Svolgimento Esercitazione 2

Esercizio 1

(i) La matrice dei coefficienti del SLO$(3,4;\mathbb{R})$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ e il sistema è $A \circ \underline{X} = \underline{0}$ i.e. $A \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Operiamo trasformazioni elementari sulle righe di A

$$A \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Pertanto il SLO$(3,4;\mathbb{R})$ iniziale è equivalente al SLO$(2,4;\mathbb{R})$ a gradini

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{i.e. } B \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) I termini pivots di B sono $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

pertanto poniamo

$$x_4 = t, \quad t \in \mathbb{R} \text{ parametro libero}$$
$$x_3 = s, \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Dalla II equazione

$$x_2 = s - t$$

Per sostituzione a ritroso, dalla I equazione

$$x_1 = -x_2 - x_3 + x_4 = -(s-t) - s + t$$
$$= -2s + 2t$$

Quindi la soluzione generale del SLO$(3,4;\mathbb{R})$ originale è:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + 2t \\ s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t, s \in \mathbb{R}$ parametri liberi

Pertanto

$$U = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \underline{x} = \underline{0} \} = \operatorname{Span} \left\{ \underset{\underline{v}_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\underline{v}_2}{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

(iii) Viceversa, presi i vettori

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

notiamo che $\underline{e}_1 \notin U \not\ni \underline{e}_3$ dato che le coordinate non soddisfano le equazioni di $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ equivalentemente di $B \cdot \underline{x} = \underline{0}$

Ora $\operatorname{Span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_3\} = W$ è t.c.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \underline{e}_1 + \mu \underline{e}_3 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cioè

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \mu \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ parametri liberi}$$

In particolare W è definito dal $SLO(2,4;\mathbb{R})$

$$W: \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad C \cdot \underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}{\underline{x}} = \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\underline{0}} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Se consideriamo $U \cap W$ si ha il $SLO(4,4;\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Big\} \to B \cdot \underline{x} = \underline{0} \\ \Big\} \to C \cdot \underline{x} = 0 \end{matrix}$$

La matrice del $SLO(4,4;\mathbb{R})$ è

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ che non è a gradini}$$

Operando trasformazioni elementari si ha

$$D \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D'$$

i termini $\bigcirc$ sono i pivots del sistema $SLO(4,4;\mathbb{R})$ equivalente a $D\cdot \underline{x} = \underline{0}$ originario. Con la risoluzione a ritroso

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = x_4 = 0 \\ x_2 = x_3 - x_4 = 0 - 0 = 0 \\ x_1 = -x_2 - x_3 + x_4 = -0 - 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

cioè $U \cap W = \left\{ \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(v) Per verificare che $U + W = U \oplus W = \mathbb{R}^4$ è sufficiente verificare che

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$$

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{e}_1 + \alpha_4 \underline{e}_3 =$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

(4)

Preso il vettore generale $\underline{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} c_i \underline{e}_i \in \mathbb{R}^4$, $c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4$, esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = c_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = c_2 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = c_3 \\ \alpha_1 = c_4 \end{cases} \quad ?$$

Poichè $\boxed{\alpha_1 = c_4}$, dalla IV equazione, otteniamo

$$\begin{cases} -2\alpha_2 + \alpha_3 = c_1 - 2c_4 \\ \alpha_2 = c_2 + c_4 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = c_3 \end{cases}$$

Dalla II equazione, $\boxed{\alpha_2 = c_2 + c_4}$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} -2(c_2 + c_4) + \alpha_3 = c_1 - 2c_4 \\ (c_2 + c_4) + \alpha_4 = c_3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha_3 = c_1 - 2c_4 + 2(c_2 + c_4) = c_1 + 2c_2 \\ \alpha_4 = c_3 - (c_2 + c_4) = -c_2 + c_3 - c_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha_3 = c_1 + 2c_2 \quad e \quad \alpha_4 = -c_2 + c_3 - c_4}$

Pertanto i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono univocamente determinati dalla scelta del vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, i.e.

$$\underline{w} = c_4 \underline{v}_1 + (c_2 + c_4)\underline{v}_2 + (c_1 + 2c_2)\underline{e}_1 + (-c_2 + c_3 - c_4)\underline{e}_3$$

$\Rightarrow \underline{w} \in \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$

Poiché vale $\forall\ \underline{w} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow$

$$\mathbb{R}^4 \subseteq \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$$

D'altra parte, siccome $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3 \in \mathbb{R}^4$
$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, i.e.

$$\mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Per doppia inclusione, vale eguaglianza

Quindi

$$U + W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3\} = \mathbb{R}^4$$

Visto che avevamo già dimostrato che $U \cap W = \{\underline{0}\}$

si ha allora

$$\mathbb{R}^4 = U + W = U \oplus W$$

cioè U e W sono <u>sottospazi supplementari in $\mathbb{R}^4$</u>

Esercizio 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M(1\times 3) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2\times 3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3)$$

(i) $A \circ B$ non definito $\qquad$ $B \circ A$ non definito

$C \circ A$ non definito $\qquad$ $A \circ C$ definito

$C \circ B$ non definito $\qquad$ $B \circ C$ definito

$A \circ A$ non definito $\qquad$ $B \circ B$ non definito $\qquad$ $C \circ C$ definito

- $$\underset{1\times 3}{A} \circ \underset{3\times 3}{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2(-1) + 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(1\times 3; \mathbb{R})$$

- $$B \circ C = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \circ \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & -1+4 & 2 \\ 1 & 1-1+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(2\times 3; \mathbb{R})$$

$$C^2 = C \circ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3; \mathbb{R})$$

(ii) $$A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \circ A^t = \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \circ \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14 \in \mathbb{R} = M(1\times 1; \mathbb{R})$$

$$A^t \circ A = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \circ \underset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M(3\times 3; \mathbb{R})$$

(iii) Prendiamo

(iii-1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \circ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \circ B \neq BA$$

(iii-3) $A^2 = A \circ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A$ <u>nilpotente</u>

(iii-2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2x_3 & 2x_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Pertanto presa ad esempio $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ A e B sono <u>zero-divisori</u> in $M(2 \times 2; \mathbb{R})$

(iv) $A \in M(n \times n; \mathbb{R}) \Rightarrow C := A \circ A^t \in M(n \times n; \mathbb{R})$

$$C^t = (A \circ A^t)^t \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Teorema di Binet}}}{=} (A^t)^t \circ A^t = A \circ A^t = C$$

$\Rightarrow$ C è sempre simmetrica.

Analogamente $D = A^t \circ A$ è simmetrica perché

$$D^t = (A^t \circ A)^t \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Teorema di Binet}}}{=} A^t \circ (A^t)^t = A^t \circ A = D$$

Esercizio 3

(i) $a \in \mathbb{R}$ parametro reale

$$\begin{cases} x + (a-1)\,y + (2-a)\,z = a+5 \\ x + a\,y + 2z = 4 \\ x + (a-2)\,y + 2(1-a^2)\,z = 6 \end{cases}$$ è un $SL(3,3;\mathbb{R})$ parametrico

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2-a \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a-2 & 2(1-a^2) \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} a+5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

La notazione matriciale per il sistema è:

$$A \circ \underline{x} = \underline{b}$$

(ii)
$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 1 & a & 2 & 4 \\ 1 & a-2 & 2(1-a^2) & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 1 & a-1 & 2-a & a+5 \\ 1 & a-2 & 2(1-a^2) & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & a+1 \\ 1 & a-2 & 2(1-a^2) & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & a+1 \\ 0 & -2 & -2a^2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & -2a^2+2a & -2a \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & -2(a^2-a) & -2a \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -a & a+1 \\ 0 & 0 & -2a(a-1) & -2a \end{array}\right)$$

(iii) $\boxed{\text{Se } a = 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{è} \quad \begin{cases} x + 2z = 4 \\ -y = 1 \end{cases} \quad SL(2,3;\mathbb{R})$$

è sistema a gradini con 2 pivots $\to$ $3-2=1$ parametro libero

$$z = t$$
$$y = -1$$
$$x = 4 - 2t$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ -1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$ parametro libero

$\boxed{\text{Se } a = 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{array}\right)$$

$$\#\{\text{pivots } A\} = 2 < \#\{\text{pivots } (A|\underline{b})\} = 3$$

il sistema è incompatibile, i.e. $\nexists$ soluzioni

$\boxed{\text{Se } a \neq 0, 1}$

$$\#\{\text{pivots } A\} = \#\{\text{pivots } (A|\underline{b})\} = 3$$

sistema compatibile con unica soluzione.
Con il metodo di risoluzione a ritroso si ottiene

$$z = \frac{-\cancel{2a}}{-\cancel{2a}(a-1)} = \frac{1}{a-1}$$

$$-y = a+1 + a \cdot z = (a+1) + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2-1+a}{a-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a^2+a-1}{1-a}$$

$$x = 4 - 2z - ay =$$
$$= 4 - 2\left(\frac{1}{a-1}\right) - a\cdot\left(\frac{a^2+a-1}{1-a}\right) = \frac{a^3+a^2+3a-6}{a-1}$$

Pertanto, <u>per ogni fissato $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$</u>, la soluzione è univocamente determinata

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a^3+a^2+3a-6}{a-1} \\ \dfrac{a^2+a-1}{1-a} \\ \dfrac{1}{a-1} \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 4</u> Notiamo che

$$U = \text{Span}\{x, x^2\} = \{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\}$$

mentre

$$W = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;\middle|\; \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases}\right\} = \{a_1 x + a_1 x^2 \mid a_1 \in \mathbb{K}\}$$
$$= \text{Span}\{1 + x^2\}$$

$\Rightarrow$ $W \subset U$ inclusione stretta perchè e.g. $1, x \in U \setminus W$.

Si ha $U \cap W = W$ e $U + W = U$ visto che $W \subset U$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, poichè i possibili coefficienti sono solo $\{0,1\}$ allora

$$U = \{0, x, x^2, x + x^2\} = U + W$$
$$W = \{0, x + x^2\} = U \cap W$$

Esercizio 5

(i) $B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n; \mathbb{K})$

$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M(n \times 1; \mathbb{K}) \Rightarrow$

$B \cdot E_j$ definito ed è $B \cdot E_j \in M(m \times 1; \mathbb{K})$

$B \cdot E_j = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix} \to$ colonna j-esima di B, $1 \leq j \leq n$

(ii) $F_i \cdot B = \underset{M(1 \times m; \mathbb{K})}{(0\ 0\ \cdots\ 1\ \cdots\ 0)} \cdot \underset{M(m \times n; \mathbb{K})}{B} \in M(1 \times n; \mathbb{K})$

$F_i \cdot B = (b_{i1}\ \ b_{i2}\ \cdots\ b_{in}) \to$ riga i-esima di B, $1 \leq i \leq m$

(iii) $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in U$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$B \cdot (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y}) = B \cdot (\alpha \underline{x}) + B \cdot (\beta \underline{y}) = \alpha \underset{\substack{\| \\ 0}}{B \cdot \underline{x}} + \beta \underset{\substack{\| \\ 0}}{B \cdot \underline{y}} = 0$

$\Rightarrow \alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in U \Rightarrow U$ è sottospazio di $\mathbb{K}^n$ $\quad \underline{x}, \underline{y} \in U$

(iv) $B \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_{mi} x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ al variare di $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Ora, $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ e $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha

$\alpha (B \cdot \underline{x}) + \beta (B \cdot \underline{y}) = B \cdot (\alpha \underline{x}) + B \cdot (\beta \underline{y}) = B \cdot (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y})$

siccome $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n \Rightarrow B \cdot \underline{x}, B \underline{y} \in V$ e abbiamo dimostrato che, $\forall\ B \cdot \underline{x}, B \cdot \underline{y} \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $\alpha (B \cdot \underline{x}) + \beta (B \cdot \underline{y}) \in V$ visto che è della forma $B \cdot (\alpha \underline{x} + \beta \underline{y})$ con $\alpha \underline{x} + \beta \underline{y} \in \mathbb{K}^n$.