

Esercizio 1

(i)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  ha matrice completa

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow A \cdot \underline{x} = \underline{b}$  è equivalente a  $\mathcal{S}: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right)$$

sistema compatibile  
2 pivots  $\Rightarrow$  soluzioni dipendenti  
ovvero 1 parametro libero

$\Rightarrow \mathcal{S}$  è una retta affine

La sua giacitura è una retta vettoriale data da

$W_{\mathcal{S}} = \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$  equazioni cartesiane di  $W_{\mathcal{S}}$   $t \in \mathbb{R}$

Risolvendo a ritroso  $x_3 = t, x_2 = 3t, x_1 = \frac{1}{2}(-4t) = -2t$

$W_{\mathcal{S}} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  eq. parametrica vettoriale,  $t \in \mathbb{R}$

(ii) Risolvendo  $\mathcal{S}: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = -2 + 3t \\ 2x_1 = -(-2 + 3t) - t = 2 - 4t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2t \\ x_2 = -2 + 3t \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

eq. parametriche scalari di  $\mathcal{S}$

allora  $\mathcal{S}: \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$

$\downarrow$  eq. parametrica vettoriale di  $\mathcal{S}$

(iii)  $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}$  perché le sue coordinate non soddisfanno le due equazioni definenti  $\mathcal{S}$ . Perciò il minimo sp. affine

$\mathcal{U}$  è il piano affine per  $q$  e contenente la retta affine  $\mathcal{S}$

Poiché  $p, q \in \mathcal{U} \Rightarrow \overrightarrow{pq} := q - p \in W_{\mathcal{U}} \rightsquigarrow$  giacitura di  $\mathcal{U}$

$$\overrightarrow{pq} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

proportionale

Visto che  $\mathcal{U} = \overline{q, \mathcal{S}}$ , cioè  $\mathcal{S} \subset \mathcal{U} \Rightarrow W_{\mathcal{S}} \subset W_{\mathcal{U}}$

i. e.  $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \in W_{\mathcal{U}}$  e non è proporzionale a  $\overrightarrow{pq} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow W_{\mathcal{U}} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ma allora, visto che  $p, q \in \mathcal{U}$ , possiamo scrivere per esempio

$$\mathcal{U}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = p + W_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

equazioni param. vett. di  $\mathcal{U}$

cioè

$$t, s \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x_1 = 1 + 2t + s \\ x_2 = -2 - 3t - 3s \\ x_3 = 0 - t - 2s \end{cases} \quad \begin{matrix} t, s \in \mathbb{R} \\ \text{equazioni parametriche} \\ \text{scolori di } \mathcal{U} \end{matrix}$$

(iv) Poiché  $t = -2s - x_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2(-2s - x_3) + s \\ x_2 = -2 - 3(-2s - x_3) - 3s \end{cases}$

Riducendo  $s$  dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene

$$\boxed{x_1 + x_2 - x_3 = -1} \quad \text{come } \mathcal{U} \text{ FD}$$

equazione cartesiana di  $\mathcal{U}$

$$\gamma: \underline{x} = p + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x} - p \in W_\gamma = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists! t_0, s_0 \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$t_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } \Leftrightarrow \text{il } SL(3, 2; \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} 2t + s = x_1 - 1 \\ -3t - 3s = x_2 + 2 \\ -t - 2s = x_3 \end{cases} \text{ è compatibile con! soluzione}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 - 1 \\ -3 & -3 & x_2 + 2 \\ -1 & -2 & x_3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{2}R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 - 1 \\ -3 & -3 & x_2 + 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \frac{3}{2}R_1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & -3/2 & x_2 + 2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & -3/2 & x_2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & (*) \end{array} \right)$$

$$(*) = (x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}) - (x_2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}) =$$

$$= -x_1 - x_2 + x_3 - 1$$

$$\text{Impongo che } (*) \text{ non sia un III pivot } \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_3 = -1 \quad \text{come prima!}$$

# Esercizio 2

$$q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) la retta affine  $\overline{q_1 q_2}$  è la retta passante e.g. per  $q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  e con vettore direttore  $\underline{v} = q_2 - q_1 = \overrightarrow{q_1 q_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = q_1 + t \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{eq. parametrica} \\ \text{vettoriale della} \\ \text{retta } \overline{q_1 q_2} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 - 3t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l} \text{eq. parametriche scalari} \\ \text{della retta } \overline{q_1 q_2} \end{array}$$

La giacitura di  $\overline{q_1 q_2}$  è la retta vettoriale  
i.e.  $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -3t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Notiamo che

$$\underline{v} := \overrightarrow{q_1 q_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \overrightarrow{q_1 q_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} := \overrightarrow{q_1 q_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sono 3 vettori dello spazio vettoriale } \mathbb{R}^3.$$

Poiché la giacitura di  $\overline{q_1 q_2 q_3 q_4}$  è data da lin. dipend.

$$W = \text{Span} \{ \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \} = \text{Span} \{ \underline{v}, \underline{w} \} \quad \text{visto che } \underline{u} = 2\underline{w}$$

Questo significa che i punti  $q_1, q_3, q_4$  sono allineati mentre  $q_2$  non appartiene alla retta affine

$$\overline{q_1 q_3 q_4} = \overline{q_1 q_3} \quad \Rightarrow \quad \overline{q_1 q_2 q_3 q_4} = \overline{q_1 q_2 q_3}$$

che è un piano affine contenente  $q_2$  e la retta affine  $\overline{q_1 q_3}$ .

$$(iii) \quad \overline{q_1 q_2 q_3} = q_2 + \text{Span} \{ \underline{v}, \underline{w} \}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 1t + 0s \\ x_2 = 1 + 0t - s \\ x_3 = -1 - 3t + s \\ x_4 = 1 + 1t + s \end{cases}$$

$t, s \in \mathbb{R}$

equazioni parametriche  
solvi di  $q_1 q_2 q_3$

$$\begin{aligned} \text{II eq.} \quad s &= 1 - x_2 \\ \text{I eq.} \quad t &= x_1 - 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 - 3(x_1 - 1) + (1 - x_2) \\ x_4 = 1 + (x_1 - 1) + (1 - x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = -1 - 3x_1 + 3 + 1 - x_2 = -3x_1 - x_2 + 3 \\ x_4 = 1 + x_1 - 1 + 1 - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{equazioni cartesiane} \\ \text{di } q_1 q_2 q_3 \end{array}$$

Now sono univocamente determinate  
(a meno di trasf. di Gauss-Jordan)

Equivalentemente

$$\underline{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_2 - 1 \\ -3 & 1 & x_3 + 1 \\ 1 & 1 & x_4 - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_2 - 1 \\ 0 & 1 & x_3 + 1 + 3x_1 - 3 \\ 1 & 1 & x_4 - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_2 - 1 \\ 0 & 1 & x_3 + 3x_1 - 2 \\ 0 & 1 & x_4 - x_1 \end{array} \right)$$

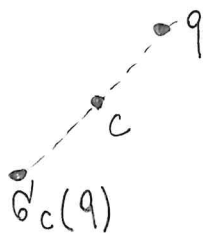
$$\xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_2 - 1 \\ 0 & 1 & 3x_1 + x_3 - 2 \\ 0 & 0 & x_2 + x_4 - x_1 - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 3x_1 + x_3 - 3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_4 - 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

# Esercizio 3

(5)

- (i) Sia  $q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  un arbitrario punto e  
 sia  $q'_c(q) \in \mathbb{R}^2$  il suo riflesso rispetto a c  
c = centro di riflessione



$$\Rightarrow \boxed{\vec{cq} = -\vec{cq'_c(q)}}$$

per tanto se  $q'_c(q) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 - 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 - y_1 \\ x_2 - 2 = 2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 - x_1 \\ y_2 = 4 - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{q'_c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x_1 \\ 4 - x_2 \end{pmatrix}} \quad \text{equazioni della riflessione}$$

- (ii) l ha vettore direttore  $\underline{n}_l := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  visto che  $\bar{e}$ , a meno di proporzionalità, un generatore della sua fascatura.  
 Quindi

$$l: \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} \text{eq. parametriche} \\ \text{scelte} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} t = x_1 - 1 \\ x_2 = 3 + (x_1 - 1) \end{cases}$$

$l: x_1 - x_2 = -2$  eq. cartesiana di l (notare già tutto ok)

- (iii)  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in l$  inoltre, e.g. per  $t=1$ ,  $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in l$

Allora  $r := \overline{q'_c(P) q'_c(q)}$

Poiché

$$q'_c(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } q'_c(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r \text{ passa per } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e ha vettore direttore

$$\overrightarrow{q'_c(q) q'_c(P)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow r: x_1 - x_2 = 0 \quad \begin{matrix} \text{eq. cartesiana di r} \\ \text{eq. parametriche di r} \end{matrix}$$

- (iv) Poiché r e l hanno stesso vettore direttore  
 (equivalentemente r è la fascatura di l)  $\Rightarrow r$  e l parallele

# Esercizio 4

(6)

(i) Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  arbitraria matrice

$$A \in Z \iff A + A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} \\ a_{21}+a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{11} = 1/2 \\ a_{12} + a_{21} = 1 \\ a_{22} = 1/2 \end{cases}$$

Pertanto  $A \in Z \iff A = \begin{pmatrix} 1/2 & a_{12} \\ a_{21} & 1/2 \end{pmatrix}$  t.c.  $a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$  con  $a_{12} + a_{21} = 1$

Ponendo  $a_{12} = t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{21} = 1 - t$

$$A \in Z \iff A = \begin{pmatrix} 1/2 & t \\ 1-t & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$Z = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\text{punto } P^n} + \underbrace{W_Z}_{\text{giacitura di } Z}$$

dove  $W_Z = \{ A \in V \mid A + A^t = 0 \} = \text{Antisym}$

tale che  $A + A^t = 0 \iff A^t = -A$

(ii) Gli elementi nella giacitura sono della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W_Z = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ dove } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

linearmente indipendente perché diverso dal vettore (matrice) nullo.

Quindi  $Z$  è una retta affine nello spazio affine  $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ , passante per  $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$  e con giacitura il ssp. vettoriale  $\text{Antisym} \subset V$ .