Svolgimento Esercizi

12/1/2022

XI FOGLIO ESERCIZI

Esercizio 1

(i) Poiché per ipotesi $\ker(f) = \{x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ una base per $\ker(f)$ è data ad esempio da

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \left\{ \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \,, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 - \underline{e}_3 \right\}$$

Inoltre, sempre per ipotesi, $\underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ è t.c.

$$f(\underline{w}) = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$$

Da questo si deducono le seguenti cose

a. $\underline{b}_1$ e $\underline{b}_2$ sono autovettori di f di autovalore zero

infatti

$$f(\underline{b}_i) = \underline{0} = 0 \cdot \underline{b}_i \qquad 1 \leq i \leq 2$$

e quindi ogni vettore di $\ker(f)$ è autovettore di f rispetto all'autovalore zero

b. Poiché $f(\underline{w}) \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{w} \notin \ker f$

c. Poiché $\ker(f)$ è iperpiano vettoriale in $\mathbb{R}^3$, i.e. $\dim(\ker f) = 2$, allora

$$\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{w} := \underline{b}_3\} := \mathcal{B}$$

è una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$

infatti $\underline{w} \notin \ker(f)$ implica che $\underline{w}$ è lin. indip. da $\underline{b}_1$ e $\underline{b}_2$ $\Rightarrow \mathcal{B}$ è sistema indipendente

Inoltre $3 \geq \dim(\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{w} \rangle) > \dim(\ker f) = 2$

$\Rightarrow \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{w} \rangle = \mathbb{R}^3$ cioè $\mathcal{B}$ è sistema generatori

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

d. $\underline{\underline{w}}$ è autovettore di f di autovalore 2

infatti
$$f(\underline{w}) = 2\,\underline{w} \qquad \text{perché } \underline{w} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$$
$$\text{e } f(\underline{w}) = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$$

Ma allora $\mathcal{B}$ è una base di autovettori di f

$\underline{b}_1$ e $\underline{b}_2$ rispetto a $\lambda = 0$

$\underline{b}_3 = \underline{w}$ rispetto a $\lambda = 2$

(ii) Poiché
$$f(\underline{b}_1) = 0\,\underline{b}_1$$
$$f(\underline{b}_2) = 0\,\underline{b}_2$$
$$f(\underline{b}_3) = 2\,\underline{b}_3$$
in tale base si ha
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

cioè f è diagonalizzabile e la sua forma diagonale in base $\mathcal{B}$ è la matrice D sopra trovata

(iii) La matrice cambiamento di base
$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

Abbiamo
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) & \xrightarrow{f \rightsquigarrow M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \uparrow \mathrm{Id} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{f \rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = D} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(Id) \circ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \circ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(Id)$$

$$= M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \circ D \circ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$$

$$= M \circ D \circ M^{-1}$$

Calcolo M^{-1}

$$\det(M) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Laplace} \\ \text{III Riga}}}{=} (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (2-1) = 1$$

$$Cof(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Cof(M)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M^{-1}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Dalla matrice precedentemente trovata deduciamo che

$$f(\underline{e}_1) = -2\,\underline{e}_1 - 4\,\underline{e}_2$$

$$f(\underline{e}_2) = 2\,\underline{e}_1 + 4\,\underline{e}_2$$

$$f(\underline{e}_3) = -2\,\underline{e}_1 - 4\,\underline{e}_2$$

Esercizio 2

(i) Notiamo che avere $\lambda = \frac{1}{2}$ come autovalore di A vuol dire che il sistema omogeneo ottenuto da

$$A\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{x}$$

cioè $A\underline{x} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{Id}\,\underline{x} = \underline{0} \iff \left(A - \frac{1}{2}\mathrm{Id}\right)\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 5/2 - 1/2 & -1 \\ 3 & -1-1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ammette infinite soluzioni e non solo quella banale

Ma infatti

$$A - \frac{1}{2}\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$ ha rango 1 perché

$$\det = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(3\cdot(-1)\right) = -3+3 = 0$$

(ii) Il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ formato dagli autovettori relativi a $\lambda = \frac{1}{2}$ è dato dalle soluzioni del precedente SLO

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - \frac{3}{2}x_2 = 0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha rango $= 1$ per i conti di prima. Quindi tale sottospazio

$$V_{1/2}(L_A) = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{v} \text{ autovettore di } L_A \\ \text{rispetto } \lambda = 1/2 \end{array} \right\}$$

ha un'unica equazione cartesiana, per esempio

$$2x_1 - x_2 = 0$$

e quindi $\dim(V_{1/2}(L_A)) = \dim(\mathbb{R}^2) - rg\left(A - \frac{1}{2}\mathrm{Id}\right) =$
$= 2 - 1 = 1$

è una retta vettoriale

Poiché la soluzione generale di

$$2x_1 - x_2 = 0$$

è

$$\begin{cases} x_2 = t \\ x_1 = \frac{t}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ equivalentemente

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R} \text{ parametro}$$

$$\Rightarrow \quad V_{1/2}(L_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 \rangle$$

(iii) In modo identico a prima, $\lambda = 1$ autovalore di A

$\Leftrightarrow$ $A\underline{x} = 1\,\underline{x}$ ha soluzioni non banali $\Leftrightarrow$

$(A - Id)\underline{x} = \underline{0}$ ha infinite soluzioni e non

solo la banale $\Leftrightarrow$ $rg(A - Id) < 2$

Ma infatti

$$A - Id = \begin{pmatrix} 5/2 - 1 & -1 \\ 3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e di nuovo $\det(A - Id) = 0$

(iv) Poiché il sistema

$$(A - Id)\underline{x} = \underline{0} \quad \text{è} \quad \begin{cases} 3/2\, x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

ha rango 1, l'equazione cartesiana è una sola, per esempio

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

Ma allora $V_1(L_A) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{v}$ autovettore di L_A rispetto a $\lambda = 1 \}$

è una retta vettoriale generata da un vettore ottenibile dalla risoluzione di

$$3x_1 - 2x_2 = 0$$

$x_2 = t$

$x_1 = \frac{2}{3} t \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$ equivalentemente

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t \qquad t \in \mathbb{R}$ parametro

(v) Poiché $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ è autovettore di L_A relativo a $\lambda = 1/2$ e

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$ è autovettore di L_A relativo a $\lambda = 1$

e $1 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono automaticamente indipendenti

Ma allora $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di L_A.

(vi) Detta

$$\mathcal{V} = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \}$$

tale base, allora

$$D = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti $L_A(\underline{v}_1) = \frac{1}{2}\underline{v}_1$ e $L_A(\underline{v}_2) = \underline{v}_2$.

Deduciamo così che A è diagonalizzabile e che D è una sua forma diagonale

(vii) Se prendessimo $\mathcal{V}' := \{ \underline{v}_2, \underline{v}_1 \}$ la base di autovettori, allora la forma diagonale in tale base è

$$D' = M^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{V}'}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

perché $L_A(\underline{v}_2) = \underline{v}_2$ e $L_A(\underline{v}_1) = 1/2\, \underline{v}_1$

(viii) Invece $\lambda = 2$ non è autovalore di A

Infatti $\lambda = 2$ è autovalore se e solo se

$$A \underline{x} = 2 \underline{x} \iff (A - 2\,Id) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

ha soluzioni non banali

Ma
$$(A - 2\,Id) = \begin{pmatrix} 5/2 - 2 & -1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è

$$-\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2} \neq 0$$

Poiché $(A - 2\,Id)$ è invertibile $\Rightarrow (A - 2\,Id)$ è di rango massimo $\Rightarrow$ il SLO$(2,2;\mathbb{R})$ ha solo la soluzione banale $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \nexists$ autovettori rispetto a $\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 2$ non è un autovalore di f

(ix) Prendiamo $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la base $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

Ricordiamo che

$$D = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(L_A)$$

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(L_A)$$

e A e D sono coniugate per mezzo di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}} := M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

cioè $\quad D = M^{-1} \circ A \circ M$

ma allora moltiplicando a sinistra per M si ha

$$M \circ D = A \circ M$$

e poi moltiplicando a destra per M^{-1} si ha

$$M \circ D \circ M^{-1} = A$$

Allora calcolare $A^n = \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{n\text{-volte}}$ equivale a fare

$$(M \circ D \circ M^{-1}) \circ (M \circ D \circ M^{-1}) \circ \cdots \circ (M \circ D \circ M^{-1}) \underset{\text{associatività}}{=}$$

$$M \circ D \circ (M^{-1} \circ M) \circ D \circ (M^{-1} \circ M) \circ \cdots \circ (M^{-1} \circ M) \circ D \circ M^{-1} =$$

$$M \circ D \circ (Id) \circ D \circ (Id) \circ D \circ \cdots \circ (Id) \circ D \circ M^{-1} =$$

$$M \circ \underbrace{D \circ D \circ \cdots \circ D}_{n\text{-volte}} \circ M^{-1} = M \circ D^n \circ M^{-1}$$

Ma $D^n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $M^{-1} =$

ove $\det(M) = 3 - 4 = -1$ e $\mathrm{Cof}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad A^n = M \circ D^n \circ M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 - \frac{3}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} - 2 \\ 6 - \frac{3}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^{n-2}} - 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Per capire se A è diagonalizzabile cerco in primis se ammette autovalori. Questi, se esistono, sono le soluzioni reali del polinomio caratteristico di A

$$P_A(t) = \det(A - tI_2) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2$$

Pertanto l'unica soluzione è $t=2$ con molteplicità algebrica due

Per calcolare la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ considero

$$V_2(L_A) = \ker(A - 2I_2) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 = 0\right\}$$

$$= \langle \underline{e}_1 \rangle$$

$\Rightarrow \dim(V_2(L_A)) = \{\text{molt. geom. di } \lambda = 2\} = \dim\langle \underline{e}_1 \rangle = 1 < 2 =$

$= \dim(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ non trovo una base di autovettori di $A \Rightarrow$ A non diagonalizzabile

Per B, si ha

$$P_B(t) = \det(B - tI_2) = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

Il polinomio $t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ non ha radici in $\mathbb{R} \Rightarrow$ B è privo di autovalori reali $\Rightarrow$ B non diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

(ma lo sarebbe su $\mathbb{C}$ visto che $t^2+1=0$ ha come radici $\pm i$)

Per C si ha $P_C(t) = \det(C - tI_2) = \begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (3-t)(2-t) - 1$

$= t^2 - 5t + 5 \Rightarrow \quad t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Poiché λ_1 e λ_2 sono 2 autovalori distinti di C ammettono ciascuno di essi autospazi non nulli che sono in somma diretta in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ poiché

$$\dim\left(V_{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}(L_C)\right) \geq 1 \quad e \quad \dim\left(V_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}(L_C)\right) \geq 1$$

e $\underbrace{V_{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}(L_C) \oplus V_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}(L_C)}_{\dim \geq 2} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\dim = 2} \Rightarrow V_{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}(L_C) \oplus V_{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}(L_C) = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \exists$ base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di $C \Rightarrow$ C è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$