SVOLGIMENTO
XII ESERCITAZIONE
Geometria 1 - 19/1/2022
Prof. F. Flamini

Esercizio 1

(i) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)$$

la matrice rappresentativa nella base data $\mathcal{V}$.

Considero il polinomio caratteristico di f, cioè il pol. caratteristico di A,

$$P_A(t) = \det(A - tI_3) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 4 & 1 \\ -4 & -7-t & 2 \\ 6 & 6 & -t \end{pmatrix}.$$

Poiché le operazioni elementari tra colonne $C_2 \to C_2 - C_1$ e tra righe $R_2 \to R_2 + R_1$ non cambiano il determinante, si ha:

$$\det(A - tI_3) \underset{\substack{\downarrow \\ C_2 \to C_2 - C_1}}{=} \det\begin{pmatrix} 1-t & 3+t & 1 \\ -4 & -3-t & 2 \\ 6 & 0 & -t \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ R_2 \to R_2 + R_1}}{=} \det\begin{pmatrix} 1-t & 3+t & 1 \\ -3-t & 0 & 3 \\ 6 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Laplace rispetto alla } 2^a \text{ colonna}}}{=} -(3+t)\det\begin{pmatrix} -3-t & 3 \\ 6 & -t \end{pmatrix} = -(3+t)\cdot[+t(3+t) - 18] =$$

$$= -(t+3)(t^2+3t-18).$$

Ora $P_A(t) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fattorizzando } t^2+3t-18}}{=} -(t+3)\cdot(t-3)\cdot(t+6)$

Pertanto il polinomio caratteristico ha 3 autovalori semplici cioè con molteplicità algebrica 1

(ii) Sia λ uno qualsiasi degli autovalori dati cioè

$\lambda \in \{-6, -3, +3\}$

Denotiamo con $m_a(\lambda)$ = molteplicità algebrica di λ

$m_g(\lambda)$ = <u>molteplicità geometrica di λ</u>

ora, per ogni λ autovalore di f, si ha:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{per definizione}\\ \text{di autospazio}\\ \text{rispetto ad autovalore}\\ \lambda \text{ è di molteplicità}\\ \text{geometrica}}}{1 \le} m_g(\lambda) \underset{\substack{\text{per proprietà}\\ \text{generali tra}\\ \text{molteplicità}\\ \text{geometrica}\\ \text{ed algebrica}}}{\le} m_a(\lambda) \underset{\substack{\text{perché ogni autovalore}\\ \text{era semplice}}}{=} 1$$

Ma allora per ciascun $\lambda \in \{-6, -3, +3\}$ si ha che

$$\boxed{m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1}$$

Quindi A è <u>sicuramente diagonalizzabile.</u>

(iii) La sua forma diagonale è ad esempio

$$D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iv) Per determinare una matrice invertibile M per cui A e D siano simili (o coniugate) mediante M cioè

$$D = M^{-1} A M$$

allora calcoliamo gli autospazi determinando le basi.

- $V_{-6}(f) = \ker(f + 6\, Id_V) = \ker(A + 6I_3) = \ker \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

cioè il SLO dato da

$$(**)\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Poiché $\dim(V_{-6}(f)) = m_g(-6) = 1 \Rightarrow$ il rango della matrice dei coeff. di $(**)$ è quindi $= 3 - 1 = 2$

II e III eq. sono indipendenti $\Rightarrow$ consideriamo come eq. cartesiane di $V_{-6}(f)$ cioè

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

otteniamo che $V_{-6}(f) = \langle \underline{w}_1 \rangle$ dove

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ cioè } \underline{w}_1 = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3$$

Ora

$$V_{-3}(f) = \ker(f + 3\,Id_V) = \ker(A + 3I_3) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -4 & -4 & +2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

di nuovo, poiché $\dim(V_{-3}(f)) = m_g(-3) = 1 \Rightarrow$ equaz. cartesiane di $V_{-3}(f)$ sono ad esempio

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 0 \end{cases}$$

e otteniamo $V_{-3}(f) = \langle \underline{w}_2 \rangle$ dove

$$\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ cioè } \underline{w}_2 = -\underline{v}_1 + \underline{v}_2$$

Infine

$$V_3(f) = \ker(f - 3\,Id_V) = \ker(A - 3I_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & -10 & 2 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

ed equazioni cartesiane sono date da

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

ed otteniamo

$$V_3(f) = \langle \underline{w}_3 \rangle \text{ dove}$$

$$\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ cioè } \underline{w}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_3$$

Pertanto, posto $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ che è una base di V,

$$M =: M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ è la matrice cambiamento di base

e si ottiene che

$$D = M^{-1} A M.$$

Esercizio 2

(i) Determiniamo gli autovalori di $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \det(A - tI_4) = \begin{pmatrix} 1-t & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1-t & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1-t \end{pmatrix} =$$

$$\underset{1^a \text{ colonna}}{=} (1-t) \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -2 & 1-t & 1 \\ 4 & 0 & -1-t \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{rispetto} \\ 1^a \text{ riga}}}{=} (1-t)^2 \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & -(1+t) \end{pmatrix}$$

$$= -(1-t)^3 \cdot (1+t)$$

Pertanto $\boxed{P_A(t) = -(1-t)^3 \cdot (1+t)}$

(ii) Quindi gli autovalori di A sono $\{-1, 1\}$ con molteplicità algebriche $m_a(-1) = 1$ e $m_a(1) = 3$

(iii) Poiché $\lambda = -1$ è autovalore semplice si ha

$$m_g(-1) = m_a(-1) = 1$$

Per concludere che A sia diagonalizzabile ci basta di verificare che

$$m_g(1) = 3$$

Vediamo

$$m_g(1) = \dim(V_1(A)) = \dim(\ker(A - I_4)) =$$

$$= \dim\left(\ker\begin{pmatrix}0 & 4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\right) = ?$$

Notiamo che

$$rg(A - I_4) = 1$$

perché una riga è nulla e le altre 3 righe sono proporzionali

Ma allora per il teorema del rango si ha

$$m_g(1) = \dim(\ker(A - I_4)) = 4 - rg(A - I_4) = 4 - 1 = 3$$

Quindi A è diagonalizzabile.

(iv) Per cercare una base diagonalizzante cerchiamo gli autospazi:

- $V_1(A)$ è dato da

$$2x_2 - x_4 = 0$$

Pertanto, ponendo $x_2 = t$, $x_3 = s$, $x_1 = k$, $t, s, k \in \mathbb{R}$ parametri allora $x_4 = 2t$ pertanto la soluz generale è

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}k\\ t\\ s\\ 2t\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

pertanto

$$V_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

- $V_{-1}(A)$ è $\ker(A + I_4)$: $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_2 = 0 \end{cases}$

Il SLO$(4,4;\mathbb{R})$ precedente è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$ parametro $\Rightarrow$ $x_4 = t$, $x_3 = \frac{t}{3}$ $\Rightarrow$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t/3 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_{-1}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pertanto prendendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in GL(4; \mathbb{R})$$

$$M^{-1} A M = D$$

è la relazione di coniugio o similitudine che lega A con D.

Esercizio 3

(i) Notiamo che, nel riferimento affine $(0, x_1, x_2)$, si ha:

$$r \cap s = P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il fascio di rette generato dalle rette r e s è il fascio di rette di centro P che ha quindi equazione

$$\lambda(x_1 - 1) + \mu x_2 = 0$$

cioè $\boxed{\lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda = 0}$ con $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiti a meno di un coeff. di proporzionalità

La condizione di parallelismo con la retta

$$x_2 = 2$$

è che (λ, μ) sia proporzionale a $(0, 1) \Rightarrow$
$(\lambda, \mu) = t(0, 1)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ la retta è

$$x_2 = 0$$

(ii) Nel riferimento nuovo si deve avere che:

$$O' = P$$
$$\underline{e}'_1 = \underline{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_2$$
$$\underline{e}'_2 = \underline{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

cioè

Il cambiamento di riferimento affine deve essere della forma

$\boxed{\underline{Y} = M\underline{X} + \underline{c}}$ con $M \in GL(2; \mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^2$

dove $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sono le coordinate nel nuovo riferimento (8)

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ " " " nel vecchio riferimento

$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ è un <u>vettore di traslazione</u> che manda O in O'

A meno della traslazione di O in O' si ha che, nel riferimento nuovo, le direzioni degli assi cartesiani sono date da

$$\underline{r} = 2\underline{e}_2 \quad e \quad \underline{s} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

Presa la base $\mathcal{E}' = \{\underline{r}, \underline{s}\}$, si ha che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché, a meno della traslazione di O in O', la trasf. di coord. è

$$\underline{X} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}\right)^{-1} \underline{x}$$

cioè $M = \left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}\right)^{-1} = M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pertanto

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} + \underline{c}.$$

Per calcolare $\underline{c}$, basta considerare che il punto P

nelle coord. $\underline{x}$ è $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

nelle coord $\underline{y}$ è $O' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{c}$

cioè $\underline{c} = -\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Pertanto l'equazione della affinità richiesta è

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= -1/2\, x_1 + 1/2\, x_2 + 1/2 \\ y_2 &= x_1 - 1 \end{aligned}}$$

(iii) La retta trovata al punto (i) è la retta ℓ che, nel riferimento iniziale, ha equazione cartesiana

$$\ell: \; x_2 = 0$$

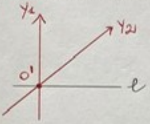
cioè passante per O e con vettore direttore $\underline{e}_1$.

Nel riferimento affine nuovo, poiché sia O che O' sono sulla retta ℓ, pertanto nel riferimento nuovo la retta ℓ avrà equazione della forma

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

visto che ℓ passa per l'origine O' del riferimento nuovo.

Si tratta di trovare il vettore direttore di ℓ, espresso in coordinate rispetto alla base del riferimento nuovo,



cioè si tratta di determinare $\underline{e}_1$ espresso in base $\mathcal{E}'$.

Ma visto che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\underline{e}_1 = -\frac{1}{2}\underline{r} + \underline{s}$ $\Rightarrow$ il vettore direttore di ℓ nel riferimento nuovo è

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{r} - 2\underline{s}$$

$\Rightarrow$ $\underline{y} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è eq. parametrica vettoriale di ℓ

cioè $\begin{cases} y_1 = t \\ y_2 = -2t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{eq. cartesiana è } 2y_1 + y_2 = 0}$