GEOMETRIA PROIETTIVA

FLAMINIO FLAMINI

1. Definizione formale di spazi proiettivi

Fino ad ora abbiamo introdotto gli spazi proiettivi "aggiungendo" punti agli spazi cartesiani $\mathbb{R}^n$ usuali, $n \geq 1$, seguendo la visione storica del punto di vista di Désargues, basato sugli studi di prospettiva da parte di architetti e pittori del Rinascimento. Abbiamo visto che i punti "aggiunti" a $\mathbb{R}^n$ si considerano come punti *all'infinito* od *impropri* di $\mathbb{R}^n$ e che questi *punti impropri* hanno un'interpretazione geometrica di *direzioni* in un opportuno spazio cartesiano $\mathbb{R}^{n+1}$ piu' grande, con coordinate $X_0, X_1, \ldots, X_n$, in cui lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^n$ di partenza si identifica classicamente con l'iperpiano di equazione cartesiana

$$X_0 = 1$$

e si intepreta come uno *schermo* su cui le varie direzioni (o rette vettoriali) uscenti dall'origine O di $\mathbb{R}^{n+1}$ si proiettano (vedasi **PARAGRAFO 13.1** del testo e Figura 1 qui sotto)

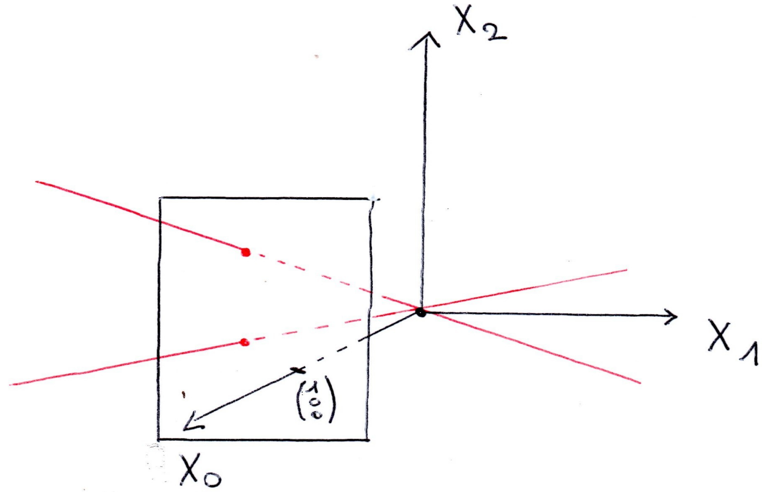

Figure 1. Schermo affine per $n = 2$

Poiche' e' del tutto naturale richiedere che i punti di una "struttura geometrica" abbiano tutti la medesima natura, si rende necessaria una diversa introduzione alla Geometria Proiettiva, in modo tale da renderla indipendente dalla geometria affine ed euclidea dello spazio cartesiano $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1. *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Consideriamo l'insieme*

$$V \setminus \{\underline{0}\}$$

e su esso definiamo la relazione di equivalenza $\sim$ cosi' posta:

$$\underline{u},\ \ \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\} \text{ sono t.c. } \underline{u} \sim \underline{v} \ \Leftrightarrow\ \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } \underline{u} = \lambda \underline{v}.$$

Notare che la relazione $\sim$ e' stata gia' incontrata in **ESEMPIO 13.1.2** nelle note.

La classe di equivalenza rispetto alla relazione $\sim$ di un vettore $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ la denoteremo con il simbolo

$$[\underline{v}]$$

ed e':

$$[\underline{v}] := \big\{\underline{u} \in V \setminus \{\underline{0}\} \mid \underline{u} \sim \underline{v}, \ \text{ i.e. } \underline{u} = \lambda \underline{v}, \ \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big\}.$$

In altri termini, l'elemento $[\underline{v}]$ rappresenta la retta vettoriale $\mathrm{Span}(\underline{v}) \subset V$ privata del vettore nullo, piu' precisamente $[\underline{v}]$ rappresenta tutti i vettori non nulli di questa retta vettoriale.

Visto che $\sim$ e' una relazione di equivalenza, abbiamo:

Definizione 2. *L'insieme quoziente*

$$\frac{V \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

e' detto proiettificazione dello spazio vettoriale V *od equivalentemente* spazio proiettivo associato a V *e sara' denotato con il simbolo $\mathbb{P}(V)$. Gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ sono le classi di equivalenza $[\underline{v}]$, al variare di $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$.*

Per definizione di insieme quoziente, notiamo che esiste una naturale applicazione suriettiva

$$\pi : V \setminus \{\underline{0}\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V) \tag{1.1}$$

(ricordiamo che il simbolo $\twoheadrightarrow$ sta a significare che l'applicazione e' suriettiva) chiamata *proiezione canonica* indotta da $\sim$; per ogni $[\underline{v}] \in \mathbb{P}(V)$ la sua fibra (o insieme di controimmagini) secondo π e':

$$\pi^{-1}([\underline{v}]) = \mathrm{Span}(\underline{v}) \setminus \{\underline{0}\}. \tag{1.2}$$

Viceversa, per $\underline{u},\ \ \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ si ha

$$\pi(\underline{u}) = \pi(\underline{v}) \Leftrightarrow [\underline{u}] = [\underline{v}] \Leftrightarrow \underline{u} = \lambda \underline{v}, \ \text{ per qualche } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Definizione 3. *Gli elementi $[\underline{v}] \in \mathbb{P}(V)$ verranno d'ora in poi chiamati* punti *di $\mathbb{P}(V)$; per questo motivo verranno denotati come $P = [\underline{v}]$.*

Osservazione 1.1. Notiamo quindi che i punti di $\mathbb{P}(V)$ parametrizzano le direzioni (equivalentemente le rette vettoriali) di V e, per ogni $\underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$, la proiezione canonica π non fa altro che contrarre al punto $P = [\underline{v}]$ la retta vettoriale $\mathrm{Span}(\underline{v})$ privata del suo vettore nullo $\{\underline{0}\}$.

Per questo motivo si ha:

Definizione 4. *Con la notazione precedente, si pone*

$$\dim(\mathbb{P}(V)) := \dim_{\mathbb{R}}(V) - 1.$$

Notare che il simbolo a sinistra $\dim(\mathbb{P}(V))$ ha un significato diverso rispetto a quello di destra $\dim_{\mathbb{R}}(V)$. Infatti $\mathbb{P}(V)$ non ha una struttura di spazio vettoriale (ricordare **PARAGRAFO 13.1** nel testo); il concetto di *dimensione* per $\mathbb{P}(V)$ e' quindi nel senso euristico di "variabilita'" di punti in $\mathbb{P}(V)$. Mentre $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ e' l'usuale nozione di dimensione di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V.

In particolare,

- se $V = \{\underline{0}\}$, allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$,
- se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$, allora $\mathbb{P}(V) = \{P\}$ e' un unico punto e $\dim(\mathbb{P}(V)) = 0$;
- se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2$, allora $\dim(\mathbb{P}(V)) = 1$;

- se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n+1$, allora $\dim(\mathbb{P}(V)) = n$.

Nel caso particolare in cui abbiamo fissato una base b di V, cosicche' $V \cong \mathbb{R}^{n+1}$ per mezzo dell'isomorfismo via coordinate rispetto alla base b di V, in tal caso porremo

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{1.3}$$

che chiameremo *spazio proiettivo numerico n-dimensionale su* $\mathbb{R}$. Nel prosieguo, ci focalizzeremo sempre su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e quindi ometteremo il termine *numerico* d'ora in poi.

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ viene detta *retta proiettiva*;
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ viene detto *piano proiettivo*;
- $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ viene detto *spazio proiettivo tridimensionale*;
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ viene detto *spazio proiettivo n-dimensionale*;

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n+1}$ consideriamo la base canonica

$$e := \underline{e}_0, \underline{e}_1, \ldots \underline{e}_n;$$

poiche' ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ si scrive in modo unico come

$$\underline{v} = X_0\underline{e}_0 + X_1\underline{e}_1 + \ldots + X_n\underline{e}_n$$

ove $(X_0, X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base e, denoteremo con

$$P = [\underline{v}] := [X_0, X_1, \ldots, X_n]. \tag{1.4}$$

Osservazione 1.2. (i) Visto che $[\underline{v}] = [\lambda\, \underline{v}]$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha allora

$$[X_0, X_1, \ldots, X_n] = [\lambda X_0,\ \lambda X_1, \ldots,\ \lambda X_n],\ \ \forall\ \ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Per questo motivo $[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ vengono chiamate *coordinate omogenee* del punto

$$P = [\underline{v}] := [X_0, X_1, \ldots, X_n]$$

in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; esse sono definite a meno di proporzionalita', coerentemenete con la definizione di $\mathbb{P}(V)$ come in Definizione 1.
(ii) E' opportuno rilevare che, per costruzione, $[0, 0, \ldots, 0]$ non e' MAI definito in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. In altri termini, per ogni punto $P = [X_0, X_1, \ldots, X_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, esiste sempre almeno una coordinata $X_i \neq 0$, $0 \leq i \leq n$.

Nei paragrafi seguenti reinterpretiamo le considerazioni fatte in **PARAGRAFO 13.1** del testo con questa nuova costruzione formale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

1.1. **Retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.** Per quanto descritto precedentemente, si ha

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) := \{[X_0, X_1] \mid (X_0, X_1) \neq (0, 0), X_i \in \mathbb{R}\}$$

con l'ulteriore condizione che per (X_0, X_1), $(\lambda X_0, \lambda X_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$[X_0, X_1] = [\lambda X_0, \lambda X_1].$$

Osserviamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ contiene come sottoinsieme

$$\mathcal{A}_0 := \left\{[X_0, X_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \mid X_0 \neq 0\right\}.$$

Poiche' le coordinate omogenee $[X_0, X_1]$ sono definite a meno di proporzionalita' e $X_0 \neq 0$, ponendo

$$x := \frac{X_1}{X_0} \tag{1.5}$$

si ha anche

$$\mathcal{A}_0 := \{[1, x] \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

In altri termini, $\mathcal{A}_0$ e' identificato all'usuale asse reale $\mathbb{R}$ con coordinata (non piu' omogenea) x e l'unico punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ non rappresentato in $\mathcal{A}_0$ e' il punto $[0, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{A}_0$. Pertanto $\mathcal{A}_0$ viene chiamato *carta (o schermo) affine* della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e $[0, 1]$ e' *punto improprio (od all'infinito)* per la carta $\mathcal{A}_0$. Notiamo quindi che la carta affine $\mathcal{A}_0$ svolge il ruolo di retta cartesiana $\mathbb{R}$ cui abbiamo aggiunto il punto improprio $[0, 1]$ come fatto in **PARAGRAFO 13.1** delle note (cf. Figura 2).

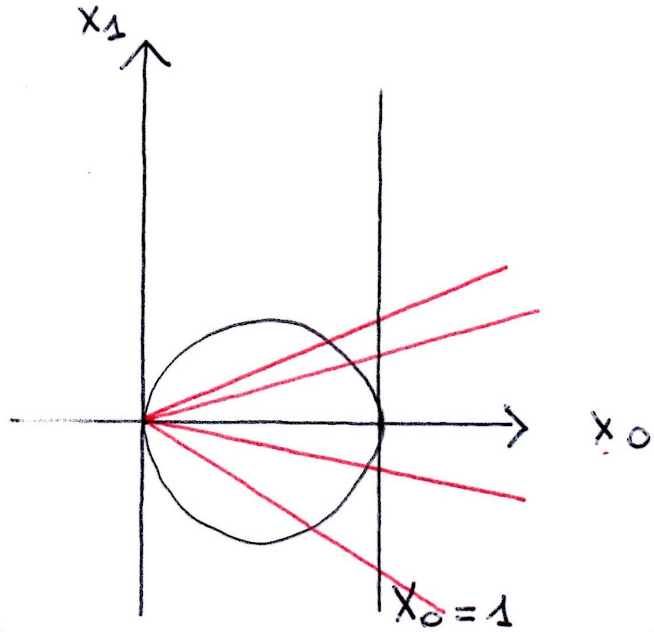

FIGURE 2. Schermo affine $\mathcal{A}_0$ e proiezione stereografica

Analogamente si ha

$$\mathcal{A}_1 := \left\{ [X_0, X_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \mid X_1 \neq 0 \right\}.$$

Ponendo

$$\xi := \frac{X_0}{X_1} \tag{1.6}$$

si ha anche

$$\mathcal{A}_1 := \{[\xi, 1] \mid \xi \in \mathbb{R}\} = \{\xi \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

In altri termini anche $\mathcal{A}_1$ e' identificato ad un altro asse reale $\mathbb{R}$ con coordinata (non piu' omogenea) ξ e l'unico punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ non rappresentato in $\mathcal{A}_1$ e' il punto $[1, 0] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{A}_1$. Analogamente a prima, $\mathcal{A}_1$ viene chiamato *carta (o schermo) affine* della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ di cui $[1, 0]$ e' *punto improprio (od all'infinito)* (cf. Figura 3)

Riassumendo:

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ha due carte affini fondamentali $\mathcal{A}_0$ ed $\mathcal{A}_1$ tali che
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1;$$
- ambedue le carte affini $\mathcal{A}_0$ ed $\mathcal{A}_1$ sono identificabili con una retta reale $\mathbb{R}$, ciascuna con coordinata cartesiana x e ξ, rispettivamente;
- l'origine $x = [1, 0] = 0 \in \mathcal{A}_0$ diventa punto improprio della carta affine $\mathcal{A}_1$;
- il punto improprio $[0, 1]$ di $\mathcal{A}_0$ diventa origine $\xi = [0, 1] = 0$ della carta affine $\mathcal{A}_1$;

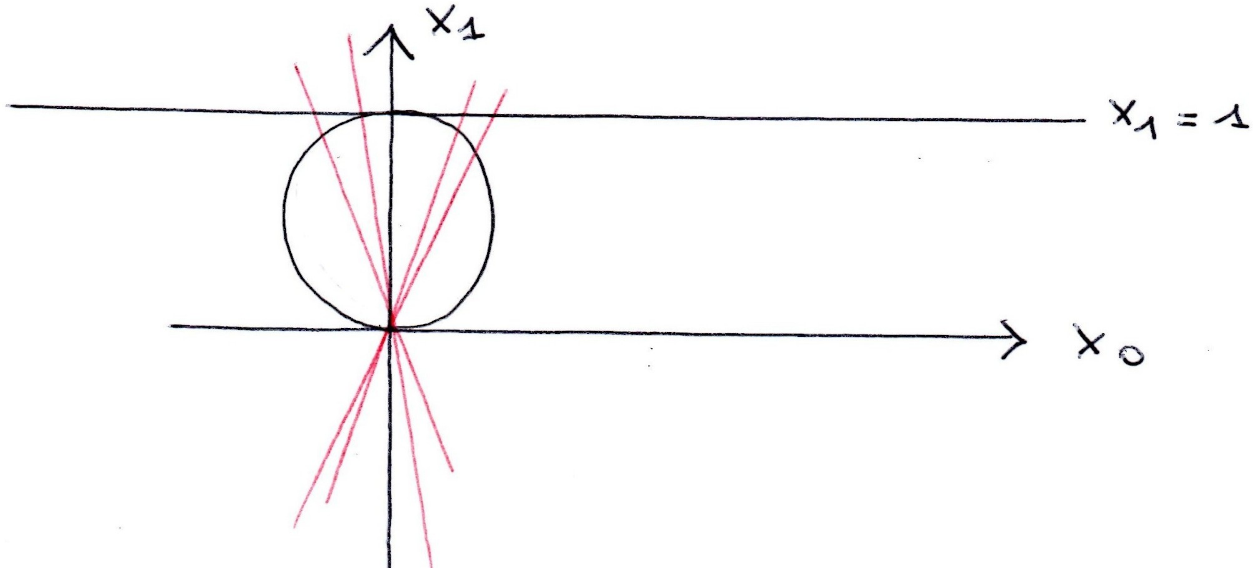

FIGURE 3. Schermo affine $\mathcal{A}_1$ e proiezione stereografica

- in $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1$, dove entrambe le coordinate cartesiane x e ξ hanno significato, vale la relazione $x\,\xi = 1$.

Ritroviamo quindi le interpretazioni fornite in **PARAGRAFO 13.1 e FIGURA 1** nelle note.

1.2. **Piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.** Come nel caso di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, abbiamo

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) := \{[X_0, X_1, X_2] \mid (X_0, X_1, X_2) \neq (0,0,0), X_i \in \mathbb{R}\}$$

con l'ulteriore condizione che per (X_0, X_1, X_2), $(\lambda X_0, \lambda X_1, \lambda X_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$[X_0, X_1, X_2] = [\lambda X_0, \lambda X_1, \lambda X_2].$$

Osserviamo dunque che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contiene come sottinsiemi

$$\mathcal{A}_0 := \left\{[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid X_0 \neq 0\right\},$$
$$\mathcal{A}_1 := \left\{[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid X_1 \neq 0\right\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \left\{[X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid X_2 \neq 0\right\}.$$

Come nel caso di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, poiche' le coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ sono definite a meno di proporzionalita' ed in $\mathcal{A}_0$ vale $X_0 \neq 0$, ponendo

$$x := \frac{X_1}{X_0} \text{ e } y := \frac{X_2}{X_0}, \tag{1.7}$$

si ha anche

$$\mathcal{A}_0 := \left\{[1, x, y] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2.$$

In altri termini, $\mathcal{A}_0$ e' identificato all'usuale piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con coordinate (non piu' omogenee) (x, y). I punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non rappresentati in $\mathcal{A}_0$ sono tutti e soli i punti della forma $[0, \alpha, \beta]$, dove $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. In altri termini sono tutti e soli i punti nel luogo geometrico di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definito da

$$X_0 = 0$$

che e' detto *retta impropria (od all'infinito)* per la carta $\mathcal{A}_0$. Il fatto che questo luogo sia effettivamente una retta proiettiva dentro $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ verra' giustificato meglio nel paragrafo § 2 piu' avanti.

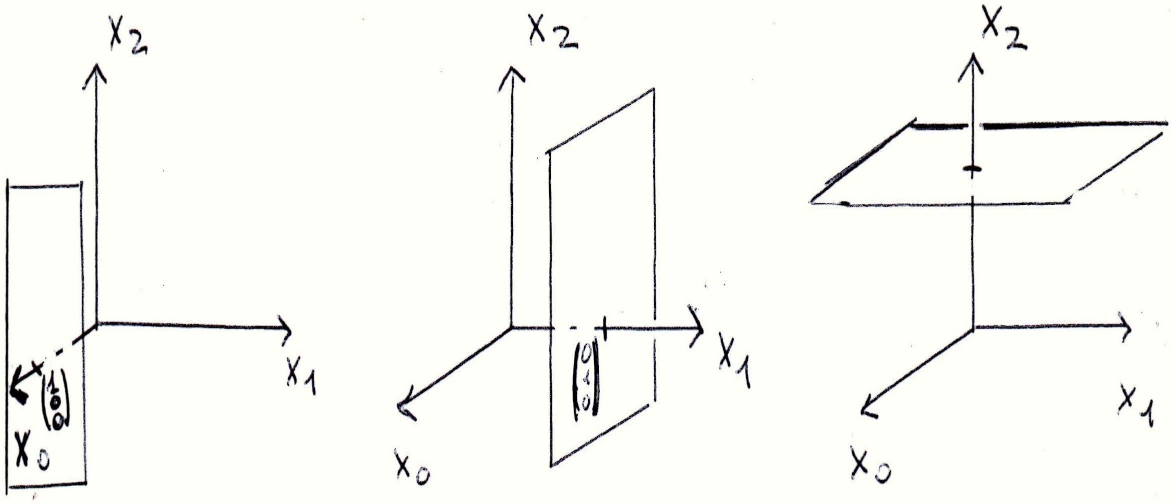

FIGURE 4. I tre schermi affini $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ rispettivamente

In $\mathcal{A}_1$, dove vale $X_1 \neq 0$, poniamo

$$\xi := \frac{X_0}{X_1} \text{ e } \eta := \frac{X_2}{X_1}, \tag{1.8}$$

si ha quindi

$$\mathcal{A}_1 := \left\{[\xi, 1, \eta] \mid (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2.$$

Quindi $\mathcal{A}_1$ e' identificato ad un altro piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con coordinate (non piu' omogenee) (ξ, η). I punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non rappresentati in $\mathcal{A}_1$ sono tutti e soli i punti della forma $[\alpha, 0, \beta]$, dove $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. In altri termini sono tutti e soli i punti nel luogo geometrico di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definito da

$$X_1 = 0$$

che e' detto *retta impropria (od all'infinito)* per la carta $\mathcal{A}_1$ (cf. paragrafo § 2 piu' avanti).

Infine, in $\mathcal{A}_2$ dove vale $X_2 \neq 0$, poniamo

$$z := \frac{X_0}{X_2} \text{ e } w := \frac{X_1}{X_2}, \tag{1.9}$$

si ha quindi

$$\mathcal{A}_2 := \left\{[z, w, 1] \mid (z, w) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(z, w) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathbb{R}^2.$$

Quindi $\mathcal{A}_2$ e' identificato ad un altro piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con coordinate (non piu' omogenee) (z, w). I punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non rappresentati in $\mathcal{A}_2$ sono tutti e soli i punti della forma $[\alpha, \beta, 0]$, dove $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

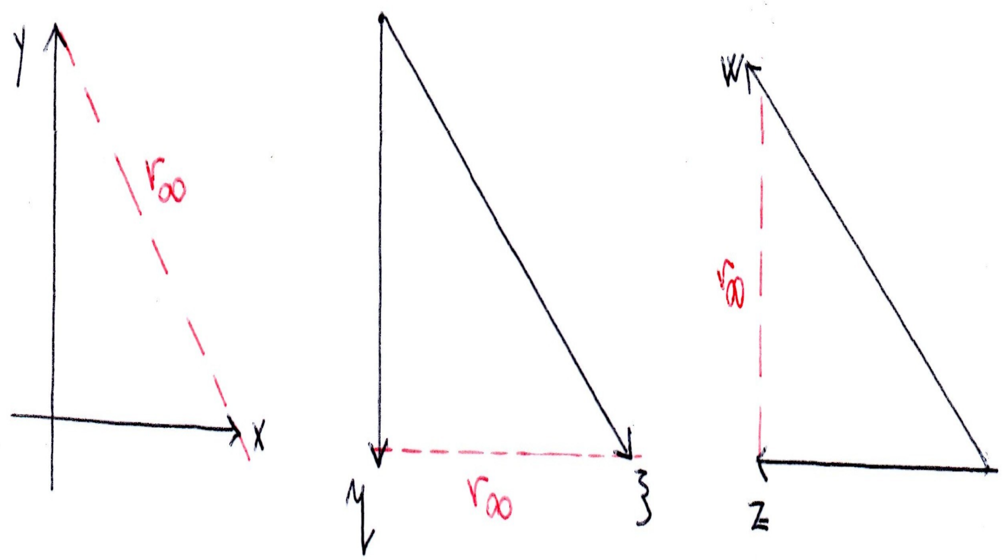

FIGURE 5. I tre piani (affini) $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

In altri termini sono tutti e soli i punti nel luogo geometrico di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definito da

$$X_2 = 0$$

che e' detto *retta impropria (od all'infinito)* per la carta $\mathcal{A}_2$ (cf. paragrafo § 2 piu' avanti).

Riassumendo:

- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha tre carte affini fondamentali $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ tali che
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2;$$
- ciascuna delle carte affini sono identificabili ad un piano cartesiano reale $\mathbb{R}^2$, con opportune cordinate cartesiane (non omogenee);
- in $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ vale $X_0X_1X_2 \neq 0$.

1.3. **Spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.** Seguendo pedissequamente le precedenti considerazioni svolte per retta e piano proiettivo, facilmente si deduce che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, per $n \geq 3$, e' dotato di $n+1$ carte affini fondamentali

$$\mathcal{A}_i := \left\{[X_0, X_1, \dots, X_n] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid X_i \neq 0\right\}, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{1.10}$$

La carta affine $\mathcal{A}_i$ avra' come *iperpiano improprio (od all'infinito)* il luogo geometrico definito da

$$X_i = 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

(cf. paragrafo § 2 piu' avanti per giustificazione del termine *iperpiano*).

1.4. **Modelli per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.** Come osservato in **ESEMPIO 13.1.2** delle note, per descrivere un modello di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ invece di considerare $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ ci si puo' restringere a

$$S_n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$$

dove

$$S_n := \{\underline{u} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||\underline{u}|| = 1\}$$

e' la *sfera* n-dimensionale di centro l'origine O di $\mathbb{R}^{n+1}$ e raggio unitario. Infatti si ha un'applicazione suriettiva

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{v}: & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} & \twoheadrightarrow & S_n \\ & \underline{v} & \longrightarrow & \frac{\underline{v}}{||\underline{v}||} \end{array}$$

dove l'applicazione $\mathfrak{v}$ e' la *versorizzazione* di vettori. La relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ come in Definizione 1 quando ristretta a S_n diventa la relazione *antipodale* (gia' menzionata in **PARAGRAFO 13.2** delle note), che denoteremo con $\equiv$, per cui si avra'

$$\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in S_n \text{ sono t.c. } \underline{u}_1 \equiv \underline{u}_2 \Leftrightarrow \underline{u}_1 = \pm \underline{u}_2. \tag{1.11}$$

Da Definizione 2, si ha pertanto

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \frac{S_n}{\equiv}. \tag{1.12}$$

Per comprendere meglio l'eguaglianza in (1.12), commentiamo piu' in dettaglio i casi $n = 1, 2$.

Per quanto riguarda la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata via relazione antipodale $\equiv$, consideriamo Figura 6. La semicirconferenza rossa si deve identificare a quella nera in figura; il punto in figura

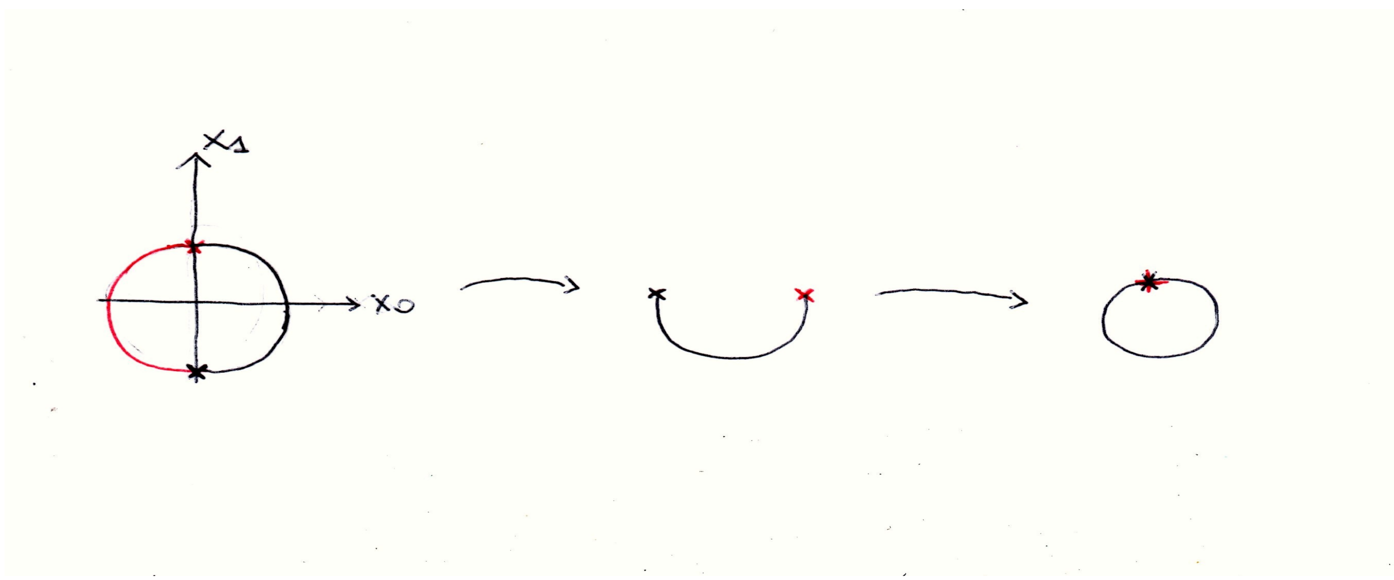

FIGURE 6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ via relazione antipodale

marcato con x in nero si deve identificare al punto marcato con x in rosso. Dopo queste due identificazioni, si ottiene che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e' quindi identificabile alla circonferenza unitaria S_1 come visto in **FIGURA 1** delle note.

Per quanto riguarda il modello di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ottenibile via relazione antipodale, consideriamo Figura 7. La calotta rossa della sfera S_2 in figura si deve identificare alla calotta nera in figura; i punti diametralmente opposti della circonferenza sezionale con il piano $X_2 = 0$ devono essere identificati.

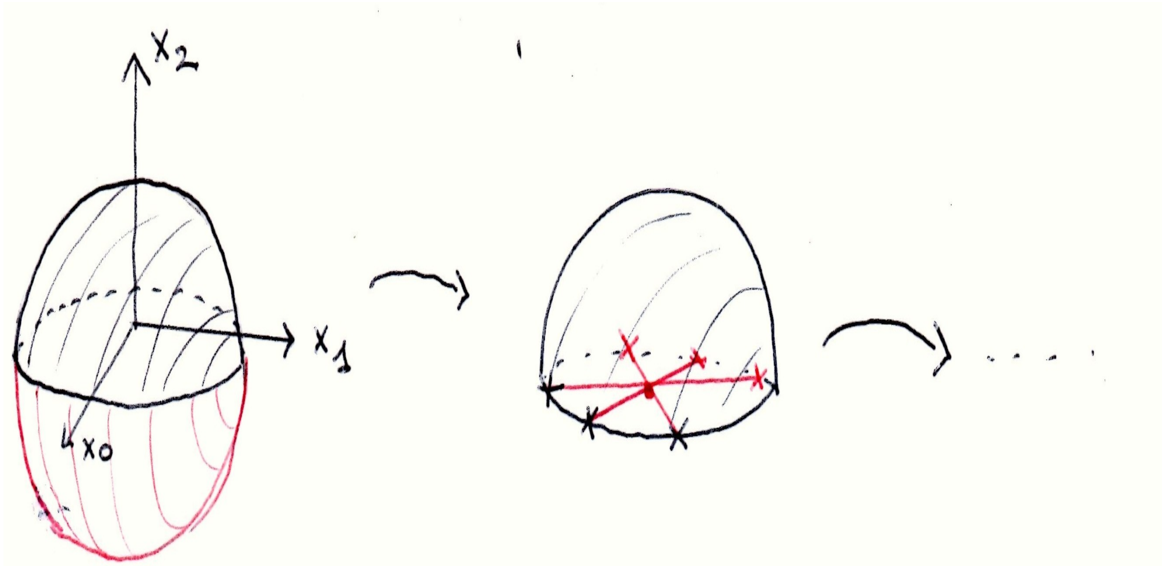

FIGURE 7. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ via relazione antipodale

2. Sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n+1}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un qualsiasi sottospazio vettoriale. Poiche' U e' a sua volta uno spazio vettoriale e poiche'

$$U \setminus \{\underline{0}\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\},$$

la restrizione ad $U \setminus \{\underline{0}\}$ della proiezione canonica π come in (1.1) definisce

$$\mathbb{P}(U) := \pi(U) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \tag{2.1}$$

ove $\mathbb{P}(U)$ e' esattamente come nel senso di Definizione 1 applicata ad $U = V$.

Definizione 5. *Per ogni sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, l'insieme dei punti $\mathbb{P}(U)$ come in* (2.1) *si definisce* sottospazio proiettivo *di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Si ha pertanto*

$$\dim(\mathbb{P}(U)) = \dim_{\mathbb{R}}(U) - 1.$$

L'intero positivo

$$c := \dim(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) - \dim(\mathbb{P}(U)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}) - \dim_{\mathbb{R}}(U) \tag{2.2}$$

viene chiamato la codimensione *di $\mathbb{P}(U)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.*

Notiamo che l'intero c coincide quindi con l'usuale concetto di codimensione del sottospazio U nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e. il numero di equazioni cartesiane omogenee (necessarie e sufficienti) per definire U in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.1. **Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.** Da Definizione 5, ogni sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e' il proiettificato di un opportuno sottospazio vettoriale U dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n+1}$. Il sottospazio vettoriale U, in quanto tale, sara' definito da un sistema omogeneo di equazioni cartesiane della forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,0}X_0 + a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n}X_n & = & 0 \\ a_{2,0}X_0 + a_{2,1}X_1 + \cdots + a_{2,n}X_n & = & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{c,0}X_0 + a_{c,1}X_1 + \cdots + a_{c,n}X_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

con $\mathrm{rg}(A) = n+1-\dim_{\mathbb{R}}(U) = c$, dove c come in Definizione 2.2. Per definizione di $\mathbb{P}(U)$, le stesse equazioni (2.3), definiscono *equazioni cartesiane omogenee* per $\mathbb{P}(U)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, visto che il sistema (2.3) e' costituito da tutti monomi lineari e prive di termini noti.

Analogo discorso per le *equazioni parametriche* per $\mathbb{P}(U)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; queste equazioni coincideranno con le equazioni parametriche che definiscono U come sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$, che sono della forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_0 & = & b_{0,1}\lambda_1 + \cdots + b_{0,n+1-c}\lambda_{n+1-c} \\ X_1 & = & b_{1,1}\lambda_1 + \cdots + b_{1,n+1-c}\lambda_{n+1-c} \\ \cdot & \cdot & \qquad\qquad\cdot \\ \cdot & \cdot & \qquad\qquad\cdot \\ X_n & = & b_{n,1}\lambda_1 + \cdots + b_{n,n+1-c}\lambda_{n+1-c} \end{array}\right. \tag{2.4}$$

ove $[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1-c}] \in \mathbb{P}^{n-c}(\mathbb{R})$.

Esempio 2.1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ l'equazione $X_0 = 1$ definisce necessariamente l'insieme vuoto. Infatti, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, l'equazione $X_0 = 1$ non definisce un sottospazio vettoriale. Inoltre, preso il punto $P = [1, 0] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, se consideriamo la coppia $(1, 0)$ che lo rappresenta, essa e' soluzione di $X_0 = 1$. Ma la coppia $(2, 0)$, che e' un'altra coppia rappresentante lo stesso punto P, non e' soluzione di $X_0 = 1$. Pertanto, l'equazione $X_0 = 1$ (che infatti non e' omogenea) non e' atta a definire luoghi geometrici in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Esempio 2.2. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ l'equazione $X_0 - X_1 = 0$ e' equazione cartesiana per il punto $P = [1, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Infatti, la medesima equazione letta nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, definisce la retta vettoriale

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Le equazioni parametriche della retta vettoriale in $\mathbb{R}^2$ sono

$$X_0 = \lambda, X_1 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le stesse equazioni, ma con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono equazioni parametriche del punto P.

Esempio 2.3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'equazione $X_1 - X_2 = 0$ e' equazione cartesiana per la retta $\ell = \mathbb{P}(U)$ congiungente i punti $[1, 0, 0]$ e $[0, 1, 1]$. Infatti la stessa equazione, letta nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, definisce il piano vettoriale

$$U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

che, per costruzione, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si proietta nella retta proiettiva ℓ. Le equazioni parametriche del piano vettoriale $U \subset \mathbb{R}^3$ sono date da

$$X_0 = \lambda_1,\ X_1 = \lambda_2,\ X_2 = \lambda_2\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Le stesse equazioni, ma con $[\lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sono equazioni parametriche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ della retta $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2.2. **Traccia di sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ nelle carte affini.** Consideriamo la carta affine $\mathcal{A}_i$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, come in (1.10), dove ricordiamo vale la condizione $X_i \neq 0$.

Definizione 6. *Dato un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U)$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ed un intero $0 \leq i \leq n$, l'insieme*

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathcal{A}_i$$

viene detto traccia del sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U)$ nella carta affine $\mathcal{A}_i$.

Notiamo che se il sottospazio $\mathbb{P}(U)$ e' contenuto nell'iperpiano $X_i = 0$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ allora la sua traccia nella carta $\mathcal{A}_i$ e' l'insieme vuoto. Per comprendere meglio come sono fatte le tracce di sottospazi proiettivi, discutiamo alcuni esempi.

Esempio 2.4. Considerando nuovamente l'Esempio 2.3, avevamo la retta proiettiva $\ell \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $X_1 - X_2 = 0$. Nella carta affine $\mathcal{A}_0$, dove consideriamo coordinate cartesiane (non omogenee) come in (1.7), si ha che la traccia

$$\ell \cap \mathcal{A}_0$$

non e' altro che la retta del piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathcal{A}_0$, con coordinate cartesiane (non omogenee) (x, y), definita da equazione cartesiana $x - y = 0$. Notiamo che la retta (affine) $\ell \cap \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^2$ e' la retta passante per l'origine $O = (0, 0) = [1, 0, 0]$ di $\mathcal{A}_0$ e di vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Come gia' discusso nei precedenti paragrafi del testo, la retta proiettiva ℓ si puo' vedere come ottenuta dalla retta (affine) $\ell \cap \mathcal{A}_0$ contenuta nel piano cartesiano $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^2$ con l' "aggiunta" del punto improprio di $\ell \cap \mathcal{A}_0$. Sappiamo che questo punto improprio deve essere collegato con la *direzione* (cioe' il vettore direttore) della retta $\ell \cap \mathcal{A}_0$, i.e. esso e' $[0, 1, 1]$. Questo riflette quanto osservato in Esempio 2.3, dove avevamo notato che la retta proiettiva ℓ era la retta congiungente i punti $[1, 0, 0]$ e $[0, 1, 1]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Esempio 2.5. Consideriamo in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la retta proiettiva di equazione cartesiana $X_0 - X_1 + X_2 = 0$. Nella carta affine $\mathcal{A}_0$, dove consideriamo coordinate cartesiane (non omogenee) come in (1.7), si ha che la traccia

$$\ell \cap \mathcal{A}_0$$

non e' altro che la retta del piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathcal{A}_0$, con coordinate cartesiane (non omogenee) (x, y), definita da equazione cartesiana

$$1 - x + y = 0.$$

Nella carta $\mathcal{A}_1$, con coordinate cartesiane (non omogenee) come in (1.8), si ha che la traccia

$$\ell \cap \mathcal{A}_1$$

non e' altro che la retta del piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathcal{A}_1$, con coordinate cartesiane (non omogenee) (ξ, η), definita da equazione cartesiana

$$\xi - 1 + \eta = 0.$$

Infine, nella carta $\mathcal{A}_2$, con coordinate cartesiane (non omogenee) come in (1.9), si ha che la traccia

$$\ell \cap \mathcal{A}_2$$

e' la retta del piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathcal{A}_2$, con coordinate cartesiane (non omogenee) (z, w), definita da equazione cartesiana

$$z - w + 1 = 0.$$

Esempio 2.6. Sempre in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ consideriamo la retta proiettiva di equazione cartesiana $X_1 = 0$. La sua traccia nella carta affine $\mathcal{A}_0$ non e' altro che l'asse delle ordinate

$$x = 0;$$

la sua traccia nella carta $\mathcal{A}_2$ e' la retta di equazione cartesiana

$$w = 0;$$

invece

$$\ell \cap \mathcal{A}_1 = \emptyset.$$

2.3. **Completamento proiettivo di luoghi geometrici lineari in $\mathbb{R}^n$.** Consideriamo $\mathbb{R}^n$ l'usuale spazio cartesiano, in cui supponiamo di aver fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale $RC(O; x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Per semplicita' di notazioni, quando faremo considerazioni/esempi nei casi di $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, i riferimenti cartesiani saranno denotati semplicemente con $RC(O; x)$, $RC(O; x, y)$ e $RC(O; x, y, z)$, rispettivamente, come usualmente fatto nei **CAPITOLI 11** e **12** del testo.

Sappiamo che i luoghi geometrici lineari $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ (i.e. punti, rette, piani, ..., iperpiani) di dimensione $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ sono definiti da *equazioni cartesiane*, i.e. da sistemi lineari (in generale) non-omogenei e compatibili della forma:

$$
\left\{\begin{array}{ccc}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n-k,1}x_1 + a_{n-k,2}x_2 + \cdots + a_{n-k,n}x_n & = & b_{n-k}
\end{array}\right. \tag{2.5}
$$

dove

$$
\mathrm{rg}\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
a_{n-k,1} & a_{n-k,2} & \cdots & a_{n-k,n}
\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a_{n-k,1} & a_{n-k,2} & \cdots & a_{n-k,n} & b_{n-k}
\end{pmatrix} = n - k
$$

e da equazioni parametriche della forma:

$$
\left\{\begin{array}{ccc}
x_1 & = & p_1 + b_{1,1}t_1 + \cdots + b_{1,k}t_k \\
x_2 & = & p_2 + b_{2,1}t_1 + \cdots + b_{2,k}t_k \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
x_n & = & p_n + b_{n,1}t_1 + \cdots + b_{n,k}t_k
\end{array}\right. \tag{2.6}
$$

ove $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ parametri liberi mentre $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ un punto su $\mathcal{L}$.

La domanda che ci poniamo e' la seguente: sia dato un luogo geometrico lineare $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, definito da equazioni cartesiane (2.5) e parametriche (2.6); se per convenzione identifichiamo lo spazio cartesiano $\mathbb{R}^n$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ (come in (1.10)) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, allora di quale sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il luogo $\mathcal{L}$ e' traccia nella carta $\mathcal{A}_0$? In altri termini, per quale $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ha

$$
\mathcal{L} = \mathbb{P}(U) \cap \mathcal{A}_0? \tag{2.7}
$$

Definizione 7. *Il procedimento di determinare* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *che soddisfi* (2.7) *lo diremo* completamento proiettivo *di* $\mathcal{L}$ *in* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Notiamo che si dice *completamento* proprio perche' determinando $\mathbb{P}(U)$ andiamo ad *aggiungere* a $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ i suoi elementi improprio (od all'infinito) per la carta affine $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. *completiamo* $\mathcal{L}$ con i suoi elementi impropri. Per questo motivo, per maggior chiarezza notazionale, $\mathbb{P}(U)$ come in (2.7) lo denoteremo anche con

$$
\overline{\mathcal{L}} := \mathbb{P}(U)
$$

come se fosse una *chiusura proiettiva* di $\mathcal{L}$. Questa notazione ci permettera' di ricordare meglio che $\mathcal{L} \subseteq \overline{\mathcal{L}} = \mathbb{P}(U)$.

Vediamo infatti che, dato $\mathcal{L}$, allora $\overline{\mathcal{L}} = \mathbb{P}(U)$ e' univocamente determinato. Infatti, per definizione di carta affine $\mathcal{A}_0$, abbiamo che $X_0 \neq 0$ e che

$$x_i = \frac{X_i}{X_0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pertanto, visto che $\mathcal{L}$ e' per ipotesi definito da equazioni cartesiane come in (2.5), e' chiaro allora che $\overline{\mathcal{L}} = \mathbb{P}(U)$ e' definito dal sistema omogeneo:

$$(2.8) \qquad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n - b_1X_0 & = & 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n - b_1X_0 & = & 0 \\ \quad . & . & . \\ \quad . & . & . \\ a_{n-k,1}X_1 + a_{n-k,2}X_2 + \cdots + a_{n-k,n}X_n - b_{n-k}X_0 & = & 0 \end{cases}$$

Infatti, nei punti di $\mathcal{A}_0$, dove $[X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n] = [1, x_1, x_2, \ldots, x_n]$, il sistema (2.8) fornisce tutte e sole le soluzioni del sistema non omogeneo (2.5). Laddove $X_0 = 0$ (che e' iperpiano improprio od all'infinito per $\mathcal{A}_0$), il sistema (2.8) fornisce

$$(2.9) \qquad \begin{cases} X_0 & = & 0 \\ a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n - b_1X_0 & = & 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n - b_1X_0 & = & 0 \\ \quad . & . & . \\ \quad . & . & . \\ a_{n-k,1}X_1 + a_{n-k,2}X_2 + \cdots + a_{n-k,n}X_n - b_{n-k}X_0 & = & 0 \end{cases}$$

che determina un sottospazio proiettivo (perche' definito da un sistema di equazioni omogenee) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ contenuto nell'iperpiano $X_0 = 0$. I punti di questo sottospazio sono gli elementi di $\overline{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$, i.e. gli *elementi impropri* di $\mathcal{L}$.

Se invece $\mathcal{L}$ e' dato da equazioni parametriche (2.6), allora ricordiamo che possiamo sempre considerare $\mathbb{R}^k \ni (t_1, \ldots, t_k) = [1, t_1, \ldots, t_k]$ e porre

$$t_i := \frac{\lambda_i}{\lambda_0}, \ \lambda_0, \lambda_i \in \mathbb{R}, \ \lambda_0 \neq 0, \ \ 1 \leq i \leq k$$

mentre in $\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_0$ abbiamo

$$x_i = \frac{X_i}{X_0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Allora il sistema (2.6) con queste sostituzioni si scrive:

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \frac{X_1}{X_0} & = & \frac{p_1\lambda_0 + b_{1,1}\lambda_1 + \cdots + b_{1,k}\lambda_k}{\lambda_0} \\ \frac{X_2}{X_0} & = & \frac{p_2\lambda_0 + b_{2,1}\lambda_1 + \cdots + b_{2,k}\lambda_k}{\lambda_0} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{X_n}{X_0} & = & \frac{p_n\lambda_0 + b_{n,1}\lambda_1 + \cdots + b_{n,k}\lambda_k}{\lambda_0} \end{cases}$$

che nelle coordinate omogenee di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si legge come

$$(2.11) \qquad \begin{cases} X_0 & = & \lambda_0 \\ X_1 & = & p_1\lambda_0 + b_{1,1}\lambda_1 + \cdots + b_{1,k}\lambda_k \\ X_2 & = & p_2\lambda_0 + b_{2,1}\lambda_1 + \cdots + b_{2,k}\lambda_k \\ . & . & . \\ . & . & . \\ X_n & = & p_n\lambda_0 + b_{n,1}\lambda_1 + \cdots + b_{n,k}\lambda_k \end{cases}$$

con $[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k] \in \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$.

Esempio 2.7. Nella retta reale $\mathbb{R}$ con coordinata cartesiana (affine) $x_1 = x$ consideriamo il luogo
$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}.$$
Questo e' semplicemente il punto di ascissa $x = 2$. Visto che identifichiamo $\mathbb{R}$ con la carta $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, dove vale $x = \frac{X_1}{X_0}$, allora $\overline{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e' definito dall'equazione cartesiana omogenea
$$X_1 - 2X_0 = 0,$$
che fornisce il punto $P = [1, 2]$. In questo caso abbiamo che
$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}.$$
Analogamente, le equazioni parametriche di $\overline{\mathcal{L}}$ sono date dalle soluzioni del sistema omogeneo $X_1 - 2X_0 = 0$, cioe'
$$X_0 = \lambda_0, \ X_1 = 2\lambda_0, \ \ \lambda_0 \neq 0.$$

Esempio 2.8. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane $(x_1, x_2) = (x, y)$, consideriamo dapprima la retta $\mathcal{L}_1$ definita dall'equazione cartesiana
$$x - y = 3.$$
Essa e' quindi la retta passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e di vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Identificando $\mathbb{R}^2$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dove valgono le (1.7), si ha che la retta $\overline{\mathcal{L}}_1 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ completamento proiettivo di $\mathcal{L}_1$ e' definita dall'equazione cartesiana omogenea
$$X_1 - X_2 - 3X_0 = 0.$$
Notiamo che il punto $P \in \mathcal{L}_1$ lo ritroviamo ovviamente come punto $[1, 3, 0] \in \overline{\mathcal{L}}_1$. L'intersezione tra la retta proiettiva $\overline{\mathcal{L}}_1$ e la retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$ (quindi impropria per $\mathcal{A}_0$) e' data dalle soluzioni del sistema omogeneo:
$$\begin{cases} X_0 & = & 0 \\ X_1 - X_2 - 3X_0 & = & 0 \end{cases}$$
Questo sistema e' equivalente al sistema omogeneo:
$$\begin{cases} X_0 & = & 0 \\ X_1 - X_2 & = & 0 \end{cases} \tag{2.12}$$
che fornisce come soluzione il punto $[0, 1, 1] \in \overline{\mathcal{L}}_1 \setminus \mathcal{L}_1$. Questo punto e' il *punto improprio* di $\mathcal{L}_1$, collegato con la direzione di $\mathcal{L}_1$. In particolare abbiamo un esempio dove l'inclusione $\mathcal{L}_1 \subset \overline{\mathcal{L}}_1$ e' stretta.

Sia ora $\mathcal{L}_2$ la retta di $\mathbb{R}^2$ definita da
$$x - y = 5.$$
Notiamo che $\mathcal{L}_2$ e' manifestamente parallela (ma non coincidente) a $\mathcal{L}_1$. Similmente a prima, $\overline{\mathcal{L}}_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e' definita da
$$X_1 - X_2 - 5X_0 = 0.$$
L'intersezione tra la retta proiettiva $\overline{\mathcal{L}}_2$ e la retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$ e' data da:
$$\begin{cases} X_0 & = & 0 \\ X_1 - X_2 - 5X_0 & = & 0. \end{cases}$$
Questo sistema e' equivalente a (2.12), pertanto
$$\overline{\mathcal{L}}_1 \cap \overline{\mathcal{L}}_2 = [0, 1, 1]$$
sebbene in $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^2$ sia avesse
$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$$
in quanto rette parallele ma non coincidenti. In altri termini, le rette affini $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ hanno medesimo punto improprio, come e' giusto che sia, visto che la loro giacitura (equivalentemente il loro vettore direttore) e' lo stesso (vedasi Figura 8)

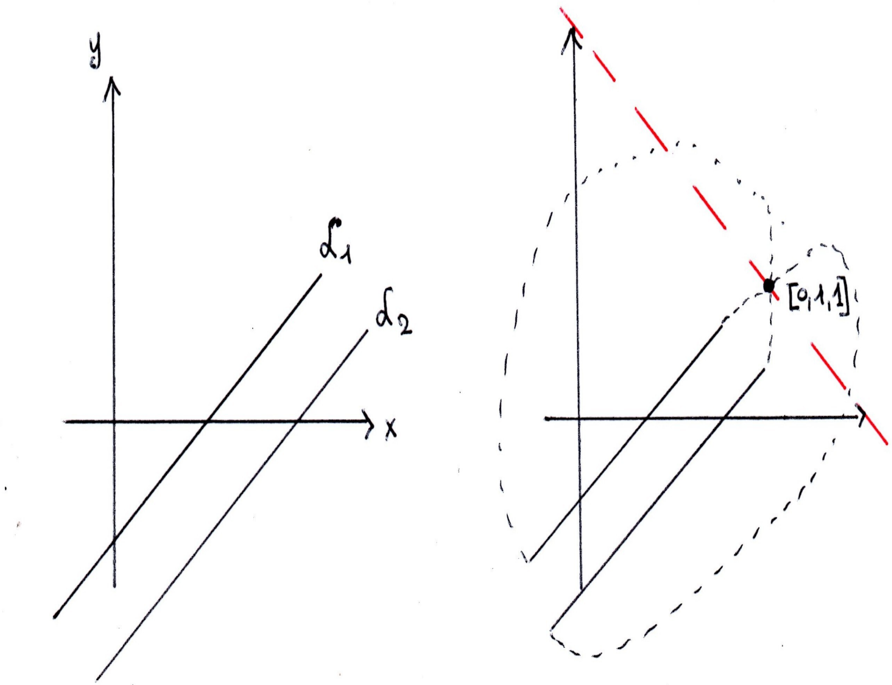

FIGURE 8. Le rette $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ ed i loro completamenti proiettivi

Osservazione 2.9. Il precedente esempio ci mostra una conseguenza particolarmente importante della Geometria Proiettiva: *la nozione di parallelismo sparisce in ambito proiettivo*

3. Esercizi Svolti

Esercizio 1: Sia $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la retta proiettiva reale e siano dati $P = [3, 2]$ e $Q = [-6, -4]$.
(i) Stabilire se $P = Q$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.
(ii) Trovare equazioni cartesiane e parametriche di P in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.
(iii) Determinare i punti traccia di P nelle carte affini fondamentali $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (i) Poiche' i vettori corrispondenti ai punti P e Q sono proporzionali, ne segue che $P = Q$.
(ii) Equazioni cartesiane per P sono date da $2X_0 - 3X_1 = 0$ mentre equatzioni parametriche sono $X_0 = 3\lambda,\ X_1 = 3\lambda,\ \lambda \neq 0$.
(iii) Nella carta $\mathcal{A}_0$ il punto P ha traccia $x = \frac{2}{3}$ mentre nella carta $\mathcal{A}_1$ esso ha traccia $\xi = \frac{3}{2}$.

□

Esercizio 2: Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i punti

$$P = [1, 1, -1],\ Q = [1, 1, 0],\ R = [2, 1, 0].$$

(i) Stabilire se i punti sono allineati.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana omogenea della retta per i punti $P = [1, 1, -1]$ e $Q = [1, 1, 0]$.
(iii) Determinare l'intersezione delle rette $2X_0 - 2X_1 + 3X_2 = 0$ e $2X_0 - 4X_1 + 6X_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (i) I tre punti dati saranno allineati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se e solo se i tre vettori corrispondenti dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (di cui $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e' immagine mediante π) sono linearmente dipendenti. Poiche' il vettore corrispondente al punto P non puo' essere combinazione lineare dei vettori corrispondenti ai punti Q e R, deduciamo che i tre punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non sono allineati.
(ii) L'equazione cartesiana della retta congiungente P e Q e' la stessa dell'equazione cartesiana del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori corrispondenti ai punti P e Q. Questa e' data da $X_0 - X_1 = 0$.
(iii) Notiamo che le due rette date hanno come tracce nella carta affine $\mathcal{A}_0$ le rette

$$2 - 2x + 3y = 0 \quad 1 - 2x + 3y = 0$$

rispettivamente. Esse sono parallele ma non coincidenti. Pertanto l'intersezione delle due rette proiettive date e' semplicemente il loro punto improprio comune che e' $[0, 3, 2]$.

□

Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$, sia dato il fascio $\mathcal{F}$ di rette parallele

$$x + 2y = t,$$

ove $t \in \mathbb{R}$ un parametro. Identificando $\mathbb{R}^2$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il fascio di rette proiettive che ha come traccia in $\mathcal{A}_0$ il fascio di rette affini dato.

Svolgimento. Visto che le rette del fascio in $\mathbb{R}^2$ sono tutte parallele, allora il fascio di rette proiettive e' quello costituito dal fascio di rette per il punto $[0, 2, -1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Notiamo quindi che questo e' un *fascio di rette a centro*, dove il centro del fascio e' il punto improprio comune a tutte le rette affini di $\mathcal{F}$. Se scriviamo l'equazione

$$X_1 + 2X_2 - tX_0 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

stiamo descrivendo il completamento di tutte le rette del fascio $\mathcal{F}$. Per individuare tutte le rette del fascio $\overline{\mathcal{F}}$ di rette proiettive di centro $[0, 2, -1]$ dobbiamo includere la retta $X_0 = 0$, che e' impropria per $\mathcal{A}_0$. Pertanto, possiamo considerare $t = \mu/\lambda$ e quindi $\overline{\mathcal{F}}$ sara'

$$\lambda X_1 + 2\lambda X_2 - \mu X_0 = 0;$$

per $[\lambda, \mu] = [0, 1]$ otteniamo appunto la retta $X_0 = 0$ mentre per $\lambda \neq 0$ la precedente equazione e' equivalente a $X_1 + 2X_2 - tX_0 = 0$ e queste sono le uniche rette di $\overline{\mathcal{F}}$ che hanno una traccia in $\mathcal{A}_0$.

□

Esercizio 4: Sia dato il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$. Si consideri la retta r di equazione cartesiana $2x + 3y = 1$.
(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine (o schermo) $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il punto improprio di r.
(ii) Trovare l'equazione cartesiana della retta passante in $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ ed avente come punto improprio $[0, 1, 2]$.

Svolgimento. (i) Il punto improprio di r e' dato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$2X_1 + 3X_2 - X_0 = 0 = X_0$$

che e' quindi $[0, 3, -2]$.
(ii) Avere punto improprio $[0, 1, 2]$ per una retta affine di $\mathbb{R}^2$ equivale a dire che ha vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pertanto si deve trovare la retta passante per $(1, 0)$ con tale vettore direttore.

□

Esercizio 5: Sia dato il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x, y). Sia date le rette

$$r : x - 2y - 1 = 0,$$

$$s : x + y + 4 = 0,$$

$$t : 4y - 2x + 8 = 0.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare i punti impropri di s e t.
(ii) Dette $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{t}$ i completamenti proiettivi delle rispettive rette, determinare le intersezioni di $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{t}$.
(iii) Dedurre che le rette r e t sono parallele.
(iv) Trovare l'equazione cartesiana di $\overline{r}$ nelle altre carte affini $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento. (i) Il completamento proiettivo di s ha equazione

$$X_1 + X_2 + 4X_0 = 0$$

quindi il punto improprio di s e' dato dal sistema

$$X_0 = 0 = X_1 + X_2 = 0,$$

i.e.

$$[0, 1, -1].$$

Il completamento proiettivo di t ha equazione

$$4X_2 - 2X_1 + 8X_0 = 0;$$

pertanto il punto improprio di t e' $[0, 2, 1]$.
(ii) Notiamo subito che r e s gia' si intersecano in $\mathbb{R}^2$ nel punto di coordinate

$$(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}).$$

Pertanto l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e' il punto $[3, -7, -5]$. Analogo discorso per s e t.
Invece il sistema non omogeneo formato dalle equazioni cartesiane di r e t e' incompatibile, cioe' non esiste intersezione in $\mathbb{R}^2$. In effetti, come nel punto (i) osserviamo che r e t hanno il medesimo punto improprio. Pertanto

$$\overline{r} \cap \overline{t} = [0, 2, 1].$$

Questa intersezione non e' visibile nella carta affine $\mathcal{A}_0$.
(iii) Poiche' r e t hanno lo stesso punto improprio rispetto alla carta $\mathcal{A}_0$, allora r e t sono parallele. Infatti le loro giaciture in $\mathcal{A}_0$ sono ambedue proporzionali a

$$x - 2y = 0.$$

(iv) Nella carta $\mathcal{A}_1$ abbiamo che

$$\xi = X_0/X_1, \ \eta = X_2/X_1.$$

Pertanto la retta $\overline{r}$ induce nella carta $\mathcal{A}_1$ la retta traccia di equazione

$$\xi + 2\eta - 1 = 0.$$

Nella carta $\mathcal{A}_2$ abbiamo che

$$z = X_0/X_2, \ w = X_1/X_2$$

pertanto $\overline{r}$ induce la retta di equazione

$$z - w + 2 = 0.$$

$\square$

Esercizio 6: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z), siano dati il piano

$$\pi : x - z = 2$$

e la retta ℓ passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e di vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Identifichiamo $\mathbb{R}^3$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.
(i) Determinare equazione cartesiana omogenea del completamento proiettivo $\overline{\pi}$ del piano π.
(ii) Determinare la retta impropria di π ed il punto improprio di ℓ.
(iii) Dedurre che π e ℓ erano paralleli.
(iv) Descrivere $\overline{\pi} \cap \overline{\ell}$.

Svolgimento. (i) L'equazione cartesiana omogenea del completamento proiettivo $\overline{\pi}$ e'

$$X_1 - X_3 - 2X_0 = 0.$$

(ii) La retta impropria di π e' data dal sistema

$$X_1 - X_3 - 2X_0 = 0 = X_0,$$

che e' equivalente a

$$X_1 - X_3 = 0 = X_0.$$

Pertanto la retta impropria di π e' la retta di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazioni parametriche

$$X_0 = 0,\ X_1 = \lambda_0,\ X_2 = \lambda_1, X_3 = \lambda_0,\ [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Il punto improprio di ℓ e' direttamente individuato dalla sua direzione, i.e. $[0, 2, 1, 2]$.
(iii) Il punto improprio di ℓ e' manifestamente contenuto nella retta impropria di π. Questo significa appunto che ℓ era una retta paralella a π. Notare che ℓ non era pero' contenuta in π, visto che P non appartiene a π.
(iv) Per quanto descritto precedentemente, ne segue che $\overline{\pi} \cap \overline{\ell} = [0, 2, 1, 2]$.

$\square$

Esercizio 7: Sia $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la retta proiettiva reale.
(i) Determinare la trasformazione proiettiva

$$F : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

t.c. mandi ordinatamente i punti

$$A = [1, 0],\ B = [0, 1],\ C = [1, 1]$$

rispettivamente in

$$A = [1, 0],\ D = [1, -2],\ E = [3, -2].$$

(ii) Determinare gli eventuali punti fissi di F.

Svolgimento. (i) La trasformazione proiettiva F e' rappresentata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) La matrice A ha due autovalori distinti $\lambda = 2$ e $\mu = -2$. I relativi autospazi determinano 2 punti fissi di F che sono i punti $P = [1, 0]$ e $Q = [1, -4]$. $\square$

Esercizio 8: In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri la trasformazione proiettiva $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinata dalla classe di proporzionalita' della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che F ha la retta $X_0 = 0$ come luogo fisso mentre ha la retta $X_2 = 0$ come luogo di punti fissi.

Svolgimento. (i) $F([0, \alpha, \beta]) = [0, \alpha + 2\beta, \beta]$, percio' $X_0 = 0$ viene fissato da F come retta.
(ii) $F([\alpha, \beta, 0]) = [\alpha, \beta, 0]$, cioe' la retta $X_2 = 0$ e' fissata punto per punto da F.

□

Esercizio 9: Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si consideri la quaterna di punti

$$P_0 = [1, 0, 0],\ P_1 = [-1, 1, 0],\ P_2 = [2, -1, 1],\ P_3 = [0, 0, 1].$$

Determinare l'unica trasformazione proiettiva F che trasformi, ordinatamente, i punti della quaterna precedente nei punti della quaterna

$$E_0 = [1, 0, 0],\ E_1 = [0, 1, 0],\ E_2 = [0, 0, 1],\ E_3 = [1, 1, 1]$$

Svolgimento. Per semplicita' ci calcoliamo la matrice associata alla trasformazione proiettiva inversa F^{-1}, che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, la trasformazione proiettiva F sara' associata alla classe di matrici λA^{-1}, dove $\lambda \in \mathbb{R}^*$. □

Esercizio 10: Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, si consideri la trasformazione proiettiva F di $\mathbb{P}^2$ determinata dalla classe di proporzionalita' di matrici λA, dove:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare quali delle rette fondamentali del riferimento standard di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sono rette fisse per la proiettivita' F.
(ii) Stabilire se ciascuna retta fissa determinata al punto (i) e' retta di punti fissi per F.
(iii) Determinare i punti fissi di F.

Svolgimento. (i) Le rette $X_0 = 0$ e $X_1 = 0$ non sono rette fisse per F. Infatti, per ogni $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ si ha

$$F([0, \alpha, \beta]) = [2\beta - \alpha, \alpha - \beta, \beta],$$

e

$$F([\alpha, 0, \beta]) = [2\beta - \alpha, -\beta, \beta].$$

Invece $X_2 = 0$ e' una retta fissa per F, poiche'

$$F([\alpha, \beta, 0]) = [-\beta - \alpha, \beta, 0].$$

(ii) Ovviamente la retta $X_2 = 0$ non e' retta di punti fissi per F.
(iii) I punti fissi su $x_2 = 0$ si ottengono per quei valori di α e β tali che

$$-\alpha - \beta = \lambda\alpha, \quad \beta = \lambda\beta.$$

Si ottengono i due punti

$$[1, -2, 0] \quad [1, 0, 0].$$

Questi effettivamente sono gli unici punti fissi di F. Infatti, la matrice A ha polinomio caratteristico

$$P_A(t) = -(t + 1)(1 - t)^2,$$

che ha soluzioni $t = -1$, semplice, e $t = 1$, di molteplicita' 2. I relativi autospazi in $\mathbb{R}^3$ sono proprio generati da, rispettivamente, $(1, 0, 0)$ e $(1, -2, 0)$.

□

Esercizio 11: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^4$, con coordinate cartesiane (x, y, z, w), si consideri il sottospazio vettoriale
$$\pi_0 : \{x + y + z + w = 0\}$$
ed il suo traslato
$$\pi : \{x + y + z + w = 1\}.$$
Si consideri inoltre
$$\tau : \{x + 2y - z = 0\}.$$
Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, munito di coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2, X_3, X_4]$.

(i) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane omogenee del piano improprio di π_0, di quello di π e di quello di τ.

(ii) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del piano $\beta \subset \mathbb{R}^4$ ottenuto come intersezione di π con τ.

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee della retta impropria del piano β. Riconoscere che la retta impropria determinata e' la retta di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ che e' intersezione del piano improprio di π con il piano improprio di τ.

Svolgimento. (i) Poiche' π_0 e π sono due iperpiani paralleli in $\mathbb{R}^4$, il piano improprio di π_0 coincide con quello di π. L'equazione cartesiana omogenea del completamento proiettivo di π in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ è
$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_0 = 0.$$
Le equazioni cartesiane del piano improprio di π (i.e. del piano di punti impropri di π rispetto alla carta affine $\mathcal{A}_0$) sono dunque:
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - X_0 &= 0 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$
e quindi
$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 0 \\ X_0 &= 0 \end{cases},$$
che in effetti coincidono con le equazioni cartesiane omogenee del piano improprio di π_0.

Le equazioni parametriche omogenee in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ di questo piano improprio sono date da
$$X_0 = 0,\ X_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ X_2 = -\alpha_1,\ X_3 = -\alpha_2,\ X_4 = -\alpha_3,\ \text{ con } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$
Questa rappresentazione mostra che il piano improprio di π (e di π_0) e' il piano in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ generato dai 3 punti (non allineati)
$$P_1 = [0, 1, -1, 0, 0],\quad P_2 = [0, 1, 0, -1, 0],\quad P_3 = [0, 1, 0, 0, -1].$$
In effetti il sottospazio π_0 di $\mathbb{R}^4$, giacitura di π, e' il sottospazio vettoriale generato dai vettori
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$
in altri termini i tre punti P_1, P_2, P_3 che generano il piano improprio di π (e di π_0) si interpretano come i *vettori di giacitura* di π cioe' come la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ di π_0 sopra descritta.

Con conti analoghi, troviamo che le equazioni (omogenee) cartesiane del piano improprio di τ sono:
$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 &= 0 \\ X_0 &= 0 \end{cases}.$$
Le equazioni parametriche omogenee in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ di questo piano improprio sono date da
$$X_0 = 0,\ X_1 = 2\beta_1 + \beta_2,\ X_2 = -\beta_1,\ X_3 = \beta_2,\ X_4 = \beta_3,\ \text{ con } [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

Questa rappresentazione mostra che il piano improprio di τ e' il piano in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ generato dai 3 punti (non allineati)

$$Q_1 = [0,2,-1,0,0], \quad Q_2 = [0,1,0,1,0], \quad Q_3 = [0,0,0,0,1].$$

In effetti τ e' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i.e. analogamente a prima, i tre punti $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ che generano il piano improprio di τ si interpretano come i vettori della base di τ sopra menzionata.

(ii) Il piano $\beta := \pi \cap \tau$ e' il piano di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ x+2y-z &= 0 \end{cases}.$$

Esso e' dunque il piano passante per il punto $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ e con giacitura data da

$$\text{Span}\left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pertanto, sue equazioni parametriche in $\mathbb{R}^4$ sono:

$$x = 2t+3s, \ y = -t-2s, \ z = -s, \ w = 1-t, \ \ (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Notiamo che i vettori di giacitura del piano β sono (come giusto che sia) entrambi ortogonali ai vettori

$$\mathbf{n}_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{n}_\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che sono, rispettivamente, il vettore normale a π ed a τ.

(iii) Equazioni cartesiane (omogenee) della retta impropria di β sono date dal sistema omogeneo:

$$\begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4 &= 0 \\ X_1+2X_2-X_3 &= 0 \\ X_0 &= 0 \end{cases}.$$

Questo mostra che tale retta impropria e' quindi l'intersezione del piano improprio di π (o di π_0) e del piano improprio di τ, come richiesto. Le equazioni parametriche omogenee della retta impropria di β in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono date da:

$$X_0 = 0, \ X_1 = 2\gamma_1 + 3\gamma_2, \ X_2 = -\gamma_1 - 2\gamma_2, \ X_3 = -\gamma_2, \ X_4 = -\gamma_1, \ \ \text{dove } [\gamma_1, \gamma_2] \in \mathbb{P}^1.$$

Con questa rappresentazione, notiamo che la retta impropria di β e' la retta generata dai due punti di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$

$$B_1 = [0,3,-2,-1,0], \quad B_2 = [0,2,-1,0,-1]$$

collegati ai vettori $\mathbf{b_1}$ e $\mathbf{b_2}$ precedentemente considerati.

$\square$