Esercizio

(1) $f_t : (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}_3) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2)$

$\mathcal{E}_3 = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$f_t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + t x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}_2 = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$t \in \mathbb{R}$ parametro

La matrice rappresentativa di f_t nelle basi $\mathcal{E}_3$ dominio ed $\mathcal{E}_2$ codominio è

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f_t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t & -2 \end{pmatrix} := A_t$$

Per capire per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(\mathrm{Im}\, f_t) = 1$ devo semplicemente trovare per quali $t \in \mathbb{R}$

$$rg(A_t) = 1$$

perché le colonne di A_t sono generatori dell'immagine di f_t.

Ora

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2^{A_t} \to R_2^{A_t} - 2R_1^{A_t}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & t-4 & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

La matrice modificata con operazione elementare ha rango 1 $\Leftrightarrow$ $t-4$ non è un pivot $\Leftrightarrow$ $t-4=0$ $\Leftrightarrow$ $t=4$

Pertanto per $t \neq 4$ $\Rightarrow$ f_t è suriettiva sempre

Per $t=4$ $\Rightarrow$ f_4 è t.c. $\dim(\mathrm{Im}\, f_4) = 1$

e

$$M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = A_4$$

(2) Una base di $Im(f_4)$ è $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$

Una base di $Ker(f_4)$ è data da due qualsiasi vettori indipendenti che siano soluzione di

$$A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ma poiché $rg(A_4) = 1$, le due precedenti equazioni sono dipendenti (infatti sono proporzionali)

Utilizzando l'eliminazione di Gauss-Jordan con $t = 4$ come in $(*)$, il precedente sistema lineare omogeneo diventa equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{x_1 + 2x_2 - x_3 = 0}$$ equazione cartesiana del $Ker(f_4)$

Poiché ha un'unica equazione cartesiana in $\mathbb{R}^3$

$$\dim(Ker f_4) = 3 - \#\text{ eq. cartesiane (indipendenti)} = 3 - 1 = 2$$

che è compatibile con il fatto che

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \dim(Ker f_4) + \underbrace{\dim(Im f_4)}_{1}$$

Risolvendo $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ con

$x_3 = t$
$x_2 = s$
$x_1 = -2s + t$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s}_{\text{eq. parametriche } Ker(f)} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

La base che prendiamo per $\ker(f_4)$ è

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 + \underline{e}_3 \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

è proporzionale a $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi non cambia di molto

(3) Per estendere $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ di modo tale che $\underline{b}_3 \in \overleftarrow{f}(\underline{w})$ = insieme delle controimmagini di $\underline{w}$ $= \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_4(\underline{x}) = \underline{0}\}$

devo prendere una qualsiasi soluzione del sistema

$$A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Questo sistema

$$A_4 \circ \underline{x} = \underline{w}$$

ha matrice completa

$$(A_4|\underline{w}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{matrix}}_{A_4} \quad \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}}_{\underline{w}}$$

e poiché $\underline{w} \in \operatorname{Im}(f_4)$ è OVVIO che il sistema (**) DEVE ESSERE COMPATIBILE

Per riprova utilizziamo Rouchè - Capelli

$$rg(A_4) = 1 = \dim(\operatorname{Im} f_4)$$

$rg(A_4|\underline{w}) = 1$ perchè $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ coincide con la II colonna di A_4

Per Rouchè Capelli (**) è compatibile e le soluzioni costituiscono un <u>sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$</u>

$A_4 \underline{x} = \underline{w}$

eliminazione Gauss-Jordan

$$C = (A_4 | \underline{w}) \xrightarrow{R_2^C \longrightarrow R_2^C - 2R_1^C} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x_1 + 2x_2 - x_3 = 2}$$

equazione cartesiana del sottospazio affine $\overleftarrow{f}_4(\underline{w}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, f_4(\underline{x}) = \underline{w}\}$

$x_3 = t$

$x_2 = s$

$x_1 = 2 - 2s + t$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_1} - s \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}$$

soluzione generale dell'omogeneo associato $A_4 \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ equivalentemente generico vettore in $\ker(f_4)$

vettore particolare per cui $f_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{w}$

Infatti

$$A_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ ok}$$

Prendo ad esempio $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma sarebbe andato bene qualsiasi della forma

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } (t, s) \neq (0, 0)$$

visto che

$$f_4\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \underset{f_4 \text{ lineare}}{=} f_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \underbrace{f_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s f_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base } \ker(f_4)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) Per verificare che $\mathcal{B}=\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ è una nuova base di $\mathbb{R}^3$ considero la matrice cambiamento di base

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante è una

<u>FORMA MULTILINEARE ALTERNANTE NON NULLA</u>

è suff. verificare che

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right) \neq 0$$

Per calcolare il determinante 3×3 uso <u>metodo di Sarrus</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right) = \left(1 \cdot (-1) \cdot (0) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0\right) - \left(1 \cdot (-1) \cdot (2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2\right) = 0 - (-2) = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è una base per $\mathbb{R}^3$

(5) Il vettore $\underline{v} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ha coordinate in base $\mathcal{B}$ date dalla regola

$$\underbrace{\underline{X}}_{\text{Coordinate di } \underline{v} \text{ in base } \mathcal{E}_3} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} \underbrace{\underline{Y}}_{\text{coordinate di } \underline{v} \text{ in base } \mathcal{B}}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Poiché vogliamo trovare $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ allora

o risolvo il sistema lineare

$$\begin{cases} 1 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ 1 = -y_2 \\ 0 = y_3 \end{cases}$$

Oppure calcolo $\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1} = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ e faccio

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Faremo il secondo modo con

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} \mid I_3\right) \longrightarrow \left(I_3 \mid \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \longrightarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow -\frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

Pertanto

$$\left(M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Per controllare che i conti siano giusti, verifico che

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}} \circ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3} = I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Le coordinate di $\underline{v}$ in base $\mathcal{B}$ sono

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \underline{v} = -\underline{b}_2 + \frac{3}{2}\underline{b}_3$$

(6)

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}^3) \arrow[rr, "f_4 = M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{E}^3}(f_4) = A_4"] \arrow[d, "Id_{\mathbb{R}^3}"', shift right] & & (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}^2) \arrow[d, shift left] \\
(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \arrow[rr, "f_4 = M^{\mathcal{E}^2}_{\mathcal{B}}(f_4)"] \arrow[u, shift right] & & (\mathbb{R}^2, \mathcal{E}^2) \arrow[u, "Id_{\mathbb{R}^2}"', shift left]
\end{tikzcd}$$

Per conoscere $M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{B}}(f_4)$ devo percorrere i diagramma rosso $\uparrow \rightarrow \downarrow$ cioè

$$\underset{\rightarrow}{f_4} = \underset{\downarrow}{Id_{\mathbb{R}^2}} \circ \underset{\rightarrow}{f_4} \circ \underset{\uparrow}{Id_{\mathbb{R}^3}}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(f_4) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(Id_{\mathbb{R}^2}) \circ M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^2}(f_4) \circ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}(Id_{\mathbb{R}^3})$$

$$M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^2}(f_4) = A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(Id_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}^2}^{\mathcal{E}^2}(Id_{\mathbb{R}^2}) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

prodotto associativo

$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}(f_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è coerente perchè

$$f_4(\underline{b}_1) = \underline{0} \qquad f_4(\underline{b}_2) = \underline{0} \qquad f_4(\underline{b}_3) = \underline{w}$$

(7) Per determinare la base duale $\mathcal{B}^\vee$ di $\mathcal{B}$ devo trovare 3 funzionali lineari indipendenti

$$\underline{b}_1^*, \underline{b}_2^*, \underline{b}_3^* \in (\mathbb{R}^3)^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

t.c.

$$\underline{b}_i^*(\underline{b}_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i \neq j \leq 3$$

Sappiamo che

$$\underline{b}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_3$$
$$\underline{b}_2 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2 \qquad \text{e} \qquad (\mathcal{E}^3)^\vee = \{\underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^*\}$$
$$\underline{b}_3 = 2\underline{e}_1 \qquad\qquad \text{è t.c. } \underline{e}_i^*(\underline{e}_j) = \delta_{ij}$$

Poiché

$$\underline{b}_1^*, \underline{b}_2^*, \underline{b}_3^* \in (\mathbb{R}^3)^\vee$$

e $(\mathcal{E}^3)^\vee$ è una base di $(\mathbb{R}^3)^\vee \Rightarrow$

$$\underline{b}_1^* = \alpha_{11}\underline{c}_1^* + \alpha_{12}\underline{c}_2^* + \alpha_{13}\underline{c}_3^*$$

$$\underline{b}_2^* = \alpha_{21}\underline{c}_1^* + \alpha_{22}\underline{c}_2^* + \alpha_{23}\underline{c}_3^*$$

$$\underline{b}_3^* = \alpha_{31}\underline{c}_1^* + \alpha_{32}\underline{c}_2^* + \alpha_{33}\underline{c}_3^*$$

Per definizione di base duale imponiamo

$$\begin{cases} \underline{b}_1^*(\underline{b}_1) = 1 \\ \underline{b}_1^*(\underline{b}_2) = 0 \\ \underline{b}_1^*(\underline{b}_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha_{11}\underline{c}_1^* + \alpha_{12}\underline{c}_2^* + \alpha_{13}\underline{c}_3^*)(\underline{c}_1 + \underline{c}_3) = 1 \\ (\alpha_{11}\underline{c}_1^* + \alpha_{12}\underline{c}_2^* + \alpha_{13}\underline{c}_3^*)(2\underline{c}_1 - \underline{c}_2) = 0 \\ (\alpha_{11}\underline{c}_1^* + \alpha_{12}\underline{c}_2^* + \alpha_{13}\underline{c}_3^*)(2\underline{c}_1) = 0 \end{cases}$$

Per linearità

$$\begin{cases} \alpha_{11}\underbrace{\underline{c}_1^*(\underline{c}_1)}_{1} + \alpha_{12}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_2^*(\underline{c}_1)}} + \alpha_{13}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}} + \alpha_{11}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_1^*(\underline{c}_3)}} + \alpha_{12}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_2^*(\underline{c}_3)}} + \alpha_{13}\underbrace{\underline{c}_3^*(\underline{c}_3)}_{1} = 1 \\ 2\alpha_{11}\overset{1}{\underline{c}_1^*(\underline{c}_1)} + 2\alpha_{12}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_2^*(\underline{c}_1)}} + 2\alpha_{13}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}} - \alpha_{11}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_1^*(\underline{c}_2)}} - \alpha_{12}\overset{1}{\underline{c}_2^*(\underline{c}_2)} - \alpha_{13}\overset{0}{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_2)}} = 0 \\ 2\alpha_{11}\underbrace{\underline{c}_1^*(\underline{c}_1)}_{1} + 2\alpha_{12}\underbrace{\cancel{\underline{c}_2^*(\underline{c}_1)}}_{0} + 2\alpha_{13}\underbrace{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}}_{0} = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{13} = 1 \\ 2\alpha_{11} - \alpha_{12} = 0 \\ 2\alpha_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{11} = 0 \\ \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{13} = 1 \end{cases}$$

Ma allora $\boxed{\underline{b}_1^* = \underline{c}_3^*}$

Infatti

$$\underline{b}_1^*(\underline{b}_1) = \underline{c}_3^*(\underline{c}_1 + \underline{c}_3) = \overset{0}{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}} + \underbrace{\underline{c}_3^*(\underline{c}_3)}_{1} = 1$$

$$\underline{b}_1^*(\underline{b}_2) = \underline{c}_3^*(2\underline{c}_1 - \underline{c}_2) = 2\underbrace{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}}_{0} - \underbrace{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_2)}}_{0} = 0$$

$$\underline{b}_1^*(\underline{b}_3) = \underline{c}_3^*(2\underline{c}_1) = 2\underbrace{\cancel{\underline{c}_3^*(\underline{c}_1)}}_{0} = 0$$

ok

Con la stessa strategia

$$\begin{cases} \underline{b}_2^*(\underline{b}_1)=0 \\ \underline{b}_2^*(\underline{b}_2)=1 \\ \underline{b}_2^*(\underline{b}_3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{21}+\alpha_{23}=0 \\ 2\alpha_{21}-\alpha_{22}=1 \\ 2\alpha_{21}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{23}=0 \\ \alpha_{22}=-1 \\ \alpha_{21}=0 \end{cases}$$

$$\boxed{\underline{b}_2^* = -\underline{c}_2^*}$$

che effettivamente verifica le condizioni

$$\underline{b}_2^*(\underline{b}_i)=\delta_{2i} \qquad 1\le i\le 3$$

Infine

$$\begin{cases} \underline{b}_3^*(\underline{b}_1)=0 \\ \underline{b}_3^*(\underline{b}_2)=0 \\ \underline{b}_3^*(\underline{b}_3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{31}+\alpha_{33}=0 \\ 2\alpha_{31}-\alpha_{32}=0 \\ 2\alpha_{31}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{31}=\frac{1}{2} \\ \alpha_{33}=-\frac{1}{2} \\ \alpha_{32}=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{b}_3^* = \frac{1}{2}\underline{c}_1^* + \underline{c}_2^* - \frac{1}{2}\underline{c}_3^*}$$

Pertanto

$$M_{\mathcal{B}^\vee}^{(\mathcal{E}^3)^\vee} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$