Svolgimento Esercitazione VI

Prof. Flamini

Esercizio 1

(i) Poichè $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array}\right)$

$\#\text{pivots}(A) = \#\text{pivots}(A|\underline{b}) = 2 \Rightarrow \dim(\mathcal{L}) = 3-2 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è una retta affine

(ii) La giacitura di $\mathcal{L}$ è data da $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

cioè $\underline{X} = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pertanto un vettore direttore

di $\mathcal{L}$ è $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Poichè un vettore direttore di r è $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sicuramente

$\mathcal{L}$ e r non sono rette parallele

Preso $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in r$ e $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \Rightarrow \vec{pq} = q - p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ è

un vettore

Notiamo che $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{pq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 1/3 R_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 4/3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{3}{4} R_2}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{4/3} & 4/3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \Rightarrow \{\underline{v}, \underline{w}, \vec{pq}\} \text{ base per } V = \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow r$ e $\mathcal{L}$ rette sghembe

Infatti $r \not\parallel \mathcal{L}$ e $r \cap \mathcal{L} = \emptyset$ come si verifica che

$r \cap \mathcal{L} \; \begin{cases} (1+t) - 3(3+t) = 1 \\ (2+t) + (3+t) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 - 2t = 1 \\ 5 + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -9 \\ 2t = -2 \end{cases}$ ##

(iii) $r: \begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2+t \\ x_3 = 3+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = t \\ x_2 - 2 = t \\ x_3 - 3 = t \end{cases}$

$\Rightarrow$ eq. cartesiane per r: $\begin{cases} x_1 - 1 = x_2 - 2 \\ x_1 - 1 = x_3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

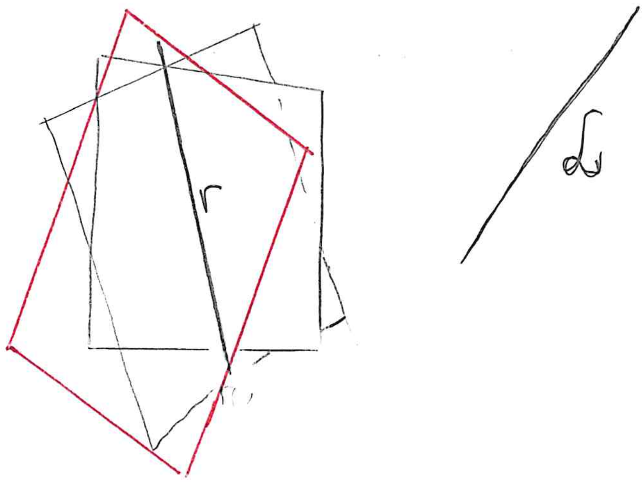
$r: \begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 - x_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 - x_3 + 2 = 0 \end{cases}$

Il fascio è dato da

$$\boxed{\alpha(x_1 - x_2 + 1) + \beta(x_1 - x_3 + 2) = 0}$$

cioè $(\alpha+\beta)x_1 - \alpha x_2 - \beta x_3 + (\alpha + 2\beta) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(iv) Ogni piano del fascio contiene r. Per avere quello parallelo a L devo trovare quel piano la cui giacitura contenga $\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vettore direttore di L



$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)3 - \alpha(-1) - \beta(1) = 0 \Leftrightarrow$

$3\alpha + 3\beta + \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -2\alpha}$

Il piano cercato è

$$-\alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0}$$

Esercizio 2

(i) Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda p(x) + \mu q(x)) = f\left((\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_2 + \mu b_2)x^2\right) =$$

$$= \left((\lambda a_0 + \mu b_0) - (\lambda a_1 + \mu b_1) - 2(\lambda a_2 + \mu b_2)\right) + \left((\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2)\right)x$$

$$+ 2(\lambda a_2 + \mu b_2)x^2$$

$$= \lambda\left[(a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2 x^2\right] + \mu\left[(b_0 - b_1 - 2b_2) + (b_1 + b_2)x + 2b_2 x^2\right]$$

$$= \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)) \Rightarrow \underline{f \text{ è lineare}}$$

(ii) $\ker(f) \doteq \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V \mid f(p(x)) = 0 \} \subseteq V$

Pertanto $p(x) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 - 2a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases}$

Poiché il SLO $(3,3;\mathbb{R})$ ha matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$ che è triangolare superiore con 3 pivots, il SLO$(3,3;\mathbb{R})$ ha come unica soluzione $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$

Quindi $\ker(f) = \{0\}$ pertanto f è <u>appl. lineare iniettiva</u>

(iii) Poiché vale
$$\boxed{\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))} \quad (*)$$
sappiamo che $\dim(V) = \dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 2})$ visto che la sua base canonica è $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$; inoltre, da (ii), $\dim(\ker(f)) = 0$.

Quindi da $(*)$ abbiamo $\underline{\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V) = 3}$

Poiché $\operatorname{Im}(f) \subseteq V$ come sottospazio e hanno stessa dimensione $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = V$, cioè <u>$f$ è applicazione lin. suriettiva</u>

(iv) Essendo f un'applicazione lineare ed invertibile $\Rightarrow f$ è un <u>isomorfismo di V in se stesso</u>, i.e. f è un <u>automorfismo di V</u>

Esercizio 3

(i) $L_A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$

(ii) Denotati con $\underline{v}_1^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2^A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3^A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ i vettori colonna in A

sappiamo che $\mathrm{Im}(L_A) = \langle \underline{v}_1^A, \underline{v}_2^A, \underline{v}_3^A \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ codominio di L_A

Ma $\underline{v}_1^A = \underline{v}_3^A$ e $\underline{v}_2^A = 2\,\underline{v}_1^A \Rightarrow \mathrm{Im}(L_A) = \langle \underline{v}_1^A \rangle$ quindi

$\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 1$ e L_A NON SURIETTIVA

(iii) Equazioni parametriche di $\mathrm{Im}(L_A)$ visto che $\underline{v}_1^A$ è base di $\mathrm{Im}(L_A)$

$\underline{X} = t\,\underline{v}_1^A$, $t \in \mathbb{R}$, i.e. $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Equazioni cartesiane (3 indeterminate) - (1 par. libero) = 2 equaz

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

(iv) Poiché $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} = \underbrace{\dim(\mathrm{Im}\, L_A)}_{1} + \dim(\ker L_A) \Rightarrow$

$\dim(\ker L_A) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow$ L_A non iniettiva

(v) $\ker(L_A) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A(\underline{x}) = \underline{0} \} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ma $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pertanto $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ è equivalente all'unica equazione

$\boxed{1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 0}$ infatti $3 = \#$ indeterminate $= \dim(\mathbb{R}^3)$

$2 = \#$ parametri liberi delle soluz. di $A\underline{x} = \underline{0}$ $= \dim(\ker(L_A))$

Per eq. parametriche devo risolvere $\#$ pivots $= 3 - 2 = 1 \to !$ eq. cartes

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s - t \end{matrix} \Rightarrow \underline{X} = \begin{pmatrix} 2s + t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

e una base del $\ker(f)$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4

(i)(a) se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2 x$

Pertanto se $p(x) = 0$ vettore nullo di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = V$ si ha $\varphi(0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$ ok

$\forall \begin{array}{l} p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V \\ q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in V \end{array}$ e $\forall\, \alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ si ha:

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x \quad q'(x) = b_1 + 2b_2 x$ e si verifica facilmente:

$(\alpha p(x) + \beta q(x))' = \alpha p'(x) + \beta q'(x)$

Pertanto

$$\varphi(\alpha p(x) + \beta q(x)) = 2(\alpha p(5) + \beta q(5)) + \alpha p'(2) + \beta q'(2)$$

$$= \alpha(2p(5) + p'(2)) + \beta(2q(5) + q'(2)) = \alpha\varphi(p(x)) + \beta\varphi(q(x))$$

$\Rightarrow \varphi$ lineare

(b) Per (i), l'applicazione Φ è lineare nella prima componente, però Φ non può essere lineare

Infatti $\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Infatti Φ non è lineare nella II componente

(c) $\varphi(\lambda A) = (\lambda A) \cdot (\lambda A)^t = \lambda^2 A A^t \neq \lambda A A^t = \lambda \varphi(A)$

$\Rightarrow \varphi$ non può essere lineare

(ii) L'unica applicazione che risulta essere lineare è $\varphi: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ cioè la (a).

φ non può essere iniettiva perché se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x \Rightarrow p'(2) = a_1 + 4a_2$

$2p(5) = 2a_0 + 10a_1 + 50a_2$ quindi

$2p(5) + p'(2) = 2a_0 + 10a_1 + 50a_2 + a_1 + 4a_2 \quad \Rightarrow$

$2\,p(5) + p'(2) = 2a_0 + 11a_1 + 54a_2 = 0$ come elemento di $\mathbb{R}$ (6)

Ponendo

$$a_2 = t \qquad a_1 = s \qquad a_0 = -\frac{11}{2}s + \frac{54}{2}t = -\frac{11}{2}s + 27t \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

per ogni scelta di $t, s \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$\left(-\frac{11}{2}s + 27t\right) + s\,x + t\,x^2 \in V$$

è un elemento di $\ker(\varphi)$

<u>In particolare $\dim(\ker\varphi) = 2$</u>

<u>φ è chiaramente suriettiva</u>

Un modo per osservarlo è che

$$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}) = 3 \qquad \dim(\ker(\varphi)) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$$

e poiché $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ come sottospazio, allora

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$

Altrimenti, per ogni numero reale $k \in \mathbb{R}$ devo trovare almeno un'<u>antiimmagine</u> (o <u>preimmagine</u>) <u>di k mediante φ</u>, i.e. devo far vedere che

$$\overleftarrow{\varphi}(k) = \{ p(x) \in V \mid \varphi(p(x)) = k \} \neq \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Se prendiamo $p(x) = \frac{k}{2}$ polinomio costante

$p'(x) = 0 \Rightarrow p'(2) = 0$

$2\,p(x) = k \Rightarrow 2\,p(5) = k$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{k}{2}\right) = k \Rightarrow \varphi$ suriettiva