Svolgimento Esercizi
Esercitazione VII
Prof. F. Flamini

Esercizio 1 Esonero

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

(a) $A = \{ Y \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid M \cdot Y \in \mathrm{Span}\{M\} \} \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$ è sp. vett? Se sì $\dim(A) = ?$

$Y \in A \iff \exists\ \alpha = \alpha_Y \in \mathbb{R}$ t.c. $M \cdot Y = \alpha_Y M$ per def. di A

- Ora $A \neq \emptyset$ infatti $Y = O \in A$, perché $M \cdot O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot M$
- $\forall\ Y_1, Y_2 \in A$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 \in A$$

infatti

$$M \cdot (\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha\, M \cdot Y_1 + \beta\, M \cdot Y_2$$

Per hp. $Y_1 \in A$, i.e. $\exists\ \gamma_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $M \cdot Y_1 = \gamma_1 M$
Per hp $Y_2 \in A$, i.e. $\exists\ \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $M \cdot Y_2 = \gamma_2 M$

$$\Rightarrow \alpha\, M \cdot Y_1 + \beta\, M \cdot Y_2 = \alpha(\gamma_1 M) + \beta(\gamma_2 M) =$$

$= (\alpha \gamma_1 + \beta \gamma_2) M$ che verifica che $\alpha Y_1 + \beta Y_2 \in A$.

$\Rightarrow$ A sottospazio di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Poiché $A \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(A) \leq 4$. Ma se prendiamo $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$ infatti $M \cdot E_{11} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$

che non è proporzionale a M, cioè $M \cdot E_{11} \notin \mathrm{Span}\{M\}$

$\Rightarrow E_{11} \notin A \Rightarrow A \subsetneq M_{2,2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim(A) < 4$

Notiamo che ponendo $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allora

$$M \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 4c & 6b - 4d \\ 9a - 6c & 9b - 6d \end{pmatrix}$$

Una siffatta matrice è proporzionale a M se $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

②

$$\begin{pmatrix} 6a-4c & 6b-4d \\ 9a-6c & 9b-6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\alpha & -4\alpha \\ 9\alpha & -6\alpha \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 6a-4c = 6\alpha \\ 6b-4d = -4\alpha \\ 9a-6c = 9\alpha \\ 9b-6d = -6\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} 6(a-\alpha)-4c=0 \\ 6b-4(d-\alpha)=0 \\ 9(a-\alpha)-6c=0 \\ 9b-6(d-\alpha)=0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni indipendenti. Infatti

* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M \cdot I_2 = M$ con $\alpha = 1$

$\Rightarrow I_2 \in A$

* $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{Y_1} \Rightarrow M \cdot Y_1 = \begin{pmatrix} 12-12 & 0 \\ 18-18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha = 0$

$\Rightarrow Y_1 \in A$

* $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{Y_2} \Rightarrow M \cdot Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 12-12 \\ 0 & 18-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\alpha = 0$

e poiché $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sono indip. $\Rightarrow \dim(A) \geq 3$

Visto che $\dim(A) < 4 \Rightarrow \boxed{\dim(A) = 3}$

(b) $\underline{\mathcal{B} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid M \cdot X \in \operatorname{Span}\{X\} \}}$ è ssp. di $\mathbb{R}^2$? se sì $\dim(\mathcal{B})$?

Stiamo cercando tutti quegli $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ t.c. $M\underline{x} = \alpha\, \underline{x}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = 0$: $\quad M\underline{x} = \underline{0}$ i.e. $\underline{x} \in \operatorname{Ker}(L_M)$

Se $\alpha \neq 0$: $\quad M \cdot \underline{x} = \alpha\, \underline{x} \iff \underline{x} = \frac{1}{\alpha}(M\underline{x}) \iff \underline{x} \in \operatorname{Im}(L_M)$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \operatorname{Ker}(L_M) \cup \operatorname{Im}(L_M)$

Ma $\operatorname{Im}(L_M) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

Mentre $\operatorname{Ker} L_M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 6x - 4y = 0 \right\} \rightsquigarrow$ ricordo che $rg(M) = 1$

$6x-4y=0 \iff 3x-2y=0 \iff \begin{cases} x=2t \\ y=3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

cioè $\quad \ker(L_M) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$

In altre parole

$$\ker(L_M) = \operatorname{Im}(L_M) \Rightarrow \underline{B = \ker(L_M) \text{ è ssp. di } \mathbb{R}^2}$$

Poiché $\quad 1 = rg(M) = \dim(\operatorname{Im} L_M) \Rightarrow$

$$\dim(B) = \dim(\ker L_M) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nullità} \\ \text{più rango}}}{=} 2 - \dim \operatorname{Im}(L_M) = 2-1 = 1$$

Esercizio 2 Esonero

(a) $P = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -12 \end{cases}$$

<u>$\mathcal{S}$ è un sist. eq. cartesiane per $P + \operatorname{Span}\{\underline{v}\}$?</u>

Notiamo che $P \in Sol(\mathcal{S})$ e $\mathcal{S}$ è quindi compatibile.

La giacitura di $Sol(\mathcal{S})$ è data dal sist. omogeneo associato

$$\mathcal{S}_0 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

notate che $E_3 = 3E_2 - 2E_1$

$\Rightarrow \mathcal{S}_0$ è equivalente a $\mathcal{S}_0' : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

e $\quad A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha $rg(A') = 2$ visto che

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

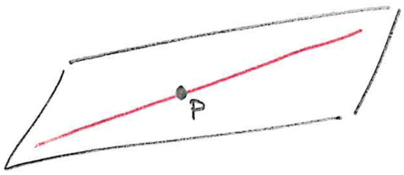
$\Rightarrow \dim(\mathrm{Sol}(\mathcal{S}'_0)) = 4 - \mathrm{rg}(A') = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{come sp. vett}}}{\dim} (\mathrm{Sol}(\mathcal{S}_0)) = 2$

$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{come sp. affine}}}{\dim} (\mathrm{Sol}(\mathcal{S})) = 2$ cioè $\mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ è un piano

Pertanto $p + \mathrm{Span}\{\underline{v}\} \neq \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$

Però visto che $p \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S})$ e $\underline{v} \in \mathrm{Sol}(\mathcal{S}'_0) \Rightarrow$ la retta $p + t\underline{v}$ è contenuta nel piano $\mathrm{Sol}(\mathcal{S})$



(b) $\underline{S_1 : \{ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \quad \text{e} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}}$

$\underline{\exists\, A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } L_A(\mathrm{Sol}(S_1)) = Z \ ?}$

$\underline{\exists\, B \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } L_B(Z) = \mathrm{Sol}(S_1) \ ?}$

S_1 è un iperpiano (piano) affine di $\mathbb{R}^3$

Poiché eq. cartesiana non omogenea $\Rightarrow S_1$ non è ssp. vettoriale di $\mathbb{R}^3$. In altre parole

$$\mathrm{Sol}(S_1) : \ \underline{x} = p + t\underline{v}_1 + s\underline{v}_2$$

con $\overrightarrow{OP} \notin \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

In effetti se poniamo
$x_3 = s$
$x_2 = t$
$x_1 = -2t - s + 6$
$\Rightarrow \underline{X} = \underset{\substack{\downarrow \\ p}}{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t \underset{\substack{\downarrow \\ \underline{v}_1}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + s \ \underset{\substack{\downarrow \\ \underline{v}_2}}{(\ldots}$

Pertanto

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono lin. indip. in $\mathbb{R}^3$ visto che

$$\det \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 \quad \text{per Laplace}$$

Per Z: $\underline{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{q} + \text{Span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{w}_2} \right\}$

come prima ho 3 vettori

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{w}_1 \quad \underline{w}_2$$

Poiché $\{\overrightarrow{OP}, \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists$ sicuramente $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ t.c. per esempio

$$L_A(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OQ} \quad L_A(\underline{v}_1) = \underline{w}_1 \quad L_A(\underline{v}_2) = \underline{w}_2$$

Visto che ogni elemento di $Sol(S_1)$ è

$$\underline{X} = P + t\,\underline{v}_1 + s\,\underline{v}_2 = \overrightarrow{OP} + t\,\underline{v}_1 + s\,\underline{v}_2$$

$$\Rightarrow \quad L_A(x) = L_A(\overrightarrow{OP} + t\,\underline{v}_1 + s\,\underline{v}_2) =$$

$$= L_A(\overrightarrow{OP}) + t\,L_A(\underline{v}_1) + s\,L_A(\underline{v}_2) = \overrightarrow{OQ} + t\,\underline{w}_1 + s\,\underline{w}_2$$

cioè $\quad L_A(Sol(S_1)) \subseteq Z$

Ma poiché $\dim(Z) = \dim(Sol\,S_1) = 2 \quad \Rightarrow \boxed{L_A(Sol(S_1)) = Z}$

Notiamo invece che

$$Z: \begin{cases} X_1 = 1 + t\,1 + s\,2 \\ X_2 = 2 + t\,3 + s\,5 \\ X_3 = 1 + t\,2 + s\,3 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 - 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$9(X_1 - 1) + 4(x_2 - 2) + 5(x_3 - 1) - [6(X_3 - 1) + 10(X_1 - 1) + 3(x_2 - 2)] = 0$$

$$0 = -(x_1-1)+(x_2-2)-(x_3-1) = -x_1+1+x_2-2-x_3+1$$

$$\Rightarrow \quad -x_1+x_2-x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1-x_2+x_3=0$$

Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché definito da eq. cartesiana omogenea $\Rightarrow$

$\underline{0} \in Z$ mentre $\underline{0} \notin Sol(S_1)$

perché $Sol(S_1)$ è sottospazio affine ma non vettoriale di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow \nexists\ B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ t.c.

$$L_B(Z) = Sol(S_1)$$

altrimenti $\underset{\underline{0}\in Z}{L_B(\underline{0})} = B \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{0} \in Sol(S_1)$ #

Esercizio 3 Esonero

(a) $f: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \\ 4 & c & d\end{pmatrix}$

f è lineare? Se sì base $\ker f$?

Per Laplace rispetto I colonna

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \\ 4 & c & d\end{pmatrix} = +4\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b\end{pmatrix} = 4(3b-a) =$$
$$= 12b-4a$$

Pertanto, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$

$$f(\alpha A_1+\beta A_2) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 \\ \alpha c_1+\beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\alpha A_1+\beta A_2}} \\ 4 & & \end{pmatrix}$$

$= 12(\alpha b_1+\beta b_2) - 4(\alpha a_1+\beta a_2) =$

dal calcolo precedente

$= \alpha(12b_1 - 4d_1) + \beta(12b_2 - 4d_2) =$

$= \alpha \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & & \\ 4 & A_1 & \end{pmatrix} + \beta \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & & \\ 4 & A_2 & \end{pmatrix} =$

$= \alpha f(A_1) + \beta f(A_2) \Rightarrow$ <u>f è lineare</u>

Poiché

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 12b - 4d \in \mathbb{R}$ con $d, b \in \mathbb{R}$ variabili

$\Rightarrow$ f suriettiva su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\underline{\underline{\dim(\ker(f)) = \dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{R}) = 4 - 1 = 3}}$

$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, 12b - 4d = 0 \right\} \Leftrightarrow \quad 4d = 12b$

$\Leftrightarrow d = 3b$

$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 3b & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ è vero che

$\underline{\underline{\det(M^t \circ M) = \det(M \circ M^t)\ ?}}$

<u>Attenzione</u> non si può applicare Binet perché

M e M^t non quadrate

Invece

$\underset{4\times 3}{M^t} \circ \underset{3\times 4}{M} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ mentre $\underset{3\times 4}{M} \circ \underset{4\times 3}{M^t} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

Notiamo che $M^t \circ M$ è associata a

$$L_{M^t \circ M} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$$

e

$$L_{M^t \circ M} = L_{M^t} \circ L_M$$

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{L_M} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_{M^t}} \mathbb{R}^4$$

Poiché $L_M : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow L_M$ non iniettiva

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, L_M \neq \{\underline{0}\}$ e poiché $L_{M^t \circ M} = L_{M^t} \circ L_M$

$\Rightarrow \{\underline{0}\} \neq \mathrm{Ker}(L_M) \subseteq \mathrm{Ker}(L_{M^t \circ M})$

$\Rightarrow$ anche $L_{M^t \circ M}$ ha nucleo non banale

$\Rightarrow L_{M^t \circ M}$ è non iniettiva $\Rightarrow$

$\underline{\det(M^t \circ M) = 0.}$

Invece $L_{M \circ M^t} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ ottenuto come

$$L_M \circ L_{M^t}$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_{M^t}} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{L_M} \mathbb{R}^3$$

Notiamo che

$rg(M) = 3$ infatti $\det(M(1,2,3|1,2,4)) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow rg(M^t) = 3 \Rightarrow \begin{cases} L_{M^t} \text{ è iniettiva} \\ L_M \text{ è suriettiva} \end{cases}$

Poiché

$$L_{M\circ M^t} = L_M \circ L_{M^t} \text{ se } Im(L_{M^t}) \cap Ker(L_M) = \{\underline{0}\}$$

$\Rightarrow L_{M\circ M^t}$ è suriettiva come $L_M \Rightarrow L_{M\circ M^t}$ è automorfismo di $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\underline{\det(M \circ M^t) \neq 0}$

Mi sono ridotto a dimostrare che

$$\underline{Im(L_{M^t}) \cap Ker(L_M) = \{\underline{0}\}}$$

$$Im(L_{M^t}) = Span\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\-2\end{pmatrix}}_{\text{indip. perché } rg(M) = rg(M^t) = 3}\right\}$$

Invece
$$Ker(L_M): \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

e nessuno dei vettori della $Im(L_{M^t})$ soddisfa

$\Rightarrow Ker(L_M) \cap Im(L_{M^t}) = \{\underline{0}\}$ ok!

Esercizio 4

$\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ $\quad M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ t.c.

$L_M(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 + \underline{e}_2 \quad L_M(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$

$L_M(\underline{e}_3) = \underline{0} \quad L_M(\underline{e}_4) = 2\underline{e}_3$

(a) Calcolare M^3 e quante $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ t.c. $A^3 = M^3$?

M^3 è associata a L_{M^3} quindi

$L_{M^3}(\underline{e}_1) = L_M(L_M(L_M(\underline{e}_1))) = L_M(L_M(-\underline{e}_1 + \underline{e}_2)) =$

$= L_M(-L_M(\underline{e}_1) + L_M(\underline{e}_2)) = L_M(\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2) = L_M(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

$\Rightarrow L_{M^3}(\underline{e}_1) = L_M(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = 2L_M(\underline{e}_1) + L_M(\underline{e}_2)$

$= 2(-\underline{e}_1 + \underline{e}_2) + \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 = -\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$

$$\boxed{L_{M^3}(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2}$$

$L_{M^3}(\underline{e}_2) = L_M(L_M(L_M(\underline{e}_2))) = L_M(L_M(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2))$

$= L_M(L_M(\underline{e}_1) + 2L_M(\underline{e}_2)) = L_M(-\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2))$

$= L_M(\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2) = L_M(\underline{e}_1) + 5L_M(\underline{e}_2) =$

$= -\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 5\underline{e}_1 + 10\underline{e}_2 = 4\underline{e}_1 + 11\underline{e}_2$

$$\boxed{L_{M^3}(\underline{e}_2) = 4\underline{e}_1 + 11\underline{e}_2}$$

$\boxed{L_{M^3}(\underline{e}_3) = \underline{0}}$ perché $L_M(\underline{e}_3) = \underline{0}$

$L_{M^3}(\underline{e}_4) = L_{M^2}(L_M(\underline{e}_4)) = L_{M^2}(2\underline{e}_3) = 2L_{M^2}(\underline{e}_3) = \underline{0}$

perché $L_M(\underline{e}_4) = 0 \Rightarrow \boxed{L_{M^3}(\underline{e}_4) = \underline{0}}$

Quindi

$$\boxed{M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Sicuramente ne esistono infinite di matrici A t.c. $A^3 = M^3$

Visto che $L_M(\underline{e}_3) = \underline{0}$ e $L_M(\underline{e}_4) = 2\underline{e}_3 \Rightarrow L_{M^2}(\underline{e}_4) = \underline{0}$

basta prendere ad esempio

$L_A(\underline{e}_1) = L_M(\underline{e}_1)$

$L_A(\underline{e}_2) = L_M(\underline{e}_2)$

$L_A(\underline{e}_3) = L_M(\underline{e}_3) = \underline{0}$

$L_A(\underline{e}_4) = \alpha L_M(\underline{e}_4) = 2\alpha\underline{e}_3$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ parametr cioè

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ parametro libero

Infatti

- $L_{A^3}(\underline{e}_1) = L_{M^3}(\underline{e}_1)$
- $L_{A^3}(\underline{e}_2) = L_{M^3}(\underline{e}_2)$
- $L_{A^3}(\underline{e}_3) = L_{M^3}(\underline{e}_3)$
- $L_{A^3}(\underline{e}_4) = L_{A^2}(L_A(\underline{e}_4)) = L_{A^2}(\alpha L_M(\underline{e}_4))$

$= L_A(L_A(\alpha 2 \underline{e}_3)) = L_A(2\alpha L_A(\underline{e}_3)) =$

$= 2\alpha L_A(L_A(\underline{e}_3)) = 2\alpha L_A(L_M(\underline{e}_3)) =$

$= 2\alpha L_A(\underline{0}) = \underline{0} = L_{M^3}(\underline{e}_4)$

(b) Per tutte le $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ t.c. $A^3 = M^3$ quali affermazioni vere?

(i) $Im(L_{A^3}) \subseteq Im(L_{A^2})$

(ii) $Im(L_{A^2}) \subseteq Im(L_{A^3})$

(i) $L_{A^3} = L_{A^2} \circ L_A$ cioè

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 \arrow[r, "L_A"] \arrow[rr, bend right, "L_{A^3}"'] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, "L_{A^2}"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $Im(L_{A^3}) \subseteq Im(L_{A^2})$ quindi (i) è banalmente vera

(ii) Siccome (i) è vera sempre, per determinare per quali matrici A t.c. $A^3 = M^3$ vale (ii) è suff. andare a vedere quando si ha

$$Im(L_{A^2}) = Im(L_{A^3}) = Im(L_{M^3})$$

Visto che $rg(M^3) = 2 \Rightarrow rg(A^3) = 2$

$\Rightarrow \dim Im(L_{A^3}) = 2$

Inoltre

$$Im(L_{A^3}) \subseteq Im(L_A)$$

$$\Rightarrow \qquad 2 \leq \dim(Im\, L_A) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

Pertanto A può essere t.c.

$$rg(A) = \begin{cases} 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

* Se per assurdo $rg(A) = 4 \Rightarrow L_A$ isomorfismo

$\Rightarrow L_{A^3} = L_A \circ L_A \circ L_A$ isomorfismo # perché

$rg(L_{A^3}) = rg(L_{M^3}) = 2 \Rightarrow rg(A) = 4$ non può capitare

* Sia $rg(A) = 3$ visto che

$$\underbrace{Im(L_{A^3})}_{\dim = rg = 2} \subseteq Im(L_{A^2}) \subseteq \underbrace{Im(L_A)}_{3 = rg = \dim}$$

$$\Rightarrow \quad \dim(Im\, L_{A^2}) = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

• Se $\dim(Im\, L_{A^2}) = 2$, visto che $\dim(Im(L_{A^3})) = 2$

e $Im(L_{A^3}) \subseteq Im(L_{A^2}) \Rightarrow$ in tal caso $Im(L_{A^2}) = Im(L_{A^3})$

per motivi di dimensione e la (ii) è vera

• Se $\dim(Im\, L_{A^2}) = 3 \Rightarrow Im(L_{A^2}) = Im(L_A)$

perché $Im(L_{A^2}) \subseteq Im(L_A)$ e di stessa dimensione

Ma allora

$$Im(L_{A^3}) = L_A(Im(L_{A^2})) = L_A(Im(L_A)) = Im(L_{A^2})$$

che comporterebbe

$\dim(\mathrm{Im}(L_{A^3})) = \dim(\mathrm{Im}\, L_{A^2}) = 3$

assurdo perché $\dim(\mathrm{Im}(L_{A^3})) = rg(A^3) = rg(M^3) = 2$

Pertanto <u>questo caso non può capitare</u>

* <u>Sia $rg(A) = 2$</u>

visto che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 2 = rg(A^3) = \dim}}{\mathrm{Im}(L_{A^3})} \subseteq \mathrm{Im}(L_{A^2}) \subseteq \underset{\substack{\downarrow \\ \dim = rg(A) = 2}}{\mathrm{Im}(L_A)}$$

$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}\, L_{A^2}) = 2$ necessariamente

non solo $\mathrm{Im}(L_{A^2}) = \mathrm{Im}(L_{A^3})$ e la (ii) è vera.

<u>Pertanto: Tutte le A t.c. $A^3 = M^3$ soddisfano</u>
<u>(i) e (ii).</u>

Svolgimenti Esercizi 5 e 6 di VII Foglio Esercitazioni

Svolgimento Esercizio 5. (i) Le condizioni date

$$\varphi(\underline{e}_1+\underline{e}_3)=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3,\ \ \varphi(2\underline{e}_1)=\underline{e}_2,\ \ \varphi(\underline{e}_2+3\underline{e}_3)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3$$

si possono riscrivere usando la linearita' di φ. Infatti si ha

$$\varphi(\underline{e}_1)+\varphi(\underline{e}_3)=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3,\ \ 2\varphi(\underline{e}_1)=\underline{e}_2,\ \ \varphi(\underline{e}_2)+3\varphi(\underline{e}_3)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3.$$

Quindi dalla seconda eguaglianza vettoriale si ottiene

$$\varphi(\underline{e}_1)=\frac{1}{2}\underline{e}_2.$$

Pertanto, dalla prima eguaglianza vettoriale si ha

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{e}_3)&=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3-\varphi(\underline{e}_1)=\\ &=\underline{e}_1+\underline{e}_2+2\underline{e}_3-\frac{1}{2}\underline{e}_2=\underline{e}_1+\frac{1}{2}\underline{e}_2+2\underline{e}_3.\end{aligned}$$

Infine dalla terza eguaglianza vettoriale otteniamo

$$\varphi(\underline{e}_2)=3\underline{e}_1+5\underline{e}_2+6\underline{e}_3-3\varphi(\underline{e}_3),$$

sostituendo la descrizione di $\varphi(\underline{e}_3)$ trovata precedentemente si ottiene finalmente che

$$A=M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^3}(\varphi)\begin{pmatrix}0&0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&2\end{pmatrix}.$$

(ii) Poiche' le prime 2 righe della matrice A sono indipendenti, ma la I e la III riga sono proporzionali, si ha che $rg(A)=2$. Ne deduciamo quindi che $\dim(Im(\varphi))=2$. Dal Teorema del Rango (o di nullita' e rango), si ottiene inoltre che $\dim(Ker(\varphi))=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(Im(\varphi))=3-2=1$.
(iii) Il nucleo di φ ha, nelle coordinate date da $\mathcal{E}^3$ del dominio, equazioni cartesiane dedotte dal sistema lineare omogeneo

$$A\underline{x}=\underline{0}.$$

Poiche' la matrice A ha rango due, $Ker(\varphi)$ e' definito da due equazioni cartesiane indipendenti. Le soluzioni di questo sistema omogeneo dipendono dunque da

$$\dim(\mathbb{R}^3)-rg(A)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(Im(\varphi))=3-2=1$$

parametro libero, che e' proprio la dimensione del nucleo come doveva essere.

Risolvendo il banale sistema lineare omogeneo si trova che $Ker(\varphi)=\mathrm{Span}\{\underline{v}_1\}$, dove

$$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}7\\-1\\0\end{pmatrix}$$

espresso in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^3$, i.e.

$$\underline{v}_1=7\underline{e}_1-\underline{e}_2.$$

(iii) I vettori

$$\underline{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad \text{e} \quad \underline{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

sono banalmente linearmente indipendenti, perche' non proporzionali. Il sottospazio W dato dal loro Span, i.e. $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, ha pertanto equazioni parametriche

$$x_1 = t, \; x_2 = -t + s, \; x_3 = 2t, \; t, s \in \mathbb{R}.$$

Poiche' $\underline{v}_1 \notin W$, sicuramente la retta vettoriale da lui generata non puo' essere contenuta in W. Se ne deduce che $Ker(\varphi) \cap W = \{\underline{0}\}$. Pertanto W e $Ker(\varphi)$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

Dalla formula di Grassmann

$$\dim(W \oplus Ker(\varphi)) = \dim(W) + \dim(Ker(\varphi)) = 2 + 1 = 3.$$

Visto che $W \oplus Ker(\varphi)$ e' sottospazio di $\mathbb{R}^3$ della stessa dimensione, vuol dire che

$$W \oplus Ker(\varphi) = \mathbb{R}^3$$

e questo dimostra che W e' **un sottospazio supplementare** a $Ker(\varphi)$ in $\mathbb{R}^3$.
(v) La base $\mathcal{V}$ e' semplicemente quella data dai vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

espressi in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^3$.

Sappiamo gia' che

$$A\underline{v}_1 = \underline{0}$$

che, in termini di φ, ci dice semplicemente

$$\varphi(\underline{v}_1) = \underline{0}.$$

Se ora calcoliamo $A\underline{v}_2$, notiamo che

$$A\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dove il vettore a destra e' il doppio di $\underline{v}_2$. In termini di φ questo vuol dire semplicemente che

$$\varphi(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_2.$$

Infine calcolando $A\underline{v}_3$, notiamo che

$$A\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove il vettore a destra e' $\frac{7}{2}\underline{v}_2$. In termini di φ questo vuol dire semplicemente che

$$\varphi(\underline{v}_3) = \frac{7}{2}\underline{v}_3.$$

Pertanto

$$B := M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Ritroviamo che il rango di B e' 2, esattamente come quello di A. Ma in effetti il rango di una matrice rappresentativa di un'applicazione lineare fornisce la dimensione

dell'immagine dell'applicazione lineare che la matrice rappresenta. Dunque e' una proprieta' **intrinseca** dell'applicazione lineare φ, cioe' non dipende da come φ viene rappresentata. E' dunque una proprieta' comune a tutte le matrici rappresentative della medesima applicazione lineare φ.
(vi) Dai conti precedenti abbiamo visto che

$$A\underline{v}_1 = \underline{0},\ A\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ A\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In termini dell'applicazione lineare φ questo fatto si rilegge cosi':

$$\varphi(\underline{v}_1) = \underline{0},\ \varphi(\underline{v}_2) = 2\underline{e}_1 - 2\underline{e}_2 + 4\underline{e}_3,\ \varphi(\underline{v}_3) = \frac{7}{2}\underline{e}_2.$$

Pertanto

$$C := M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{V}}(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Anche C ha rango 2 per i motivi sopra descritti.

Svolgimento Esercizio 6. (i) La matrice A e' semplicemente

$$A = M_{\mathcal{E}^3,\, \mathcal{E}^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Notiamo che $rg(A) = 2$ dato che la III riga e' data da $2I + 2II$ mentre I e II riga sono indipendenti. Pertanto f non puo' essere suriettiva. Precisamente abbiamo $\dim(Im(f)) = 2$. Una base di $Im(f)$ e' costituita ad esempio dalla I e dalla II colonna di A. Pertanto, equazioni parametriche per $Im(f)$ sono date da

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre $Im(f)$, essendo un iperpiano in $\mathbb{R}^3$, e' definito da un'unica equazione cartesiana data da

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2X_1 + 2X_2 - X_3 = 0.$$

(iii) Poiche' il dominio di f ha dimensione strettamente maggiore di quella del codominio di f, sicuramente l'applicazione f non puo' essere iniettiva. Per il Teorema del Rango (o di nullita' e rango), abbiamo anche che

$$\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(Im(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Nelle coordinate di $\mathbb{R}^4$ date dalla base $\mathcal{E}^4$, equazioni cartesiane per il nucleo sono date dal sistema omogeneo

$$X_1 - X_2 + X_4 = 0 = X_2 + X_3 - X_4.$$

Risolvere il precedente sistema lineare omogeneo fornisce sia equazioni parametriche di $Ker(f)$,

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} -s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad s, t, \in \mathbb{R}$$

sia una base di $Ker(f)$, visto che si ottiene

$$Ker(f) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$