

Esercizio 1

(1) Prendiamo la matrice completa del $SL(2,3;\mathbb{R})$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & | & 5 \\ 1 & -1 & 7 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la sottomatrice formata dalla I e II colonne

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 - (2) = -5 \neq 0 \Rightarrow B$ è quadrata invertibile
e dunque a rango massimo $\Rightarrow$ I e II colonne di C sono
linearmente indipendenti

Poiché $C \in M(2 \times 4; \mathbb{R}) \Rightarrow \text{rg}(C) \leq 2$
ma poiché le prime 2 colonne sono indipendenti $\Rightarrow \text{rg}(C) = 2$
cioè C ha rango massimo uguale a 2

Stessa cosa diciasi per la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
è la B di prima

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

Poiché $\text{rg}(A) = \text{rg}(C) = 2$, per Rouché - Capelli il
 $SL(2;3;\mathbb{R})$ è compatibile e le sue soluzioni dipendono da

$$\begin{matrix} 3 & - & 2 & = & 1 & \text{parametro libero} \\ \downarrow & & \searrow & & & \\ \neq \text{indeterminate} & & \text{rg}(C) = \text{rg}(A) & & & \end{matrix}$$

In altri termini il luogo delle soluzioni è una retta affine
in $\mathbb{R}^3$

(2) Aggiungendo la terza equazione si ottiene un $SL(3,3;\mathbb{R})$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Con Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -8 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\det(A) = 24 + 70 - 20 - [25 + 84 - 16] = 74 - 93 = -19 \neq 0$$

A invertibile $3 \times 3 \Rightarrow \text{rg}(A) = 3$ massimo

Per massimalità, pure $\text{rg}(A|b) = 3$

Vale Rouché - Capelli e le soluzioni dipendono da 0 parametri
cioè $\exists$ un'unica soluzione

(3) Utilizziamo Cramer

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & 7 \\ 10 & 4 & -8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-38}{-19} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 7 \\ 5 & 10 & -8 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-38}{-19} = 2$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-19}{-19} = 1$$

Pertanto l'unica soluzione è $\underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(4) Calcoliamo A^{-1} utilizzando

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Cof}(A))^t$$

$\text{Cof}(A)$ = matrice dei complementi algebrici o cofattori
degli elementi di A

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

il cofattore o complemento algebrico di a_{ij} è

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & a_{ij} \\ \hline & \end{array} \right)$$

peraltro

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\alpha_{11} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (8 - 28) = -20$$

$$\alpha_{12} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-8 - 35) = 43$$

$$\alpha_{13} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (4 + 5) = +9$$

$$\alpha_{21} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-16 + 20) = -4$$

$$\alpha_{22} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-24 + 25) = 1 \Rightarrow \text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -20 & 43 & 9 \\ -4 & 1 & -2 \\ 9 & -26 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{23} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = -1 \cdot (12 - 10) = -2$$

$$\alpha_{31} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (14 - 5) = 9$$

$$\alpha_{32} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot (21 + 5) = -26$$

$$\alpha_{33} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3 - 2) = -5$$

$$\text{Cof}(A)^t = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 9 \\ 43 & 1 & -25 \\ -9 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Cof}(A)^t = \frac{1}{-19} \cdot \text{Cof}(A)^t = \begin{pmatrix} \frac{20}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{9}{19} \\ -\frac{43}{19} & -\frac{1}{19} & \frac{25}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{2}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -19$$

$$\begin{aligned} \underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} \frac{20}{19} & \frac{4}{19} & -\frac{9}{19} \\ -\frac{43}{19} & -\frac{1}{19} & \frac{25}{19} \\ \frac{9}{19} & \frac{2}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \frac{20}{19} + 7 \cdot \frac{4}{19} - 10 \cdot \frac{9}{19} \\ -5 \cdot \frac{43}{19} - 7 \cdot \frac{1}{19} + 10 \cdot \frac{25}{19} \\ -9 \cdot \frac{5}{19} + 7 \cdot \frac{2}{19} + 10 \cdot \frac{5}{19} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{100 + 28 - 90}{19} \\ \frac{-215 - 7 + 250}{19} \\ \frac{-45 + 14 + 50}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{19} \\ \frac{38}{19} \\ \frac{19}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1) f ha matrice rappresentativa $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Per stabilire che $f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^5)$ è sufficiente verificare che $\det(A) \neq 0$

Fare subito lo sviluppo di Laplace è molto laborioso con A scritta in questo modo

Si possono semplificare i conti, sfruttando il fatto che la funzione $\det$ è multilineare nelle righe

Se denotiamo con R_A^i la i -esima riga di A allora

$$A = \begin{pmatrix} R_A^1 \\ R_A^2 \\ R_A^3 \\ R_A^4 \\ R_A^5 \end{pmatrix}$$

Ogni volta che sostituiamo una riga R_A^i con

$$R_A^i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_A^j$$

si ottiene

$$A \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_A^j \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = \det \begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_A^j \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{det lineare} \\ \text{nelle righe} \\ i\text{-esima}}}{=} \det \begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^i \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \lambda_j \det \begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^j \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix}$$

$$= \det(A) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \det \begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^j \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix}$$

Ma poiché $j \neq i$, nelle matrici $\begin{pmatrix} R_A^1 \\ \vdots \\ R_A^j \\ \vdots \\ R_A^5 \end{pmatrix}$ ci sono sempre due righe uguali $\Rightarrow$ il loro determinante è sempre zero

Posso allora trasformare A con operazioni elementari

$$R_A^i \longrightarrow R_A^i + \sum_{j \neq i} \lambda_j R_A^j$$

che non cambiano il valore del determinante

in modo da avere tanti zeri per sviluppare Laplace

$$A \xrightarrow{R_A^1 \rightarrow R_A^1 - R_A^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A'$$

$$\xrightarrow{R_{A'}^2 \rightarrow R_{A'}^2 - R_{A'}^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A''$$

Poiché $\det(A) = \det(A') = \det(A'')$ sviluppo secondo Laplace rispetto I Righe di A'' e otteniamo

$$\det(A'') = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Laplace} \\ \downarrow \\ \text{elemento} \\ \text{I riga e V colonna}}}{(a_{15})^{1+5}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{cofattore di} \\ a_{15}}}{a_{15}} = 1 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A questo determinante riuso di nuovo Laplace rispetto a
I Riga

(6)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = a_{13} \cdot a_{13} + a_{14} \cdot a_{14}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 cofattori

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

qui applico
 $R^1 \rightarrow R^1 - R^2$

qui applico
 $R^1 \rightarrow R^1 - R^2$

$$= -1 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 applico
 Sarrus
 sulle 3×3

$$= -1 \left[(0+2+0) - (0+0+8) \right] + 2 \left[(0+2+16) - (4+0-4) \right]$$

$$= -1(-6) + 2(18) = 6 + 36 = 42 \neq 0$$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ invertibile e quindi f è
 automorfismo

(ii) Pertanto $\ker(f) = \{0\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

(iii) e ogni vettore $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ codominio ha un'unica
 controimmagine mediante f che è proprio
 $f^{-1}(\underline{w})$

Visto che f è invertibile, in particolare suriettiva

cioè $\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ codominio è t.c. $\underline{w} \in \text{Im}(f) \Rightarrow f^{-1}(\underline{w}) \neq \emptyset$

$\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ ed inoltre ogni vettore $\underline{w}$ ha un'unica controimmagine
 per via della invertibilità di f , cioè $f^{-1}(\underline{w}) = \{f^{-1}(\underline{w})\}$.

Esercizio 3

(7)

(i) La matrice che esprime per colonne i vettori $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ in coordinate in base $\mathcal{E}^3 \bar{e}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Sarrus}}}{=} (1 + 0 + 0) - (-2 + 0 + 0) = 3 \neq 0$$

Pertanto M invertibile $\Rightarrow M$ rango max = 3 $\Rightarrow$ le tre colonne di M sono indipendenti $\Rightarrow \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\} \bar{e}$ un sistema linearmente indipendente in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \bar{e}$ minimale $\Rightarrow \bar{e}$ una base $\mathcal{B}$

La matrice cambiamento di base $\bar{e}$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

(ii) Poiché $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$
 $f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$
 $f(\underline{e}_3) = \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

$$M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}^3) & \xrightarrow[\text{blue arrow}]{f \rightsquigarrow A = M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^3}(f)} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}^3) \\ \uparrow \text{blue arrow } \text{Id}_{\mathbb{R}^3} & & \downarrow \text{blue arrow } \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow[\text{red arrow}]{f \rightsquigarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{red arrow } f} = \downarrow \text{blue arrow } \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ \text{blue arrow } \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \uparrow$$

Portanto

(8)

$$\begin{aligned} M_B^B(\varphi) &= M_B^B(\downarrow \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ \varphi \circ \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \uparrow) \\ &= M_{\mathcal{E}^3}^B(\downarrow \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^3}(\varphi) \circ M_B^{\mathcal{E}^3}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} \uparrow) \end{aligned}$$

$$\text{Ma } M_B^{\mathcal{E}^3}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3} \uparrow) = M_B^{\mathcal{E}^3} = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{E}^3}(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}^3}^B(\downarrow \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathcal{E}^3}^B = (M_B^{\mathcal{E}^3})^{-1} = M^{-1}$$

In altre parole

$$M_B^B(\varphi) = M^{-1} A M$$

Si tratta di calcolare M^{-1}

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\text{Cof}(M))^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Conti come
nei precedenti
esercizi

Portanto

$$\begin{aligned} M_B^B(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In d'etre p'awle

(19)

$$f(\underline{b}_1) = \frac{5}{3} \underline{b}_1 - 2 \underline{b}_2 + \frac{2}{3} \underline{b}_3$$

$$f(\underline{b}_2) = -2 \underline{b}_1 - \underline{b}_3$$

$$f(\underline{b}_3) = \frac{2}{3} \underline{b}_1 + \frac{1}{3} \underline{b}_2 + \frac{4}{3} \underline{b}_3$$