Svolgimento esercitazione V

Prof. F. Flamini

Esercizio 1

(i) $t \in \mathbb{R}$ parametro

$$U_t = \left\langle \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_t = \left\langle \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Chiaramente si ha che

$$U_t + V_t = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$

ma, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underline{v}_1 = \underline{u}_2 - 2\underline{u}_1 \Rightarrow \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lin. dipendenti per ogni $t \in \mathbb{R}$

Pertanto, $\forall t \in \mathbb{R}$, necessariamente si ha

$$U_t + V_t = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_2 \rangle$$

Poiché $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, non esiste alcun $t \in \mathbb{R}$ per cui si possa avere $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$

(ii) Da (i) abbiamo visto che $\underline{v}_1 \in V_t$ e $\underline{v}_1 \in U_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{v}_1 \in U_t \cap V_t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Poiché $\underline{0} \neq \underline{v}_1, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{\langle \underline{v}_1 \rangle}_{\dim = 1} \subseteq U_t \cap V_t$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U_t \cap V_t) \geq 1}$$

Ma $U_t \cap V_t \subseteq U_t \leadsto \dim(U_t) \leq 2$

$\subseteq V_t \leadsto \dim(V_t) \leq 2$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(U_t \cap V_t) \leq 2}$$

Notiamo che $\dim(U_t \cap V_t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(U_t) = \dim(V_t) = 2 \\ U_t = V_t \end{cases}$

Vogliamo quindi eliminare possibili valori di t per cui si abbia

$$(*) \begin{cases} \dim(U_t) = \dim(V_t) = 2 \\ U_t = V_t \end{cases}$$

Consideriamo $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

Se $t=0$ $\quad \underline{u}_1 = \underline{e}_1$ e $\underline{u}_2 = \underline{0} \Rightarrow U_0 = \langle \underline{e}_1, \underline{0} \rangle = \langle \underline{e}_1 \rangle$

e $\dim(U_1) = 1$ pertanto $t=0$ non va eliminato

Se $t \neq 0$ notiamo che $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sicuramente non proporz.

oppure mettendo $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ per riga, usando che $t \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2t & 0 \\ t & t & t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - tR_1} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t & 0 \\ 0 & t-t^2 & t-2t^2 & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & 2t & 0 \\ 0 & t(1-t) & t(t-2) & t \end{pmatrix}$$

Poiché $t \neq 0$, se $t=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2 pivots

$\Rightarrow \dim(U_1) = 2$

Se $t=2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2 pivots $\Rightarrow \dim(U_2) = 2$

Pertanto $\boxed{\dim(U_0) = 1 \quad e \quad \dim(U_t) = 2, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

Per V_t

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$

Se $t=0$ $\quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}_2 = -\underline{v}_1$

e $\dim(V_0) = 1$ con $V_0 = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_2 \rangle = \langle 2\underline{e}_1 \rangle$
$= \langle \underline{e}_1 \rangle$

$\Rightarrow U_0 = V_0$ e $\dim(V_0) = 1$ e $U_0 \cap V_0 = U_0 = V_0 = \langle \underline{e}_1$

Se $t \neq 0$ $\quad \underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ non possono essere proporzionali

oppure li metto per riga

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 2t & 0 \\ t-2 & -t & -3t & t \end{pmatrix}$$

Se $t=2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ 2 pivots $\Rightarrow \dim(V_2)=2$

Se $t \neq 2$ $\begin{pmatrix} 2 & t & 2t & 0 \\ t-2 & -t & -3t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{(t-2)}{2} R_1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 2t & 0 \\ 0 & -t - \frac{t(t-2)}{2} & -3t - t(t-2) & t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & t & 2t & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2} & -t^2+t & t \end{pmatrix}$$ 2 pivots perché $t \neq 0$

Anche per $t \neq 2, 0$ $\dim(V_t) = 2$

Pertanto vogliamo escludere valori di $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per cui $U_t = V_t$

Ma, $\forall t \in \mathbb{R}$, sappiamo che $\underline{v}_1 = \underline{u}_2 - 2\underline{u}_1$.

Pertanto

$V_t = U_t \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{v}_2 = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2$

$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$

$\Leftrightarrow$ è compatibile $\begin{cases} \alpha_1 + t\alpha_2 = 2 \\ t\alpha_1 + t\alpha_2 = t \\ 2t\alpha_1 + t\alpha_2 = 2t \\ 0\alpha_1 + t\alpha_2 = 0 \end{cases} \underset{t \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 + t\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ incompatibile $\Rightarrow \underline{v}_2 \notin U_t, \ \forall t \neq 0$

In definitiva $\nexists\, t \in \mathbb{R}$ per cui $(*)$ sia verificato (4)

quindi $\forall\, t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) = 1$ e $U_t \cap V_t = \langle \underline{v}_1 \rangle, \forall\, t \in$

(iii) $U_1 \cap V_1 \underset{\underset{t=1}{\downarrow}}{=} \langle \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2s \\ x_2 &= -s \\ x_3 &= -3t \\ x_4 &= s \end{aligned} \qquad s \in \mathbb{R}$$

<u>eq. parametriche di $U_1 \cap V_1$</u>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>equazioni cartesiane di $U_1 \cap V_1$</u>

(iv) $\dim(U_1 + V_1) \underset{\underset{\text{Grassmann}}{\downarrow}}{=} \dim(U_1) + \dim(V_1) - \dim(U_1 \cap V_1)$

$= 2 + 2 - 1 = 3 \Rightarrow$

- $U_1 + V_1$ è iperpiano in $\mathbb{R}^4$, i.e. $U_1 + V_1 \subsetneq \mathbb{R}^4$
- $U_1 + V_1$ non è diretta perché $\dim(U_1 \cap V_1) = 1$
- U_1 e V_1 non supplementari

$U_1 + V_1 = \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle \underset{\underset{\underline{v}_1 = \underline{u}_2 - 2\underline{u}_1}{\downarrow}}{=} \langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_2 \rangle$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1s_1 + 1s_2 + 2s_3 \\ x_2 &= 1s_1 + 1s_2 + 1s_3 \\ x_3 &= 2s_1 + 1s_2 + 2s_3 \\ x_4 &= 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 \end{aligned}$$

$s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ param. liberi

<u>eq. parametriche di $U_1 + V_1$</u>

Per eq. cartesiane ad esempio posso fare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 2 & 1 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 - 2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{e poi} \\ R_4 \leftrightarrow R_3}]{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_3 - 2x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{x_3 - 2x_1 + x_4 - 2(x_2 - x_1)}_{\substack{\parallel \\ -2x_2 + x_3 + x_4}} \end{array}\right)$$

Impongo $-2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow$

$2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ <u>eq. cartesiana di $U_1 + V_1$</u>

Infatti $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_2$ soddisfano tale equazione

(v) Una base per $U_1 + V_1$ è $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{v}_2\}$

Per estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente considerare un vettore $\underline{0} \neq \underline{w} \notin U_1 + V_1$

E.g. prendiamo $\underline{w} = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che non soddisfa eq. cartesiana di $U_1 + V_1$

La nuova base $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$\underline{b}_1 = \underline{u}_1 \quad \underline{b}_2 = \underline{u}_2 \quad \underline{b}_3 = \underline{v}_2 \quad \underline{b}_4 = \underline{e}_2$$

(vi) Il vettore $\underline{z} = \underline{e}_1 - \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ fornite dalle soluzioni di

$$\underline{z} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \alpha_3 \underline{b}_3 + \alpha_4 \underline{b}_4 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 0\alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 0\alpha_4 = -1 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha_2 = 0}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = -1 \end{cases}$$ differenza 2 eq.

$$-\alpha_1 + 0 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = -2} \Rightarrow 2\alpha_3 = 1-(-2) = 3$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = \frac{3}{2}}$$

Ma allora $\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_3 = +2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\boxed{\alpha_4 = \frac{1}{2}}$

In base B, $\underline{z} \in \mathbb{R}^4$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \underline{z} = -2\,\underline{b}_1 + 0\,\underline{b}_2 + \frac{3}{2}\underline{b}_3 + \frac{1}{2}\underline{b}_4$$

Esercizio 2

(i) $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ è t.c. $\dim(V) = 3$ con base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$

Notiamo che $p_3(x) = 2\,p_1(x)$ pertanto

$$\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2(x), p_4(x) \rangle$$

Però
$$p_4(x) = p_2(x) - p_1(x)$$

$$\Rightarrow \langle p_1(x), p_2(x), p_4(x) \rangle = \langle p_1(x), p_2(x) \rangle$$

Perciò non è mai possibile estrarre dal sistema solo una base per V

(ii) $p_1(x), p_2(x)$ sono indipendenti visto che

$$p_1(x) = \cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 1 - 2x + x^2 = 1 - x + x^2$$
$$p_2(x) = 1 - 2x + 2x^2$$ non proporzionali

Perciò
$\dim \langle P_1(x), P_2(x) \rangle = 2$

(iii) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \lambda_1 (1 - x + x^2) + \lambda_2 (1 - 2x + 2x^2)$

$$a_0 = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$a_1 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 \qquad \underline{\text{eq. parametriche}}$$
$$a_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

(iv) Poiché $a_1 = -a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 = 0$ $\underline{\text{eq. cartesiana di } \langle P_1(x), P_2(x) \rangle}$

Esercizio 3

(i) $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ linearmente indipendenti e

$$\underline{X} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

è il generico vettore in $U = \langle \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \rangle$
Il sistema di equazioni cartesiane definente V è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Pertanto $U \cap V$ è individuato da i vettori per cui

$$\begin{cases} \alpha_2 - (2\alpha_1 + \alpha_2) - 2(-\alpha_1) = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \quad \text{cioè } U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 3\alpha_1 \\ \alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} \middle| \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pertanto

$\dim(U \cap V) = 1$ e $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una sua base.

(ii) Poichè $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ indip. $\Rightarrow \dim(U) = 2$

Poichè $V: \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (*)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \# \text{pivots} = 2 \Rightarrow 2 \text{ eq. indip.}$$

$\Rightarrow \dim(V) = 4 - 2 = 2$

Per Grassmann

$\dim(U+V) = 2 + 2 - 1 = 3 \Rightarrow U+V$ è iperpiano in $\mathbb{R}^4$

(iii) Per estendere $\{\underline{b}_1\}$ ad una base di $U+V$ è sufficiente prendere:

- un vettore $\underline{b}_2$ che soddisfa le equazioni (*) ma sia non proporzionale a $\underline{b}_1$, per esempio

$$\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \subset U + V, \quad \underline{b}_2 \notin U \cap V$$

- un vettore $\underline{b}_3 \in U$ ma $\underline{b}_3 \notin V$

per esempio $\underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{u}_1$ che non soddisfa (*)

Pertanto

$$\mathcal{B} = \left\{ \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Verifichiamo infatti che $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ è lin. indipendente

Ci sono vari modi per verificarlo

Modo 1

Metodo scarti successivi

- $\underline{b}_1 \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{b}_1$ è lin. indip.
- $\underline{b}_2$ non nullo e non prop. a $\underline{b}_1 \Rightarrow \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ lin. indip.
- Devo verificare che

$$\underline{b}_3 = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 \text{ fornisce un } SL(4,2;\mathbb{R})$$

incompatibile nelle indeterminate α_1, α_2

Strategia già vista con Esercitazione IV

Modo 2

Dobbiamo verificare che l'unica soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ del $SLO(4,3;\mathbb{R})$ indotto da

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \alpha_3 \underline{b}_3 = \underline{0}$$

è la soluzione banale $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$

Strategia già vista con Esercitazione IV

Modo 3

Metto per riga i vettori costruendo una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

ed opero trasf. elementari per ridurre a scala per vedere se i pivots sono 3

$$A \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivots $\Rightarrow$ le 3 righe di A sono indip. $\Rightarrow \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ è base.

Esercizio 4

Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

(i) $U = \left\langle A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

A_1 e A_2 indipendenti perché non proporzionali

$$A_3 = \alpha A_1 + \beta A_2 \iff \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \beta \\ \alpha+2\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -2 \\ \alpha = 3 \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ 2\alpha + \beta = 4 \end{cases}$$ che è compatibile con soluzione $\alpha = 3 \quad \beta = -2$

cioè

$$A_3 = 3A_1 - 2A_2$$

$\Rightarrow \dim(U) = 2$ con $U = \langle A_1, A_2 \rangle$

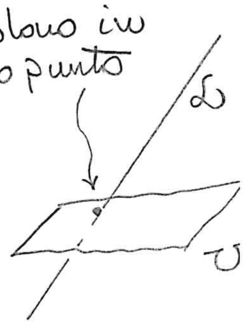
(ii) La retta affine $\mathcal{L}$: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset V$ intersecherà $U \subset V \iff \mathcal{L} \cap U \neq \emptyset$

L'intersezione sarà determinata da matrici X come sopra t.c. $X \in U$, i.e. se e solo se è compatibile il sistema $\alpha A_1 + \beta A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

che è: $\begin{cases} 1 + t = 2\alpha + \beta \\ \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + t = 2 + 1 \rightsquigarrow \text{dipendente da } t \\ \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = 3 \longrightarrow \text{soddisfatta da } \alpha = \beta = 1 \end{cases}$

$\iff$ il sistema è compatibile solo per $t = 2$.

Pertanto $\mathcal{L} \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ si incidono in un solo punto



(iii) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a_{11} + a_{12} + 2a_{21} = 0 \right\}$

è ssp. perché definito da un SLO $(1, 4; \mathbb{R})$

$U \cap W$ è definito dalle matrici

...

$\alpha A_1 + \beta A_2 \in U$ per cui sia soddisfatta l'eq. di W

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \beta \\ \alpha+2\beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(2\alpha+\beta) + \beta + 2(\alpha+\beta) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\alpha + 2\beta = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$4\alpha + 4\beta = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\alpha = -\beta}$$

$$-\beta A_1 + \beta A_2 = \beta(A_2 - A_1) = \beta\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \beta \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\dim(U \cap W) = 1$

(iii) Da (i) $\dim(U) = 2$

Poiché W è definito da un'unica equazione $\Rightarrow$

$\dim(W) = \dim(V) - 1 = 4 - 1 = 3$

Per la formula di Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$
$$= 2 + 3 - 1 = 4$$

$\Rightarrow \quad U + W = V$

La somma non è diretta e quindi i sottospazi U e W non sono supplementari