché la tecnica standard è diagonalizzare la sottomatrice relativa alla parte omogenea di grado due, quindi la trafila è la solita: polinomio caratteristico \rightarrow autovalori \rightarrow autovettori (ortonormalizzati)

$$0 = \det \begin{pmatrix} 5/4 - \lambda & 3/4\sqrt{3} \\ 3/4\sqrt{3} & -1/4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$\begin{aligned} \lambda = 2 &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \lambda = -1 &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ora se calcoliamo la trasformata tramite la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

otteniamo

$$A'' = MAM^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

che corrisponde alla forma quadratica

$$-x''^2 + 4x'' + 2y''^2 + 2y'' + 2$$

Osservazione 2.1.2 *Si noti che, a differenza di quanto fatto a lezione, questa volta è stato invertito l'ordine degli autovalori, per farlo è sufficiente scambiare x'' e y'' oppure moltiplicare la matrice M con la matrice di scambio S dal lato giusto (che vi invito a trovare)*

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto ci resta da eliminare i termini lineari e lo facciamo completando i quadrati, ovvero

$$\begin{aligned} -x''^2 + 4x'' + 2y''^2 + 2y'' + 2 &= -(x''^2 - 4x'' + 4) + 4 + 2(y''^2 + y'' + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} + 2 \\ &= -(x'' - 2)^2 + (y'' + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

da cui segue, usando le trasformazioni

$$\begin{cases} x' = x'' - 2 \\ y' = y'' + \frac{1}{2} \end{cases},$$

la forma canonica standard finale:

$$\frac{2}{11}x'^2 - \frac{4}{11}y'^2 = 1$$

2.2 Quadriche

Lo schema di classificazione delle quadriche è pressoché identico a quello usato per le coniche, tuttavia poichè vi è una dimensione in più in gioco i conti diventano se non più impegnativi quantomeno più noiosi, vi si chiederà dunque solamente di classificare la quadrica ed eventualmente di trovare alcune sue proprietà ma senza passare per l'isometria che la trasforma nella sua forma normale.

A parte l'algoritmo di classificazione visto a lezione e che trovate in forma compatta a pagina 335-336 del testo, che rende comunque il lavoro **banale**, il segreto per un riconoscimento rapido ed efficace dell'oggetto sotto mano consta di due tecniche:

- fattorizzare,
- intersecare con piani.

Gli esempi sono meglio delle parole:

1. $x^2 = 0$.

Chiaramente il piano $x = 0$ è due volte soluzione di questa equazione e dunque la quadrica è tale piano contato due volte.

2. $x^2 = 1$.

Questa volta otteniamo l'equazione $x^2 - 1 = 0$ che si fattorizza in $(x - 1)(x + 1) = 0$ e che dà i piani $\pi : x = 1$ e $\pi' : x = -1$

3. $x^2 = -1$.

La situazione sembra identica a quella precedente e in effetti da un punto di vista puramente algebrico lo è, tuttavia in \mathbb{R} tale equazione non ha soluzione dunque abbiamo una quadrica (riducibile) totalmente immaginaria.

4. $x^2 = y$.

Vista in \mathbb{R}^2 , sarebbe una parabola, tuttavia non dobbiamo dimenticarci della variabile z che viene però lasciata completamente libera dall'equazione. Questo significa che per ogni coppia (\bar{x}, \bar{y}) che soddisfa l'equazione abbiamo tutte le terne (\bar{x}, \bar{y}, z) con z qualunque: l'immaginazione vi dovrebbe suggerire immediatamente che si tratta di un cilindro parabolico, se non siete convinti catalogatela e poi convincetevi.

5. $xy + yz = 0$.

Sempre nello spirito fin qui adottato, la prima cosa da notare è che possiamo raccogliere la y e dunque ottenere $y(x + z) = 0$ ritorniamo quindi al punto 2. con i piani $y = 0$ e $x + z = 0$.

6. $xy + yz = 1$.

Questa volta non salta all'occhio alcuna fattorizzazione intelligente, tuttavia tagliando la quadrica con un piano del tipo $y = k$ abbiamo su tale piano la retta $x + z = \frac{1}{k}$, il che ci dice che la quadrica è almeno rigata; tagliando poi la stessa con il piano $z = 0$ troviamo su questo secondo piano l'iperbole equilatera $xy = 1$ In effetti dalla classificazione si ottiene immediatamente che si tratta di un cilindro ($\text{rk}(\tilde{A}) = 3, \text{rk}(A) = 2$) e l'ultima osservazione ci precisa che è un altro cilindro ma iperbolico.

7. $xy + yz = -1$.

Convincetevi, anche guardando come cambia la matrice associata, che è esattamente la stessa cosa (anche se non ha gli stessi punti) dell'esempio precedente.

8. $xy + yz = y$.

Se a prima vista può ricordare i due appena analizzati, questo invece è completamente diverso e la chiave torna ad essere la fattorizzazione, in questo caso un semplice raccoglimento: $y(x + y - 1) = 0$ ci dice che siamo in presenza dell'unione di due piani.

9. $x^2 + yz = 1$.

Anche in questo caso non ci sono fattorizzazioni evidenti, ma di nuovo intersecando con il piano $x = 0$ notiamo che su questa superficie vivono delle iperboli mentre intersecando con il piano $y = 0$ otteniamo $x^2 - 1 = 0$ ovvero due rette (intese sulla quadrica). Dalla matrice associata ($\text{rk}(\tilde{A}) = 4, \text{rk}(A) = 3$) vediamo che si tratta di una quadrica generale a centro e vista l'osservazione precedente possiamo escludere che sia un ellissoide. Resta la questione se sia o meno a due falde, ma quest'ultima non è rigata dunque non fa al caso nostro: iperboloide a una falda è la risposta.

Si può fare in realtà molto meglio:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + yz &= 0 \\ (x - 1)(x + 1) + yz &= 0 \end{aligned}$$

e di qui le due schiere:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = ty \\ x + 1 = \frac{z}{t} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = sz \\ x + 1 = \frac{y}{s} \end{array} \right\} .$$

10. $x^2 + yz = 0$.

Di nuovo lo sparire del termine noto causa guai: visto che restano solo termini omogenei di secondo grado, la matrice associata cala di rango per cui la quadrica è singolare. La classificazione ci dice direttamente che abbiamo un cono.

11. $x^2 + yz = -1$.

Questo *sembra* identico all'esempio 9. ma così non è, infatti il piano $y = 0$ non dà più rette, anzi non dà proprio soluzioni e vi invito a verificare, magari usando la sua forma canonica, che, dato un iperboloido a una falda, non esistono piani che non lo intersechino... quindi questo è a due falde.

12. $x^2 + y + z = 1$.

La presenza della sola x al quadrato si può sfruttare intersecando con il piano $z = 1$ e scoprendo così sulla quadrica una parabola, visto poi che la classificazione ci dice che siamo in presenza di un cilindro, questo deve essere parabolico.

13. $x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$.

Visto che professiamo la bontà delle fattorizzazioni, quest'equazione si può riscrivere come $x^2 + (y - z)^2 = 0$ ovvero una somma di quadrati che come soluzione ha la sola retta $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ che tuttavia non è una quadrica, quindi c'è qualcosa che non va; in effetti l'equazione si scompone in

$$(y - z - ix)(y - z - iz) = 0$$

dove i è l'unità immaginaria, abbiamo dunque due piani immaginari per i quali la retta trovata è la traccia reale. L'algoritmo di catalogazione completo dà la stessa risposta.

Nella probabile eventualità in cui vi siano errori, siete pregati i inviarmi una segnalazione via mail. La versione di questo documento 1.0