Esercizi sui sistemi lineari e i prodotti di matrici

Es.1 Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Es.2 Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $e_i \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ il vettore la cui unica entrata non nulla è la i-esima e vale 1, sia $f_j \in M_{1,m}(\mathbb{K})$ il vettore la cui unica entrata non nulla è la j-esima e vale 1. Dimostrare che a)$Ae_i = A^i$ e b) $f_j A = A_j$. [1]

Es.3$*$ a) Dimostrare che, se $A \in M_{1,m}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ si ha $(AB)C = A(BC)$. (Suggerimento: usare **Es.2** e distributività del prodotto di matrici)
b) Dimostrare l'associatività del prodotto di matrici. (Suggerimento: ridursi al caso del punto a))

Es.4 Risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti reali.

a) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_4 = 0 \end{cases}$

Es.5 Risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti complessi.

a) $\begin{cases} (1+i)x + iy = 1 \\ 2ix + 2y = 3 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} (1+i)x + (3+i)y = 4i \\ 2ix + (2+4i)y = -4 + 4i \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1+i)x + (3+i)y = 4i \\ 2ix + (2+4i)y = -4 \end{cases}$

Es.6 Descrivere tutte le matrici $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ che commutano con la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, cioè descrivere le matrici $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $AX = XA$.

Es.7 a) Trovare le matrici $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Trovare le matrici $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] con A^i indichiamo la -esima colonna della matrice A e con A_j la j-esima riga della matrice A

Esercizi sui sottospazi vettoriali

Es.1 Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono sottospazi vettoriali motivando in modo rigoroso la risposta. [2]

$Y_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $Y_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0 \right\}$,

$Y_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_3 \neq 1 \right\}$, $Y_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 = 0 \right\}$,

$Y_5 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 x_2 x_3 = 0 \right\}$, $Y_6 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 x_2 \geq 0 \right\}$.

Es.2 Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali sono sottospazi vettoriali. [3]

$Z_1 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(3) = 0\}$, $Z_2 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(2) = 1\}$,
$Z_3 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(1) = p(2)\}$, $Z_4 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p'(1) = 0\}$,
$Z_5 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(1) = p(2) \ e \ p'(1) = 0\}$, $Z_6 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ p(1)p(2) = 0\}$.

Es.3 Stabilire quale dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici con 2 righe e 2 colonne a coefficienti reali sono sottospazi vettoriali.[4]

$W_1 := \left\{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R} \ : \ X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,
$W_2 := \left\{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R} \ : \ X = X^T \right\}$,
$W_3 := \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ x_1 x_2 = x_3 x_4 \right\}$,
$W_4 := \left\{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} X X^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$,
$W_5 := \left\{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ XX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

[2] questa precisazione vale per tutti gli esercizi

[3] Se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ indichiamo con $p'(x)$ la sua derivata

[4] Se $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice trasposta di X è $X^T := \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

Esercizi su generatori e lineare dipendenza

Es.1 a) In $\mathbb{R}^4$ stabilire se $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} >$.

b) In $M_{2,2}(\mathbb{R})$ stabilire se $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{pmatrix} >$.

c) In $\mathbb{R}[X]$ stabilire se $x^2+x+1 \in < x^2+x+2, 2x^2+x+1, -x^2+x+4 >$.

Si svolgano i punti a), b) e c) in due modi: prima usando la definizione di sottospazio vettoriale generato da un insieme di vettori e poi con l'applicazione lineare delle coordinate e l'eliminazione di Gauss.

Es.2 a) Stabilire se i vettori $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

b) Stabilire se i vettori $\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 0\end{pmatrix}$ di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti.

c) Stabilire se i vettori $x^2+x+1, x^2+3x, x+2$ di $\mathbb{R}[x]$ sono linearmente indipendenti.

Si svolgano i punti a), b) e c) in due modi: prima usando la definizione di lineare indipendenza e poi con l'applicazione lineare delle coordinate e l'eliminazione di Gauss.

Es.3 Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala. Sia p il numero dei pivot di S.

a) Per quale valore di p le righe di S formano un sistema di vettori linearmente indipendenti di $M_{1,n}(\mathbb{K})$?

b) Per quale valore di p le colonne di S formano un sistema di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$?

Es.4 a) Stabilire se $< \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} >= \mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se $< \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} >= M_{2,2}(\mathbb{R})$.

c) Stabilire se $< x^2+x+1,\ x^2+2x-2,\ x^2-1 >= \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Es.5 Sia $W := \left\{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \right\}$. Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e trovare un insieme di generatori per W.

Es.6$*$ Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W sottospazi vettoriali di V. Dimostrare che $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se $U \subseteq W$ o $W \subseteq V$.

Es.7 Sia V uno spazio vettoriale e siano U e W sottospazi vettoriali di V tali che $U \cap W$ sia il sottospazio vettoriale nullo di V. Mostrare che, se $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, si ha $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

Es.8$*$ Sia $\mathbb{K}$ un campo con infiniti elementi. Siano $p_1(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $p_2(x) \in \mathbb{K}[x]$. Mostrare che, se $p_1(a) = p_2(a)$ per ogni $a \in \mathbb{K}$, allora $p_1(x) = p_2(x)$. (Suggerimento: dimostrare e usare che, se per un $a \in \mathbb{K}$ si ha p(a)=0, allora esiste un polinomio $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ tale che $p(x) = q(x)(x-a)$[Ruffini].)

Esercizi su basi e dimensione

Es.1 Indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere (motivare rigorosamente).

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ sono vettori linearmente indipendenti di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a') $< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} >= M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ sono vettori linearmente indipendenti di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b') $< \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} >= M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Es.2 a) Estrarre da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ un sistema di generatori per il sottospazio vettoriale $V :=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$ di $\mathbb{R}^4$.

b) Estrarre da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ un sistema di generatori per il sottospazio vettoriale $W :=< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} >$ di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

c) Estrarre da

$$\left\{ x^3 + x^2 + x + 2,\ x^3 + 2x^2 + 3x + 1,\ 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3,\ 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2,\ 2x + 1 \right\}$$

un sistema di generatori per il sottospazio vettoriale

$$Z :=< x^3 + x^2 + x + 2, x^3 + 2x^2 + 3x + 1, 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3, 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2, 2x + 1 >$$

di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Es.3 Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia W un sottospazio vettoriale di V. Dimostrare che $W = V$ se e solo se V e W hanno la stessa dimensione.

Es.4 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, .., v_n$ n vettori di V.

a) Dimostrare che $v_1, v_2, .., v_n$ costituiscono una base di V se e solo se sono linearmente indipendenti.

b) Dimostrare che $v_1, v_2, .., v_n$ costituiscono una base di V se e solo se generano V.

Es.5$*$ Sia $S \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ una matrice a scala sia p il numero dei pivot di S. Dimostrare che la dimensione del sottospazio vettoriale di $M_{1,n}(\mathbb{K})$ generato dalle righe di S è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m = M_{m,1}(\mathbb{K})$ generato dalle colonne di S ed entrambi sono uguali a p.

Esercizi sulle applicazioni lineari

Es.1 Quali delle seguenti funzioni sono applicazioni lineari?
$f_1 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f_1(p(x)) = 2p(5) + p'(2)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_2(p(x)) = \begin{pmatrix} 2p(5) + p'(2) \\ p''(3) + p(0) \end{pmatrix}$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_3 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $f_3(p(x)) = \begin{pmatrix} 2p(5) + p'(2) \\ p''(3) + p(0) + 3 \end{pmatrix}$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_4(p(x)) = p(x)(3x^2 + 1)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_5 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_5(p(x)) = (p(x) + 1)(3x^2 + 1)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_6 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definita ponendo $f_6(p(x)) = (p(x))^2$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$f_7 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f_7(p(x)) = p(1)p(0)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,
$g_1 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita ponendo $g_1(A) = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,
$g_2 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita ponendo $g_2(A) = 2A + 3A^T + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,
$g_3 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita ponendo $g_3(A) = A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,
$g_4 : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita ponendo $g_4(A) = AA^T$ per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,

Es.2 a) Quante sono le applicazioni lineari $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che
$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?
b) Quante sono le applicazioni lineari $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che
$G\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $G\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $G\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?
c) Quante sono le applicazioni lineari $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che
$H\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $H\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$?

Es.3 a) Quante sono le matrici $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tali che
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?
b) Quante sono le matrici $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tali che
$B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$?
c) Quante sono le matrici $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tali che
$C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$?

Es.4 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare una base del nucleo e una dell'immagine dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ associata alla matrice A, (cioè l'applicazione lineare definita ponendo $L_A(X) := AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$).

Es.5 Sia V uno spazio vettoriale di dimnsione 3 sia v_1, v_2, v_3 vettori linearmente indipendenti di V. Stabilire se $w_1 := v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 := v_1 + 2v_2$ e $w_3 := v_2 + 2v_3$ costituiscono una basa di V.

Es.6 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e siano U e W sottospazi vettoriali di V di dimensione 4. Quali valori può assumere la dimensione di $U \cap W$?

Esercizi sul rango, nucleo ed immagine

Es.1 a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ calcolare il rango di $A_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & t^2+t+1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e di $\widetilde{A}_t := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & t \\ 1 & 3 & 2 & 2+t \\ 1 & 1 & t^2+t+1 & 2t+1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.
b) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ammette il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=t \\ x+3y+2z=2+t \\ x+y+(t^2+t+1)z=2t+1 \end{cases}.$$

Es.2 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata (cioè l'applicazione lineare definita da $L_A(X) := AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^4$). Trovare una base del nucleo e una dell'immagine di L_A.
Es.3 Sia $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi(X) = AX$ per ogni $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.
a) Stabilire se ϕ è un'applicazione lineare.
b) Se ϕ è un'applicazione lineare, trovare una base del nucleo e una dell'immagine di ϕ.
Es.4 Sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi(X) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per ogni $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.
a) Stabilire se ϕ è un'applicazione lineare.
b) Se ϕ è un'applicazione lineare, trovare una base del nucleo e una dell'immagine di ϕ.
Es.5 Sia n un numero intero positivo e siano V e W spazi vettoriali di dimesnione n sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare.
a) Dimostrare che, se ϕ è iniettiva, ϕ è un isomorfismo.
b) Dimostrare che, se ϕ è suriettiva, ϕ è un isomorfismo.

Es.6 a) Esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $Im(\phi) = Ker(\phi)$?
b) Esiste un'applicazione lineare $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $Im(\psi) = Ker(\psi)$?

Esercizi sui sottospazi affini e sulle equazioni parametriche e cartesiane

Es.1 a) Sia $U :=< \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix} >\subset \mathbb{R}^4$ e sia $V :=< \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\4\\6\end{pmatrix} >\subset \mathbb{R}^4$. Trovare una base di $U+V$ e una base di $U \cap V$.

b) Sia $W :=< \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix} >\subset \mathbb{R}^4$ e sia $Z :=< \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 6\end{pmatrix} >\subset M_{2,2}(\mathbb{R})$. Trovare una base di $W+Z$ e una base di $W \cap Z$.

Es.2 Siano $p_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$, $q_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$, $q_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $q_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.
a)Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per p_1 e p_2 e per il piano π passante per q_1, q_2 e q_3.
b) Determinare l'intersezione tra r e π.
(Suggerimento: prima risolvere l'esercizio determinare quante equazioni cartesiane deve contenere un un sistema di equazioni cartesiane per r e un sistema di equazioni cartesiane per π)

Es.3 Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la retta r_t di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $p_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ e per $p_t = \begin{pmatrix}2\\3\\t\end{pmatrix}$ interseca la retta s di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $q_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ e per $q_2 = \begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}$?

Es.4 Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la retta r_t di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per $p_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ e per $p_t = \begin{pmatrix}2\\3\\t\end{pmatrix}$ interseca il piano π di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $x+y+z=1$?

Es.5 Siano $p_0, p_1, p_2, .., p_n$ $n+1$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^m$. Dimostrare che esiste un unico sottospazio affine di $\mathbb{A}^m_{\mathbb{R}}$ di dimensione n passante per $p_0, p_1, p_2, .., p_{n-1}$ e p_n.

6$*$ Siano $p, q \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ e siano V e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ di dimensioni k e l tali che $V+W=\mathbb{R}^n$. Sia $S_1 = p+V$ e sia $S_2 = q+W$.
a) Dimostrare che $S_1 \cap S_2$ è non vuoto.
b) Calcolare la dimensione di $S_1 \cap S_2$.

Esercizi sui calcolo del determinante

Es.1 a) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}1\\1\\1+t\end{pmatrix}$ e $v_3 := \begin{pmatrix}1\\3+t\\5\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

b) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $w_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $w_2 := \begin{pmatrix}2\\1\\3+t\end{pmatrix}$ e $w_3 := \begin{pmatrix}3\\1+t\\5\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

Es.2 a) Calcolare $Det_4\begin{pmatrix}2&3&4&2\\2&1&2&0\\1&3&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}$ e $Det_4\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&0&2&0\\1&1&4&1\\1&2&3&3\end{pmatrix}$.

Es.3 Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcolare $Det_4\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$. Per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ i vettori $v_1 := \begin{pmatrix}0\\-a\\-b\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}a\\0\\-c\end{pmatrix}$ e $v_3 := \begin{pmatrix}b\\c\\0\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

Es.4 Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ calcolare $Det_4\begin{pmatrix}0&0&a&b\\0&0&c&d\\-a&-c&0&0\\-b&-d&0&0\end{pmatrix}$. Per quali $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i vettori $w_1 := \begin{pmatrix}0\\0\\-a\\-b\end{pmatrix}$, $w_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\-c\\-d\end{pmatrix}$ e $w_3 := \begin{pmatrix}a\\c\\0\\0\end{pmatrix}$ $w_4 := \begin{pmatrix}b\\d\\0\\0\end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^4$?

Es.5$*$ Mostrare che per ogni $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ il valore $\left\| Det_2\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}\right\| = |x_1y_2 - y_1x_2|$ è uguale all'area del parallelogramma di lati $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. (Suggerimento: porre $\rho_X := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\rho_Y := \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ e indicare con θ_X e θ_Y gli angoli che i vettori X e Y formano con l'asse delle ascisse)

Esercizi su determinante e matrice inversa

Es.1 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e sia $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che A e B sono matrici invertibili.

b) Calcolare $Det_3(A^5 B^{-4} A)$.[5]

Es.2 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e sia $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

a) Mostrare che A e B sono matrici invertibili.

b) Calcolare $Det_3(A^{-1})$.

c) Esibire, se esiste, una matrice $X \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ tale che $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[5] In questa formula $A^5 = AAAAA$ e $B^{-4} = B^{-1}B^{-1}B^{-1}B^{-1}$

Esercizi su matrici rappresentative e cambiamenti di coordinate

Es.1 Per ogni $t \in \mathbb{R}$ calcolare il rango delle matrici $A_t := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ t+1 & 1 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e

$B_t := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$.

Es.2 Sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi(A) := A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ per ogni $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Consideriamo le basi

$$B_{M_{2,2}} := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{M_{2,3}} := \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. w_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, w_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $M_{2,3}(\mathbb{R})$. Dimostrare che ϕ è un'applicazione lineare e calcolare la matrice rappresentativa $M(\phi)_{B_{M_{2,2}}}^{B_{M_{2,3}}}$ di ϕ rispetto alle basi $B_{M_{2,2}}$ del dominio e $B_{M_{2,3}}$ del codominio.

Es.3 Sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi(p(x)) := A \begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p'(1) & p'(0) \end{pmatrix}$ per ogni $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Consideriamo le basi

$$B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}} := \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$$

$$B_{M_{2,2}} := \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Dimostrare che ϕ è un'applicazione lineare e calcolare la matrice rappresentativa $M(\phi)_{B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}}^{B_{M_{2,2}}}$ di ϕ rispetto alle basi $B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}$ del dominio e $B_{M_{2,2}}$ del codominio.

Es.4 Per quali $t \in \mathbb{R}$ Per ogni $t \in \mathbb{R}$ i polinomi $p_1(x) = t + x + (t-1)x^2$, $p_2(x) = 1 + x$ e $p_3(x) = t + 1 + 2x + 3x^2$ costituiscono una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

Es.5 Sia V uno spazio vettoriale e sia $B_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V. Sia $w_1 := v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 := 2v_1 + v_2 + v_3$ e $w_3 := v_1 + v_2 + 2v_3$.
a) Mostrare che $B_2 := \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di V.
b) Calcolare la matrice $M_{B_2}^{B_1}$ di cambiamento coordinate, dalle coordinate rispetto a B_2 a quelle rispetto a B_1.
c) Calcolare la matrice $M_{B_1}^{B_2}$ di cambiamento coordinate, dalle coordinate rispetto a B_1 a quelle rispetto a B_2.

Es.6 a) Mostrare che $B_1 := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e

$B_2 := \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

b) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e sia $B_{can} := \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $M(\phi)_{B_1}^{B_2}$, $M(\phi)_{B_1}^{B_{can}}$, $M(\phi)_{B_{can}}^{B_2}$ e $M(\phi)_{B_{can}}^{B_{can}}$.

Altri esercizi su matrici rappresentative e cambiamenti di coordinate

Es.1 Sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ la funzione definita da

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := (a+b+d)x^2 + (b+c)x + c + 2d$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Consideriamo le basi

$$B_{M_{2,2}} := \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}} := \left\{ w_1 = 1, w_2 = x, w_3 = x^2 \right\}$$

di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
a) Dimostrare che ϕ è un'applicazione lineare.
b) Calcolare la matrice rappresentativa $M(\phi)^{B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}}_{B_{M_{2,2}}}$ di ϕ rispetto alle basi $B_{M_{2,2}}$ del dominio e $B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 2}}$ del codominio.
c) Trovare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ϕ.

Es.2 Sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che $\phi(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi(x^3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Consideriamo le basi

$$B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 3}} := \left\{ v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2, v_4 = x^3 \right\},$$

$$B_{can} := \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $\mathbb{R}^3$.
a) Calcolare la matrice rappresentativa $M(\phi)^{B_{can}}_{B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 3}}}$ di ϕ rispetto alle basi $B_{\mathbb{R}[x]_{\leq 3}}$ del dominio e B_{can} del codominio.
b) Trovare una base del nucleo ed una base dell'immagine di ϕ.

Es.3 Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'unica applicazione lineare tale che $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Mostrare che $B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base dell'immagine $Im(\phi)$ dell'applicazione lineare ϕ.
b) Sia $\psi : Im(\phi) \to Im(\phi)$ l'applicazione lineare definita da $\psi(v) := \phi(v)$ per ogni $v \in Im(\phi)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M(\psi)^B_B$ di ψ rispetto alla base B usata come base sia del dominio che del codominio.

Es.4 $B := \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ e $B' := \left\{ w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.
Verificare che B e B' sono basi di $\mathbb{R}^2$ e calcolare la matrice di cambiamento di coordinate $M^{B'}_B$ dalle coordinate rispetto alla base B alle coordinate rispetto alla base B'

Es.**5** Sia $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $Det_2(A) = ad - bc \neq 0$.

a) Mostrare che $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

b) Usare il punto a) per calcolare in un altro modo le matrci di cambiamento coordinate $M_B^{B'}$ e $M_{B'}^{B}$ dell'esercizio precedente.

Es.**6** Sia $\theta \in \mathbb{R}$ e sia $A_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$.

a) Mostrare che l'applicazione lineare $L_{A_\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associata ad A_θ (cioè la funzione definita da $L_{A_\theta}(X) = A_\theta X$ per ogni $X \in \mathbb{R}^2$) è la rotazione in senso antiorario con centro nell'origine di un angolo pari a θ.

b) Concludere che, se θ non è un multiplo per un intero di π, l'applicazione lineare $L_{A_\theta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non ammette autovalori e autovettori.