Geometria Proiettiva

$\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$, geometria in $\mathbb{P}^2$

La retta proiettiva $\mathbb{P}^1$.

Sia $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ il piano privato dell'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Due vettori $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ si dicono *collineari* se appartengono alla stessa retta per l'origine, ossia se sono uno multiplo dell'altro per uno scalare non nullo. La collinearità è una relazione di equivalenza che indichiamo con $\sim$:

$$X \sim Y \quad \text{se} \quad Y = \lambda X, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fissato $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, la classe di equivalenza di X è formata da tutti i vettori non nulli della retta per l'origine che contiene X

$$[X] = \{Y = \lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

ossia da tutti i vettori che hanno la stessa direzione di X (non necessariamente lo stesso verso).

Il vettore $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è stato eliminato perché appartiene a tutte le rette per l'origine, dunque non distingue alcuna direzione.

Definizione. La retta proiettiva $\mathbb{P}^1$ è per definizione l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^1 = (\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})/ \sim,$$

ossia l'insieme delle classi di equivalenza dei vettori di $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ rispetto alla relazione di collinearità $\sim$. La retta proiettiva è l'insieme delle direzioni delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

Esempio. Tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -13 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

sono collineari ed individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^1$.

Esempio. Quanti elementi distinti di $\mathbb{P}^1$ individuano i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} -17 \\ -13 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché i tre vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, i due vettori $\begin{pmatrix} 30 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}$, e i due vettori $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono collineari, si trovano 7 elementi distinti in $\mathbb{P}^1$.

Se consideriamo S^1, il cerchio di centro l'origine e raggio uguale a uno in $\mathbb{R}^2$, abbiamo che ogni retta per l'origine in $\mathbb{R}^2$ incontra S^1 in due punti simmetrici rispetto all'origine. Perciò tutte le classi di equivalenza di $(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})/\sim$ contengono esattamente due vettori di norma uguale a 1 e $\mathbb{P}^1$ è anche l'insieme ottenuto da S^1 identificando i punti antipodali:

$$\mathbb{P}^1 \cong S^1/\sim .$$

• La proiezione canonica $\pi \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è l'applicazione che ad un vettore X associa la sua direzione. Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, la sua immagine in $\mathbb{P}^1$ si indica con

$$\pi(X) = (x_0 : x_1),$$

dove $(x_0 : x_1)$ sono chiamate le *coordinate omogenee* di $\pi(X)$. I due punti " : " stanno appunto ad indicare che $\pi(X)$ non è caratterizzata dai valori di x_0 e x_1, ma dal rapporto fra x_0 e x_1. Dati $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ si ha infatti che

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad x_0/x_1 = y_0/y_1.$$

Esempio. I tre vettori $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono collineari e dunque $\pi(X) = \pi(Y) = \pi(Z) \in \mathbb{P}^1$. In particolare, $(2 : 1)$, $(4 : 2)$, $(8 : 4)$ sono coordinate omogenee dello stesso elemento di $\mathbb{P}^1$. In generale, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, le coordinate omogenee $(2t : t)$ individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^1$.

La retta proiettiva si può anche pensare come la "retta reale estesa", ossia la retta reale alla quale si è aggiunto il punto all'infinito. Questa identificazione si ottiene proiettando la stella di rette per l'origine su una qualunque retta l che non contiene l'origine: ogni retta della stella interseca l esattamente in un punto, ad eccezione della retta parallela ad l che la interseca appunto "all'infinito".

Osserviamo che

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} = A_0 \bigcup A_1, \qquad A_0 = \{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \ |x_0 \neq 0\}, \quad A_1 = \{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \ |x_1 \neq 0\};$$

precisamente, A_0 coincide con $\mathbb{R}^2$ privato della retta verticale $x_0 = 0$, mentre A_1 coincide con $\mathbb{R}^2$ privato della retta orizzontale $x_1 = 0$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 e A_1 sono date rispettivamente da

$$\pi|A_0(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}) = (x_0 : x_1) = (1 : x_1/x_0), \quad \pi|A_1(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}) = (x_0 : x_1) = (x_0/x_1 : 1).$$

Le quantità x_0/x_1 e x_1/x_0 sono chiamate anche "coordinate non omogenee" di $\pi(X)$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0 e ad A_1 producono le identificazioni di $\mathbb{P}^1$ con la retta reale estesa associate rispettivamente alla retta verticale di equazione $x_0 = 1$ e alla retta orizzontale di equazione $x_1 = 1$.

Prendiamo ad esempio l uguale alla retta verticale di equazione $x_0 = 1$:

una retta per l'origine non parallela ad l ha equazione $ax_0 + bx_1 = 0$,con $b \neq 0$, ed è formata dai punti di coordinate

$$t\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tutti i punti della forma $t\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$, sono contenuti in A_0. Questa retta interseca l nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix}$. La coordinata non omogenea di questo punto coincide con il coefficiente angolare della retta. Il punto all'infinito di l corrisponde alla retta verticale $x_0 = 0$, ai cui punti si assegna coordinata non omogenea ∞.

Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$.

Sia $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ lo spazio privato dell'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sui vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ consideriamo la relazione di equivalenza data dalla collinearità:

$$X \sim Y \quad \text{se} \quad Y = \lambda X, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Fissato $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, la classe di equivalenza di X è formata da tutti i vettori della retta per l'origine che contiene X

$$[X] = \{\lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

ossia da tutti i vettori che hanno la stessa direzione di X (non necessariamente lo stesso verso).

Definizione. Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ è per definizione l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{O\})/\sim,$$

ossia l'insieme delle direzioni delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

Esempio. Tutti i vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ -13/2 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

sono collineari e individuano lo stesso elemento di $\mathbb{P}^2$.

Esercizio. Quanti punti distinti di $\mathbb{P}^2$ individuano i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ -13 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo S^2, la sfera di centro l'origine e raggio uguale a uno in $\mathbb{R}^3$, abbiamo che ogni retta per l'origine in $\mathbb{R}^3$ incontra S^2 in due punti simmetrici rispetto all'origine. Perciò $\mathbb{P}^2$ si può anche ottenere da S^2 identificando i punti antipodali.

• La proiezione canonica $\pi\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è l'applicazione che ad un vettore X associa la sua direzione. Se $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, la sua immagine in $\mathbb{P}^2$ si indica con

$$\pi(X) = (x_0 : x_1 : x_2),$$

dove $(x_0 : x_1 : x_2)$ sono le coordinate omogenee di $\pi(X)$. I due punti ":" in questo caso stanno ad indicare che la classe di equivalenza di $\pi(X)$ non è caratterizzata dai valori di $x_0,\ x_1,\ x_2$ ma dai rapporti x_0/x_1 e x_1/x_2. Dati $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ si ha infatti che

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0/x_1 = y_0/y_1 \\ x_1/x_2 = y_1/y_2. \end{cases}$$

Il piano proiettivo si può anche pensare come il "piano esteso", ossia come il piano al quale si è aggiunta la retta all'infinito. Questa identificazione si ottiene proiettando la stella di rette per l'origine su un piano α che non contiene l'origine: ogni retta della stella interseca α esattamente in un punto, ad eccezione delle rette che giacciono sul piano per l'origine parallelo ad α, che lo intersecano appunto "all'infinito". Le direzioni di queste rette formano a loro volta un $\mathbb{P}^1$.

Osserviamo che

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{O\} = A_0 \bigcup A_1 \bigcup A_2,$$

$$A_0 = \{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ | x_0 \neq 0\}, \quad A_1 = \{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ | x_1 \neq 0\}, \quad A_1 = \{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ | x_2 \neq 0\};$$

precisamente, A_0 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano verticale $x_0 = 0$, A_1 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano verticale $x_1 = 0$, mentre A_2 coincide con $\mathbb{R}^3$ privato del piano orizzontale $x_2 = 0$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0, A_1 e A_2 sono date rispettivamente da

$$\pi|A_0(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = (x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x_1/x_0 : x_2/x_0),$$

$$\pi|A_1(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_1 : 1 : x_2/x_1),$$

$$\pi|A_2(\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = (x_0 : x_1 : x_2) = (x_0/x_2 : x_1/x_2 : 1).$$

Le quantità x_i/x_j sono chiamate anche "coordinate non omogenee" di $\pi(X)$. Le restrizioni della proiezione canonica ad A_0, A_1 e A_2 producono le identificazioni di $\mathbb{P}^2$ con il piano esteso associate rispettivamente al piano $x_0 = 1$, al piano $x_1 = 1$ e al piano $x_2 = 1$. Sia ad esempio α il piano verticale di equazione $x_0 = 1$. Una retta per l'origine

$$r: \quad X = t \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

interseca α nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ a_1/a_0 \\ a_2/a_0 \end{pmatrix}$, purché sia $a_0 \neq 0$. Se $a_0 = 0$, la retta r è parallela ad α ed interseca α "all'infinito". Le direzioni di queste rette

$$X = t \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\},$$

formano a loro volta una retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, detta la retta all'infinito di $\mathbb{P}^2$.

Geometria nel piano proiettivo.

Per definizione, i punti del piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ sono le immagini tramite la proiezione canonica π delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$ (private dell'origine).

Le *rette proiettive* sono per definizione le immagini dei piani per l'origine in $\mathbb{R}^3$ (privati dell'origine). Osserviamo che dato un piano α in $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine, α contiene la retta per l'origine individuata da ogni suo punto. Di conseguenza, la restrizione della proiezione $\pi|(\alpha \setminus \{O\})$ è ben definita.

Per brevità, spesso diremo che una retta proiettiva r ha equazione

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0,$$

intendendo che la retta r è immagine tramite la proiezione canonica π del piano α di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

Un altro modo di vedere la retta proiettiva r è il seguente. Scriviamo il piano α in forma parametrica

$$X = tP + sQ, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

dove $P, Q \in \alpha$ sono due vettori linearmente indipendenti. Per ogni $s, t \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli, il vettore $tP + sQ$ è un vettore non nullo di α (dunque parallelo ad α) e gli scalari s, t sono le coordinate di $tP + sQ$ nella base $\{P, Q\}$ di α. Le coordinate omogenee $(t : s)$ (che dipendono dalla scelta di $\{P, Q\}$) individuano un elemento di $\mathbb{P}^1$. In altre parole, ogni scelta di una base $\{P, Q\}$ in α induce una identificazione di r con $\mathbb{P}^1$.

- *Un punto $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \mathbb{P}^2$ appartiene ad una retta proiettiva r, di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, se il vettore $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (e tutti i suoi multipli non nulli) soddisfano l'equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.*

Esempio. L'equazione $2x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$ definisce una retta r in $\mathbb{P}^2$. I punti di coordinate omogenee

$$(3 : -2 : 0), \quad (0 : 1 : -3), \quad (1 : 1 : -5), \quad (2 : 2 : -10), \quad (1 : -1 : 1), \quad (1 : 0 : -2) \qquad (*)$$

appartengono tutti ad r. Infatti, le terne

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e tutti i loro multipli non nulli soddisfano l'equazione $2x_0 + 3x_1 + x_2 = 0$. Quanti punti distinti di r individuano le coordinate proiettive (*)?

• *Due rette proiettive distinte si intersecano sempre in un punto*:
siano r, l due rette distinte del piano proiettivo. Siano $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2 = 0$ e $b_0x_0+b_1x_1+b_2x_2 = 0$ le equazioni dei corrispondenti piani (distinti) in $\mathbb{R}^3$. L'intersezione $r \cap l$ è l'immagine tramite la proiezione canonica π della retta per l'origine data dall'intersezione di tali piani

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0. \end{cases}$$

La direzione di tale retta è data dal vettore

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \\ b_0a_2 - a_0b_2 \\ a_0b_1 - a_1b_0 \end{pmatrix},$$

per cui il punto di intersezione cercato $r \cap l$ ha coordinate omogenee

$$(a_1b_2 - a_2b_1 : b_0a_2 - a_0b_2 : a_0b_1 - a_1b_0).$$

Esempio. Siano r ed l le rette proiettive corripondenti rispettivamente ai piani $2x_0 - x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$ in $\mathbb{R}^3$. L'intersezione $r \cap l$ è data dall'immagine tramite π della retta $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ in $\mathbb{R}^3$. Tale retta ha equazione parametrica $X = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ e le coordinate omogenee di $r \cap l$ sono date da $(2 : 1 : 1)$.

• *Per due punti distinti del piano proiettivo passa una e una sola retta*:
Siano P,Q punti distinti in $\mathbb{P}^2$ e siano r ed l le corrispondenti rette (distinte) per l'origine in $\mathbb{R}^3$. Sia α il piano per l'origine (unico) che le contiene. L'immagine tramite π del piano α è la retta proiettiva passante per P e Q. Se le coordinate omogenee di P e Q sono rispettivamente $(a_0 : a_1 : a_2)$ e $(b_0 : b_1 : b_2)$, il piano α ha equazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)x_0 + (b_0a_2 - a_0b_2)x_1 + (a_0b_1 - a_1b_0)x_2 = 0$$

ed equazione parametrica

$$X = tP + sQ, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Per ogni $t, s \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, il punto di coordinate omogenee

$$(ta_0 + sb_0 : ta_1 + sb_1 : ta_2 + sb_2)$$

è un punto della retta proiettiva per P e Q.

Esempio. Siano dati punti $P = (1 : 2 : 1)$ e $Q = (1 : 1 : 3)$ del piano proiettivo (sono distinti perché i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ non sono collineari). Il piano di $\mathbb{R}^3$ che contiene le rette individuate da $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ ha equazione cartesiana $5x_0 - 2x_1 - x_2 = 0$. La retta proiettiva passante per P e Q è data dall'immagine di tale piano tramite π. Lo stesso piano ha equazione parametrica $X = t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$. Per ogni t, s non entrambi nulli, il punto di coordinate omogene $(t+s : 2t+s : t+3s)$ appartiene alla retta proiettiva per P e Q.

Appendice: Relazioni d'equivalenza.

Sia X un insieme. Una relazione binaria $\sim$ su X (cioè che riguarda coppie di elementi di X) si dice una relazione di equivalenza se è riflessiva ($x \sim x$), simmetrica ($x \sim y$ implica $y \sim x$) e transitiva ($x \sim y$ e $y \sim z$ implica $x \sim z$). La classe di equivalenza di un elemento x, rispetto a $\sim$, è data da $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Le classi di equivalenza rispetto a $\sim$ definiscono una partizione di X, nel senso che X si decompone nell'unione disgiunta delle sue classi di equivalenza: $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ se e solo se $x \sim y$, ed in tal caso $[x] = [y]$.

Dato un insieme X con una relazione di equivalenza, sia Q l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza di X. L'insieme Q si dice anche l'*insieme quoziente* di X rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$

$$Q = X/\sim .$$

Si chiama *proiezione canonica* $\pi\colon X \longrightarrow Q$ l'applicazione che associa ad un elemento $x \in X$ la sua classe di equivalenza $\pi(x) = [x]$ in Q.

Esempio. X l'insieme delle persone,
$\sim$ essere connazionali,
Q l'insieme degli stati,
π(persona)=nazione.

Esempio. $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$,
$(m, n) \sim (p, q)$ se $m/n = p/q$,
$Q = \mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali,
$\pi(m, n) = m/n$.

Proiettività

Proiettività di $\mathbb{P}^1$.
Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice reale *invertibile* 2×2 e sia

$$L_A \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$$

la corrispondente trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$.
Poiché L_A è lineare e biiettiva, manda rette per l'origine in rette per l'origine:

$$\forall X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}, \ \forall t \in \mathbb{R} \qquad L_A(tX) = tL_A(X), \quad L_A(X) \neq O.$$

Di conseguenza, L_A induce una trasformazione dell'insieme delle direzioni delle rette del piano passanti per l'origine

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

Definizione. Una *proiettività* (o *trasformazione proiettiva*) $F \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è l'applicazione indotta da una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *invertibile* 2×2, secondo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \\ \big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 \\ cx_0 + dx_1 \end{pmatrix}$, in coordinate omogenee F è data da

$$F((x_0 : x_1)) = \pi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1).$$

• Verifichiamo che F è ben definita:
ricordiamo che le coordinate omogenee non sono uniche, nel senso che per ogni $t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0$, le scritture $(tx_0 : tx_1)$ individuano lo stesso punto $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$. Il fatto che per ogni $t \in \mathbb{R}, \ t \neq 0$

$$F(tx_0 : tx_1) = (atx_0 + btx_1 : ctx_0 + dtx_1) = (t(ax_0 + bx_1) : t(cx_0 + dx_1)) = (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)$$

ci assicura che l'immagine del punto $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ non dipende dalle particolari coordinate omogenee scelte per rappresentarlo.

Esempio. Sia data la matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. La proiettività indotta da A è data dalla formula

$$F(x_0 : x_1) = (x_0 + 2x_1 : 3x_0 + x_1).$$

Le immagini dei punti $P = (1:0)$, $Q = (1:1)$, $R = (0:1)$ sono date rispettivamente da $F(P) = (1:3)$, $F(Q) = (3:4)$, $F(R) = (2:1)$. Se ad esempio scriviamo $P = (2:0)$, troviamo $F(P) = (2:6) = (1:3)$. In altre parole, l'immagine $F(P)$ non cambia a seconda di quali coordinate omogenee scegliamo per P.

• Osserviamo inoltre che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile, allora tutte le matrici della forma

$$\{\alpha A\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{$*$}$$

sono invertibili ed inducono la stessa trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$: per ogni $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

$$F((x_0:x_1)) = (ax_0+bx_1 : cx_0+dx_1) = (\alpha ax_0+\alpha bx_1 : \alpha cx_0+\alpha dx_1) = (\alpha(ax_0+bx_1) : \alpha(cx_0+dx_1)).$$

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La proiettività indotta $F\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è data da

$$F((x_0:x_1)) = (x_0 + x_1 : 3x_0 + 2x_1).$$

La proiettività indotta ad esempio dalla matrice $2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ coincide con F:
per ogni $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$ si ha infatti

$$(2x_0 + 2x_1 : 6x_0 + 4x_1) = (2(x_0 + x_1) : (3x_0 + 2x_1)) = (x_0 + x_1 : 3x_0 + 2x_1) = F(x_0 : x_1).$$

Osservazione. È anche chiaro dalla definizione che una trasformazione proiettiva è un'applicazione biiettiva di $\mathbb{P}^1$ in sè. Inoltre la composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva e che l'inversa di una trasformazione proiettiva è una trasformazione proiettiva.

Teorema. *Date due terne di punti distinti* $P,\ Q,\ R$ *e* $P',\ Q',\ R'$ *in* $\mathbb{P}^1$, *esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *tale che* $f(P) = P',\ f(Q) = Q',\ f(R) = R'$.

Dim. Cominciamo col dimostrare che data una terna di punti distinti $P = (p_0 : p_1)$, $Q = (q_0 : q_1)$, $R = (r_0 : r_1)$ in $\mathbb{P}^1$, esiste un'unica trasformazione proiettiva che manda i punti $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P, Q, R. Dobbiamo far vedere che esiste una matrice invertibile 2×2 che manda

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente in

$$t\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad s\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix},$$

per qualche $t, s, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{O\}$. Consideriamo le matrici della forma

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix}$$

al variare di $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per ogni valore di $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la matrice $\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix}$ è invertibile: la condizione $P \neq Q$ implica infatti

$$\det \begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} = st \det \begin{pmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Inoltre, tale matrice induce una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$ che manda $(1:0)$ in P e $(0:1)$ in Q. Resta da far vedere che esistono $t, s, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Questo equivale a richiedere che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} tp_0 + sq_0 - \lambda r_0 = 0 \\ tp_1 + sq_1 - \lambda r_1 = 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione (t, s, λ), con $t, s, \lambda \neq 0$. Ciò è garantito dal fatto che P, Q, R sono punti distinti in $\mathbb{P}^1$, ossia

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

non sono collineari. A questo punto (dividendo tutto per $\lambda \neq 0$), l'equazione (**) è equivalente alla

$$\begin{pmatrix} tp_0 & sq_0 \\ tp_1 & sq_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}, \quad \text{con } t, s \neq 0. \qquad (***)$$

Poiché $P \neq Q$, *esistono unici* t_0, s_0 che soddisfano (***). La matrice corrispondente

$$A = \begin{pmatrix} t_0p_0 & s_0q_0 \\ t_0p_1 & s_0q_1 \end{pmatrix}$$

induce una trasformazione proiettiva che soddisfa le condizioni richieste: manda i punti $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P, Q, R. Osserviamo infine che tutte e sole le matrici che soddisfano (**) sono della forma αA, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tutte queste matrici inducono la stessa trasformazione di $\mathbb{P}^1$, e da ciò segue l'*unicità*.

Se F è la trasformazione proiettiva che manda $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P, Q, R e G è la trasformazione proiettiva che manda $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ rispettivamente in P', Q', R', allora F^{-1} è la trasformazione proiettiva che manda P, Q, R rispettivamente in $(1:0)$, $(0:1)$, $(1:1)$ e

$$f = G \circ F^{-1}$$

è la trasformazione cercata che manda P, Q, R rispettivamente in P', Q', R'.

Esercizio. Seguendo la dimostrazione del teorema precedente, determinare le proiettività che mandano P, Q, R rispettivamente in P', Q', R', dove

(a) $P = (1:0)$, $Q = (0:1)$, $R = (1:1)$ e $P' = (1:1)$, $Q' = (-1:4)$, $R' = (0:6)$.

(b) $P = (1:0)$, $Q = (0:1)$, $R = (1:1)$ e $P' = (3:1)$, $Q' = (2:5)$, $R' = (0:3)$.

(c) $P = (1:2)$, $Q = (1:4)$, $R = (2:3)$ e $P' = (1:1)$, $Q' = (2:4)$, $R' = (5:6)$.

Osservazione. Dal teorema segue che una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^1$ è completamente determinata dall'immagine di tre punti distinti. Ciò equivale a dire che due proiettività che coincidono su tre punti distinti, coincidono ovunque. Questo fatto verrà usato ripetutamente in seguito.

Proiettività di $\mathbb{P}^2$.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix}$ una matrice reale *invertibile* 3×3 e sia

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

la corrispondente trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$.
Poiché L_A è lineare e biiettiva, manda rette per l'origine in rette per l'origine:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\},\ \forall t \in \mathbb{R} \qquad L_A(tX) = tL_A(X), \quad L_A(X) \neq O.$$

Di conseguenza, L_A induce una trasformazione dell'insieme delle direzioni delle rette dello spazio passanti per l'origine

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

Definizione. Una trasformazione proiettiva (proiettività) $F\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è l'applicazione indotta da una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix}$ *invertibile* 3×3, secondo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \arrow[r, "L_A"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{P}^2. \end{tikzcd}$$

In altre parole, se $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0 + bx_1 + cx_2 \\ dx_0 + ex_1 + fx_2 \\ gx_0 + hx_1 + ix_2 \end{pmatrix}$, in coordinate omogenee F è data da

$$F((x_0 : x_1 : x_2)) = (ax_0 + bx_1 + cx_2 : dx_0 + ex_1 + fx_2 : gx_0 + hx_1 + ix_2).$$

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La trasformazione proiettiva indotta $F\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ è data dalle formule

$$F(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 + x_1 + x_2 : 2x_1 : x_2).$$

Ad esempio

$$F(1 : 3 : 5) = (9 : 6 : 5), \quad F(2 : 3 : 7) = (12 : 6 : 7), \quad F(1 : 1 : 1) = (3 : 2 : 1).$$

Osservazione. Valgono le stesse considerazioni fatte nel caso di $\mathbb{P}^1$:

• F è ben definita, nel senso che l'immagine di un punto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ non dipende dalle particolari coordinate omogenee scelte per rappresentarlo.

• Se A è una matrice invertibile, allora tutte le matrici della forma

$$\{\alpha A\}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sono invertibili ed inducono la stessa trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^2$.

Osservazione. Anche in questo caso è chiaro dalla definizione che una trasformazione proiettiva è un'applicazione biiettiva di $\mathbb{P}^2$ in sè. Inoltre la composizione di trasformazioni proiettive è una trasformazione proiettiva e che l'inversa di una trasformazione proiettiva è una trasformazione proiettiva.

Il teorema del paragrafo precedente ha la seguente generalizzazione. La dimostrazione è completamente analoga.

Teorema. *Date due quaterne di punti distinti* P, Q, R, S *e* P', Q', R', S' *in* $\mathbb{P}^2$*, a tre a tre non collineari in* $\mathbb{P}^2$*, esiste un'unica trasformazione proiettiva* $f\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ *tale che* $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$, $f(R) = R'$, $f(S) = S'$.

Osservazione. Dal teorema segue che una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^2$ è completamente determinata dall'immagine di quattro punti distinti, a tre a tre non collineari in $\mathbb{P}^2$. Ciò equivale a dire che due proiettività che coincidono su quattro punti distinti, a tre a tre non collineari in $\mathbb{P}^2$, coincidono ovunque.

Esercizio. Verificare che le seguenti quaterne P, Q, R, S e P', Q', R', S' sono formate da punti a tre a tre non collineari. Determinare le proiettività che mandano P, Q, R, S rispettivamente in P', Q', R', S', dove

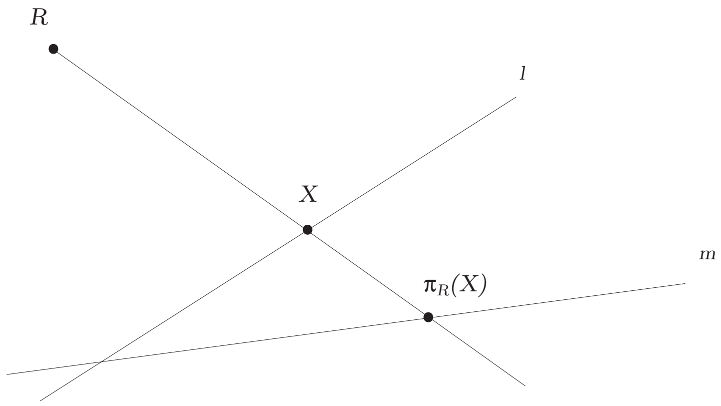
(a) $P = (1:0:0)$, $Q = (0:1:0)$, $R = (0:0:1)$, $S = (1:1:1)$ e $P' = (1:1:1)$, $Q' = (-1:4:2)$, $R' = (0:6:0)$, $S' = (1:1:0)$.

(b) $P = (1:0:0)$, $Q = (0:1:0)$, $R = (0:0:1)$, $S = (1:1:1)$, e $P' = (1:2:1)$, $Q' = (2:5:0)$, $R' = (0:3:1)$, $S' = (1:1:0)$.

Prospettività

Definizione. Siano l, ed m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia R un punto esterno ad esse. Per definizione, la *prospettività* di centro R è l'applicazione $\pi_R: l \longrightarrow m$ che associa ad un punto $X \in l$ il punto di intersezione di m con la retta passante per R e per X

$$\pi_R(X) = m \cap \overline{RX}.$$



La prospettività di centro R.

Osserviamo innanzitutto che l'applicazione π_R è biunivoca. Ricordiamo inoltre che *fissare due punti distinti* $P = (p_0 : p_1 : p_2)$, $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ *su una retta* r *in* $\mathbb{P}^2$ *equivale a fissare una identificazione di* r *con* $\mathbb{P}^1$.

Scriviamo il piano α per l'origine in $\mathbb{R}^3$ ad essa corrispondente in forma parametrica

$$X = t \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Al variare t, s, non entrambi nulli, i punti della retta r hanno coordinate omogenee in $\mathbb{P}^2$

$$(tp_0 + sq_0 : tp_1 + sq_1 : tp_2 + sq_2).$$

Poiché P e Q sono distinti in $\mathbb{P}^2$, i vettori $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$ e formano una base di α. Questa base induce una identificazione di α con $\mathbb{R}^2$

$$t \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}.$$

e di α privato dell'origine con $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Applicando la proiezione canonica ad α privato dell'origine, otteniamo una identificazione di r con $\mathbb{P}^1$:

$$\pi(\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}) = (t : s).$$

Proposizione. *Siano l, m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia $R \in \mathbb{P}^2$ un punto esterno ad esse. Fissate identificazioni di l ed m con $\mathbb{P}^1$, la prospettività di centro R*

$$\pi_R \colon l \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow m \cong \mathbb{P}^1$$

è una trasformazione proiettiva.

Dim. Fissata l'identificazione di l con $\mathbb{P}^1$ associata a due punti distinti P, Q, fissiamo l'identificazione di m con $\mathbb{P}^1$ associata ai punti $S = \pi_R(P)$ e $T = \pi_R(Q)$. Poiché π_R è biunivoca, anche $S = \pi_R(P)$ e $T = \pi_R(Q)$ sono punti distinti in m. Sia $X = (x_0 : x_1 : x_2)$ un punto arbitrario di $l \cong \mathbb{P}^1$, di coordinate omogenee $(\alpha : \beta)$ rispetto a P, Q. Indichiamo con $X' = (x'_0 : x'_1 : x'_2)$ il punto $\pi_R(X) \in m \cong \mathbb{P}^1$ e siano $(\gamma : \delta)$ le coordinate omogenee di X' rispetto a S, T. Faremo vedere che, rispetto a queste coordinate, la proiezione π_R è data da

$$\pi_R(\alpha : \beta) = (-a\alpha : b\beta),$$

dove $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In altre parole, π_R è indotta da una matrice invertibile $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Se $R = (r_0 : r_1 : r_2)$ è il centro della prospettività, i punti R, X, X' sono allineati e vale

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Poiché per costruzione R, P, S e R, Q, T sono terne di punti allineati, vale anche

$$\det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{2}$$

Sostituendo adesso nella (1)

$$X = (\alpha p_0 + \beta q_0 : \alpha p_1 + \beta q_1 : \alpha p_2 + \beta q_2) \quad \text{e} \quad X' = (\gamma s_0 + \delta t_0 : \gamma s_1 + \delta t_1 : \gamma s_2 + \delta t_2),$$

per le proprietà del determinante e le relazioni (2), troviamo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ \alpha p_0 + \beta q_0 & \alpha p_1 + \beta q_1 & \alpha p_2 + \beta q_2 \\ \gamma s_0 + \delta t_0 & \gamma s_1 + \delta t_1 & \gamma s_2 + \delta t_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\delta \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix} + \beta\gamma \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Definiamo

$$a = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix}, \qquad b = \det \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché i punti delle terne R, P, T e R, Q, S non sono allineati, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. La (3) diventa

$$\frac{\alpha}{\beta} a = -\frac{\gamma}{\delta} b \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma : \delta) = (-a\alpha : b\beta)$$

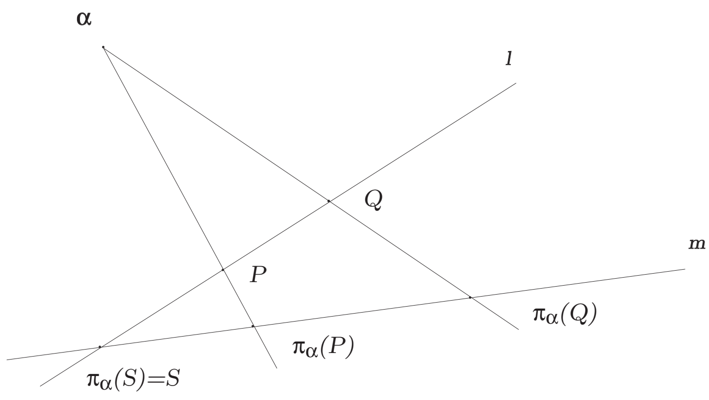
come richiesto.

Proposizione. *Siano l, m due rette in $\mathbb{P}^2$ e sia $S = l \cap m$ il loro punto di intersezione. Una proiettività $f\colon l \longrightarrow m$ è una prospettività se e solo se $f(S) = S$.*

Dim. Osserviamo innanzitutto che date due rette in $\mathbb{P}^2$, una qualunque prospettività $\pi_R\colon l \longrightarrow m$ fissa il punto di intersezione $S = l \cap m$. Dimostriamo che vale il viceversa: una proiettività $f\colon l \longrightarrow m$ che fissa il punto di intersezione $S = l \cap m$ è una prospettività. Siano P, Q punti distinti su l e siano anche distinti da S. Poiché f è biunivoca, $f(P)$ ed $f(Q)$ sono punti distinti su m e sono anche distinti da S. Sia r_1 la retta passante per P ed $f(P)$ e sia r_2 la retta passante per Q ed $f(Q)$. Le rette r_1 ed r_2 sono distinte e si intersecano in un punto α. Per costruzione,

$$f(P) = \pi_\alpha(P) \qquad \text{e} \qquad f(Q) = \pi_\alpha(Q), \qquad f(S) = \pi_\alpha(S).$$

Poiché due trasformazioni proiettive della retta proiettiva che coincidono su tre punti distinti coincidono dappertutto, si ha che $f = \pi_\alpha$ come richiesto.



Una proiettività che fissa $S = l \cap m$ è una prospettività.

Costruzione grafica di prospettività

Proposizione. *Siano l, m rette in $\mathbb{P}^2$. Sia $F\colon l \longrightarrow m$ una proiettività. Allora F è la composizione di due prospettività, ossia esistono α e α' in $\mathbb{P}^2$ tali che*

$$F = \pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha.$$

Dimostrazione. Dimostriamo questo fatto costruendo due prospettività π_α e $\pi_{\alpha'}$ in modo che F e $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ coincidano su tre punti distinti. Poiché le immagini di tre punti distinti individuano completamente una proiettività, ciò è sufficiente per concludere che F coincide con $\pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$ ovunque. Siano P, Q, R una terna di punti distinti su l e siano $F(P)$, $F(Q)$, $F(R)$ le loro immagini su m. Poiché una proiettività è biiettiva, anche $F(P)$, $F(Q)$, $F(R)$ sono punti distinti.

Consideriamo le due coppie di rette

$$\overline{PF(Q)} \ \text{ e } \ \overline{QF(P)}, \qquad \overline{QF(R)} \ \text{ e } \ \overline{RF(Q)}.$$

Siano P_0 e Q_0 i rispettivi punti di intersezione e sia n la retta da essi individuata. Consideriamo adesso le prospettività $\pi_{F(Q)}\colon l \longrightarrow n$ e $\pi_Q\colon n \longrightarrow m$ e la loro composizione

$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}\colon l \longrightarrow n \longrightarrow m.$$

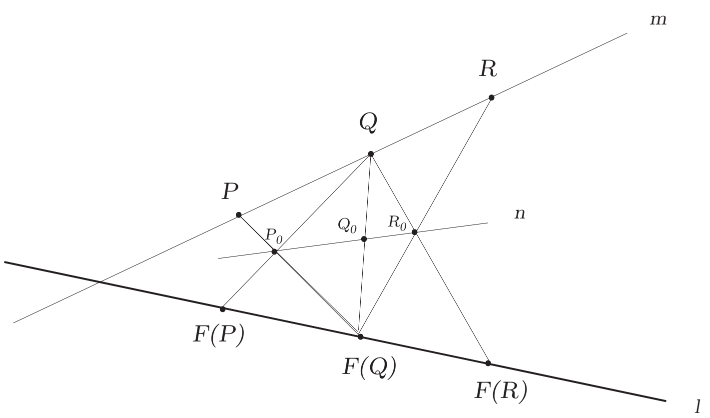
Si verifica facilmente che

$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}(P) = \pi_Q(P_0) = F(P), \qquad \pi_Q \circ \pi_{F(Q)} = F(Q),$$

$$\pi_Q \circ \pi_{F(Q)}(R) = \pi_Q(R_0) = F(R),$$

da cui la tesi.

La costruzione di F come composizione delle prospettività π_Q e $\pi_{F(Q)}(R)$ si chiama la *costruzione di Steiner.*



Osservazione. . La composizione di due prospettività generalmente non è una prospettività: lo è se e solo se fissa il punto di intersezione $l \cap m$.

Esempio. 1. Siano P, Q, R, S punti distinti sulla retta proiettiva l. Costruiamo la proiettività $F: l \longrightarrow l$ che soddisfa le condizioni

$$F(P) = P, \quad F(Q) = R, \quad F(R) = S.$$

Introduciamo una retta ausiliaria m che interseca l nel punto P. Scegliamo un punto α esterno ad l ed m e consideriamo la prospettività di centro α

$$\pi_\alpha: l \longrightarrow m.$$

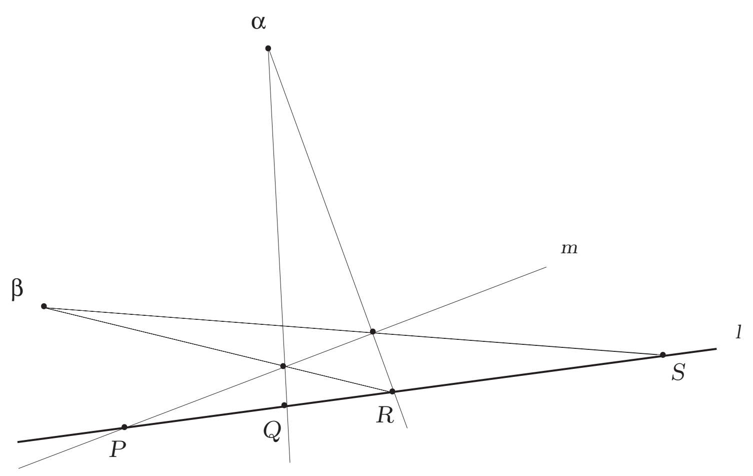
Siano $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$ e $R_0 = \pi_\alpha(R)$ le immagini dei punti Q ed R tramite π_α. Le rette

$$\overline{Q_0R} \quad \text{e} \quad \overline{R_0S}$$

sono distinte e si intersecano in un punto β esterno ad l ed m. Come ogni prospettività, $\pi_\beta(P) = P$. Per costruzione

$$\pi_\beta(Q_0) = R \quad \text{e} \quad \pi_\beta(R_0) = S.$$

Ne segue che $\pi_\beta \circ \pi_\alpha$ coincide con F sui punti distinti P, Q, R e dunque coincide con F ovunque.



Costruzione della proiettività dell'Esempio 1.

Esempio. 2. Siano P, Q, R, S punti distinti sulla retta proiettiva l. Costruiamo la proiettività $F: l \longrightarrow l$ che soddisfa le condizioni

$$F(P) = P, \quad F(Q) = Q, \quad F(R) = S.$$

Introduciamo una retta ausiliaria m che interseca l nel punto P. Scegliamo un punto α esterno ad l ed m e consideriamo la prospettività di centro α

$$\pi_\alpha: l \longrightarrow m.$$

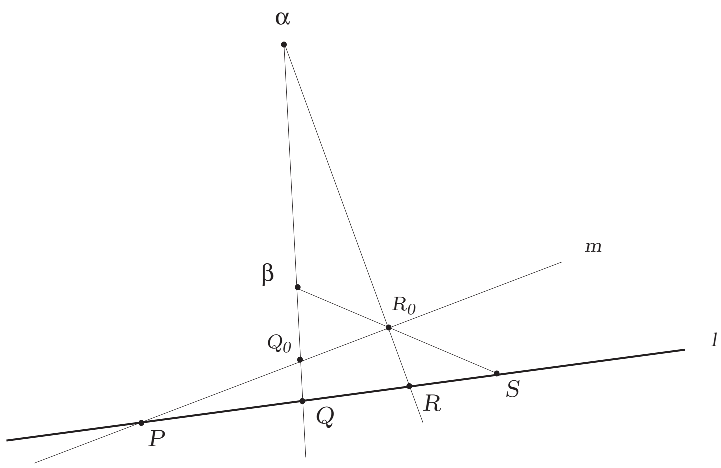
Siano $Q_0 = \pi_\alpha(Q)$ e $R_0 = \pi_\alpha(R)$ le immagini dei punti Q ed R tramite π_α. Le rette

$$\overline{Q_0R} \quad \text{e} \quad \overline{R_0S}$$

sono distinte e si interecano in un punto β esterno ad l ed m. In questo caso, poiché $\pi_\beta \circ \pi_\alpha(Q) = Q$ il punto β si trova necessariamente sulla retta passante per α, Q e Q_0. Come ogni prospettività, $\pi_\beta(P) = P$. Per costruzione

$$\pi_\beta(Q_0) = Q \quad \text{e} \quad \pi_\beta(R_0) = S.$$

Ne segue che $\pi_\beta \circ \pi_\alpha$ coincide con F sui punti distinti P, Q, R e dunque coincide con F ovunque.



Costruzione della proiettività dell'Esempio 2.

Osservazione. . L'espressione di $F = \pi_\beta \circ \pi_\alpha$ come composizione di prospettività generalmente non è unica. Nelle costruzioni degli Esempi 1 e 2 sono state fatte diverse *scelte*:
è stata scelta la retta ausiliaria m ed è stato scelto il centro α della prima prospettività π_α. In ogni caso la proiettività che ne risulta coincide con F e può essere usata per determinare le immagini tramite F di altri punti:

$$F(X) = \pi_\beta \circ \pi_\alpha(X) = \pi_\beta(\pi_\alpha(X)), \qquad \text{per ogni } X \in l.$$

Teorema di Desargues e teorema di Pappo

Teorema (Desargues). *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli in $\mathbb{P}^2$ con i vertici sulle rette a, b, c uscenti da uno stesso punto S. Siano P, Q, R rispettivamente il punto di intersezione delle rette $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, il punto di intersezione delle rette $\overline{CB}$ e $\overline{C'B'}$ e il punto di intersezione delle rette $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$. Allora i punti P, Q, R sono collineari.*

Dim. Consideriamo le proiettività

$$\pi_R\colon a \longrightarrow b, \qquad \pi_Q \circ \pi_P\colon a \longrightarrow c \longrightarrow b.$$

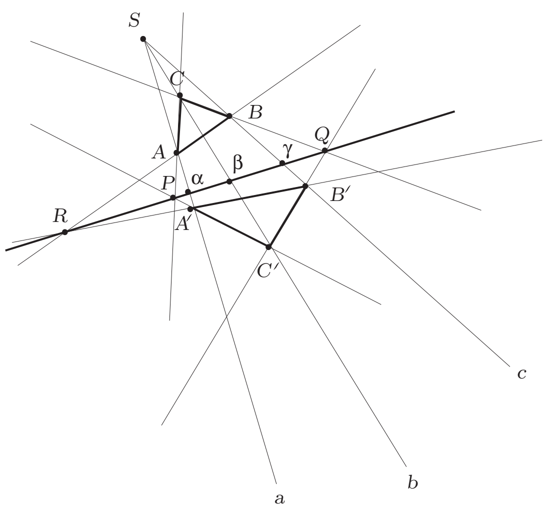
Si verifica facilmente che π_R e $\pi_Q \circ \pi_P$ coincidono sui tre punti distinti A, A', S. Si ha infatti

$$\pi_R(A) = \pi_Q \circ \pi_P(A) = B, \quad \pi_R(A') = \pi_Q \circ \pi_P(') = B', \quad \pi_R(S) = \pi_Q \circ \pi_P(S) = S.$$

Ne segue che π_R e $\pi_Q \circ \pi_P$ coincidono ovunque. Chiamiamo α, β e γ le intersezioni della retta $\overline{PQ}$ con le retta a, b, c. Per costruzione, i punti P, Q, a, b, c sono tutti collineari. Poiché

$$\pi_Q \circ \pi_P(\alpha) = \pi_R(\alpha) = \beta,$$

si ha che α β, R sono collineari. Di conseguenza anche P, Q, R sono collineari, come richiesto.



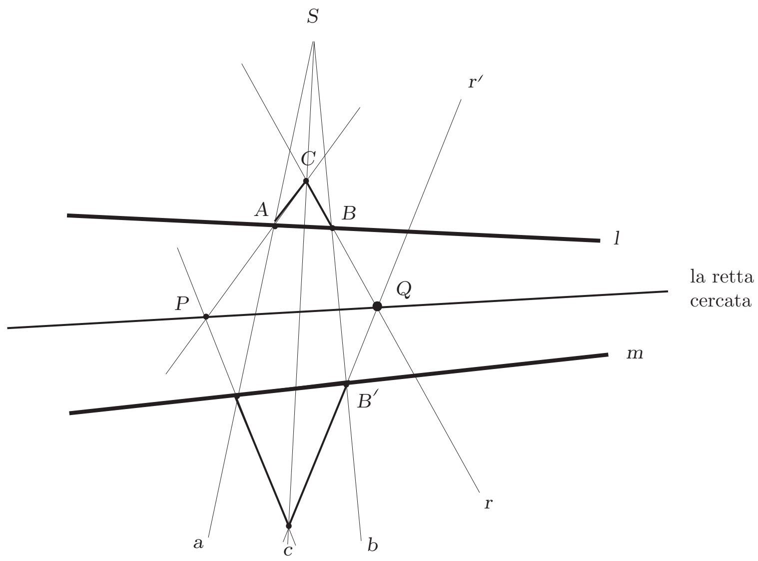
Il teorema di Desargues.

Vale anche il teorema di Desargues inverso.

Teorema (Desargues inverso). *Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli in $\mathbb{P}^2$ i cui lati prolungati si incontrano in tre punti P, Q, R allineati su una retta s. Sia a la retta per A e A', sia c la retta per C e C' e sia b la retta per B e B'. Allore le rette a, b, c sono concorrenti, ossia hanno un punto di intersezione comune S.*

Illustriamo ora due applicazioni del Teorema di Desargues: la prima alla soluzione di un problema grafico, la seconda ad un problema di ricostruzione.

Problema 1. Date due rette l, m che si incontrano in un punto R (fuori dal foglio), e dato un punto Q, disegnare la retta per Q ed R, senza conoscere R.



Applicazione del teorema di Desargues al Problema 1.

Soluzione. Il problema si risolve inserendo l, m e Q in una configurazione di Desargues, in modo che la retta cercata sia la retta individuata dai punti P, Q R ottenuti come intersezioni dei lati dei triangoli, etc...In questo modo, basta costruire P e la retta cercata è completamente determinata. Per costruire la configurazione di Desargues appropriata, disegnare due rette r, r' che si intersecano in Q (vedi Fig. 3). Siano B, B' i punti di intersezione di r ed r' rispettivamente con l ed m. Tracciare poi un retta b per B, B' e altre due rette a, c uscenti da uno stesso punto S. Siano C e C' i punti di intersezione $C = r \cap c$ e $C' = r' \cap c$; siano infine A e A' i punti di intersezione $A = l \cap a$ e $A' = m \cap A$. I triangoli ABC e $A'B'C'$ sono triangoli che soddisfano le ipotesi del Teorema di Desargues e l'intersezione fra le rette $\overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ è proprio il punto P che serve ad individuare la retta $\overline{QR}$.

Problema 2. Siano a, b, c tre rette uscenti da uno stesso punto S e siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli "in prospettiva", coi vertici sulle rette a, b, c. Sia D' un punto su una retta d, anch'essa uscente da S. Qual è il punto D che si proietta sul punto D'?

Soluzione. Il teorema di Desargues applicato ai triangoli $A'B'C'$ e ABC individua una retta r che contiene le intersezioni dei lati

$$R = \overline{A'B'} \cap \overline{AB}, \quad P = \overline{A'C'} \cap \overline{AC}, \quad Q = \overline{B'C'} \cap \overline{BC}.$$

Consideriamo adesso i triangoli

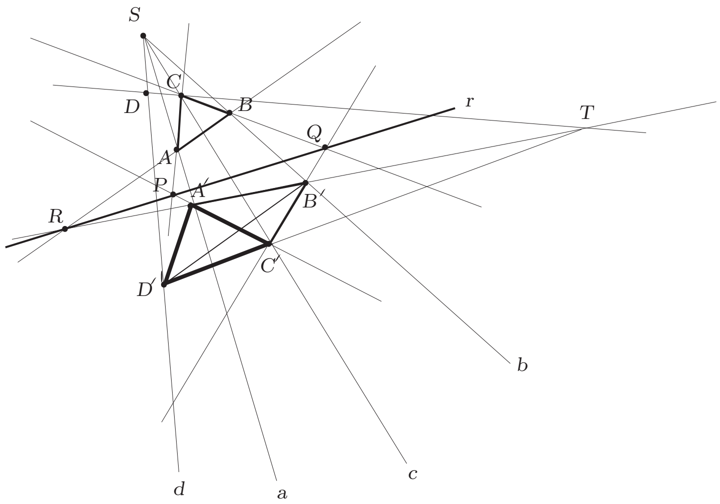
$$A'B'D' \qquad \text{e} \qquad D'C'A',$$

con i vertici rispettivamente sulle rette a,b,d e d,c,a e con il lato $\overline{A'D'}$ in comune. Se D è un punto che si proietta su D', si deve trovare sulla retta d e a partire da esso possiamo formare i triangoli ABD e DCA, anch'essi con i vertici sulle rette a,b,d e d,c,a e con il lato AD in comune. Facciamo vedere che D è univocamente determinato. Il teorema di Desargues applicato ai triangoli $A'B'D'$ e ABD individua una retta α che incontra r nel punto R; il teorema di Desargues applicato ai triangoli $D'C'A'$ e DCA individua una retta β che incontra r nel punto P. Allo stesso tempo l'intersezione dei lati $\overline{A'D'}$ e $\overline{AD}$ è un punto collineare sia a P che a R. Ne segue che le tre "rette di Desargues" coincidono

$$\alpha = \beta = r.$$

A questo punto siamo in grado di ricostruire D. Sia $T = \overline{D'C'} \cap r$. Allora

$$D = d \cap \overline{TC}.$$



Applicazione del teorema di Desargues al Problema 2.

Teorema (Pappo). *Siano l_1, l_2 due rette in $\mathbb{P}^2$, siano A_1, A_2, A_3 tre punti distinti su l_1 e B_1, B_2, B_3 tre punti distinti su l_2. Consideriamo i punti di intersezione*

$$C_1 = \overline{A_1B_2} \cap \overline{A_2B_1}, \quad C_2 = \overline{A_1B_3} \cap \overline{A_3B_1}, \quad C_3 = \overline{A_2B_3} \cap \overline{A_3B_2}.$$

Allora C_1, C_2, C_3 sono collineari.

Dim. Introduciamo le rette ausiliarie

$$m = \overline{A_2B_1}, \qquad n = \overline{A_2B_3}, \qquad m \cap n = A_2$$

e consideriamo la composizione delle pospettività $\pi_{A_1}\colon m \longrightarrow l_2$ e $\pi_{A_3}\colon l_2 \longrightarrow n$

$$\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}\colon m \longrightarrow n.$$

Poiché $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(A_2) = \pi_{A_3}(l_1 \cap l_2) = A_2$, la proiettività $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}$ fissa il punto di intersezione $m \cap n$ ed è essa stessa una prospettività. Dimostriamo ora che

$$\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1} = \pi_{C_2}, \tag{$*$}$$

verificando che le due proiettività coincidono sui tre punti distinti

$$A_2, \qquad B_1, \qquad \gamma = \overline{A_1B_3} \cap \overline{A_2B_1}.$$

Abbiamo già verificato che $\pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(A_2) = \pi_{C_2}(A_2) = A_2$. Definiamo $\delta = \overline{B_1C_2} \cap n = \pi_{C_2}(B_1)$. Abbiamo poi

$$\pi_{A_3}(\pi_{A_1}(B_1)) = \pi_{A_3}(\overline{B_1A_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_1) = \overline{B_1A_3} \cap n = \delta.$$

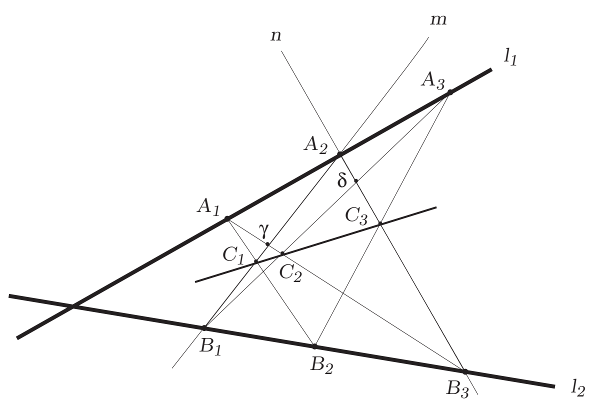
Infine

$$\pi_{C_2}(\gamma) = \overline{C_2\gamma} \cap n = B_3 = \pi_{A_3}(\pi_{A_1}(\gamma)) = \pi_{A_3}(\overline{\gamma A_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_3) = \overline{B_3A_3} \cap n.$$

Calcolando l'immagine del punto C_1, troviamo

$$\pi_{C_2}(C_1) = \pi_{A_3} \circ \pi_{A_1}(C_1) = \pi_{A_3}(\overline{B_1C_1} \cap l_2) = \pi_{A_3}(B_2) = \overline{B_2A_3} \cap n = C_3.$$

Di conseguenza, C_1, C_2, C_3 sono collineari come richiesto.



Il teorema di Pappo.

Birapporto

Il birapporto.
Sia r una retta proiettiva e siano A, B, C, D punti su r, con A, B, C distinti.

Definizione. Il birapporto della quaterna A, B, C, D è l'elemento di $\mathbb{R} \cup \infty$ dato da

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix}} \tag{1}$$

dove $(a_0 : a_1)$, $(b_0 : b_1)$, $(c_0 : c_1)$, $(d_0 : d_1)$ sono rispettivamente le coordinate omogenee di A, B, C, D .
(qui si intende $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).

Esempio. Siano $A = (1 : 2)$, $B = (1 : -1)$, $C = (3 : 1)$, $D = (1 : 0)$.

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5(-1)}{(-4)2} = 5/8.$$

Esempio. Siano A, B, C punti distinti su una retta proiettiva.

$$(ABCA) = \infty, \qquad (ABCB) = 0, \qquad (ABCC) = 1.$$

Osservazione 1. Si vede facilmente che il birapporto di una quaterna di punti A, B, C, D dipende anche dal loro ordine. Le seguenti relazioni seguono direttamente dalla definizione e dalle proprietà del determinante:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

In questo modo, A, B, C, D danno origine ad un numero massimo di sei birapporti distinti, corrispondenti alle sei quaterne ordinate con A al primo posto. Fissato $(ABCD) = k$, tutti i possibili valori del birapporto sono

$$(ABCD) = k, \quad (ABDC) = 1/k, \quad (ACBD) = 1 - k,$$

$$(ADBC) = (k-1)/k, \quad (ADCB) = k/(k-1), \quad (ACDB)1/(1-k).$$

Osservazione 2. Fissati tre punti distinti A, B, C su una retta proiettiva r ed un valore k per il birapporto, esiste un unico punto $D \in r$ tale che $(ABCD) = k$.

Direttamente dalla definizione, troviamo $D = A$ per $k = \infty$ e troviamo $D = B$ per $k = 0$. Per $k \neq 0, \infty$, poniamo

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

nella definizione di (ABCD) (cf. (1)). Allora le coordinate omogenee del punto cercato $D = (d_0 : d_1)$ devono soddisfare l'equazione

$$\frac{x_0 b_1 - b_0 x_1}{x_0 a_1 - a_0 x_1} = \lambda^{-1} k$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x_0 + \beta x_1 = 0, \qquad \text{per} \quad \alpha = (b_1 - \lambda^{-1} k a_1), \quad \beta = (-b_0 + \lambda^{-1} k a_0).$$

Dunque il punto D ha coordinate omogenee $(\beta : -\alpha)$.

Il *birapporto* di una quaterna di punti è un invariante proiettivo:

Proposizione. *Sia $F \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ una proiettività. Allora F conserva il birapporto, ossia*

$$(F(A)F(B)F(C)F(D)) = (ABCD),$$

per ogni quaterna di punti A, B, C, D (con A, B, C distinti).

Dim. Sia M una matrice invertibile 2×2 che rappresenta F. Direttamente dalla definizione si vede che

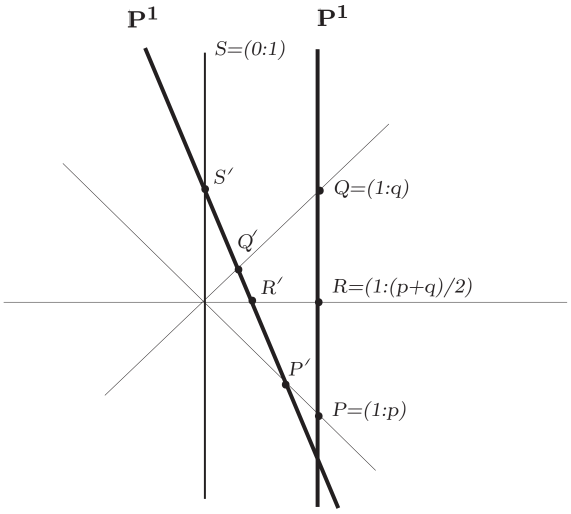
$$(F(A)F(B)F(C)F(D)) = \frac{\left| M \cdot \begin{pmatrix} c_0 & a_0 \\ c_1 & a_1 \end{pmatrix} \right| \left| M \cdot \begin{pmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{pmatrix} \right|}{\left| M \cdot \begin{pmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \right| \left| M \cdot \begin{pmatrix} d_0 & a_0 \\ d_1 & a_1 \end{pmatrix} \right|} = (ABCD).$$

Proposizione. *Date due quaterne di punti A, B, C, D (con A, B, C distinti) e A', B', C', D' (con A', B', C' distinti) esiste una una trasformazione proiettiva $F \colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ che manda A, B, C, D rispettivamente in A', B', C', D' se e solo se $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Dim. Poichè il birapporto è invariante per trasformazioni proiettive, condizione necessaria affiché esista una trasformazione con le proprietà richieste è che $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Viceversa, supponiamo che $(ABCD) = (A'B'C'D')$. Sappiamo anche che esiste un'unica trasformazione proiettiva F che manda A, B, C rispettivamente in A', B', C'. Poiché F preserva il birapporto si ha che

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'F(D)) = (ABCD).$$

Dall'osservazione 2, segue che $D' = F(D)$.



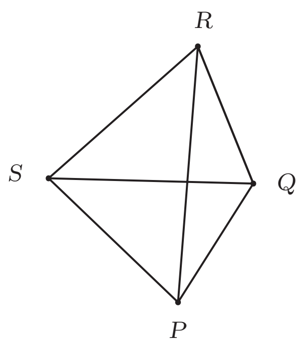
Il birapporto è un invariante proiettivo: $(PQRS) = (P'Q'R'S') = -1$.

Definizione. Una quaterna armonica è formata da quattro punti A, B, C, D (con A, B, C distinti) tali che $(ABCD) = -1$.

Esercizio. *(coppie di punti armonici)* Sia l una retta e siano A, B, C e D quattro punti su l. Supponiamo che il birapporto $(ABCD)$ sia uguale a -1. Dimostrare che i birapporti $(ABDC)$, $(BACD)$, $(BADC)$, $(CDAB)$, $(CDBA)$, $(DCAB)$ e $(DCBA)$ sono tutti uguali a -1. Di conseguenza la proprietà di "avere birapporto -1" dipende solo dalle due coppie A, B e C, D e non dall'ordine dei punti. Due coppie di punti A, B e C, D si dicono *armonici* se $(ABCD) = -1$.

Definizione. Un quadrangolo in $\mathbb{P}^2$ è una figura composta da quattro vertici P, Q, R, S e da tre coppie di lati opposti

$$\overline{SR},\ \overline{PQ}, \qquad \overline{SP},\ \overline{RQ}, \qquad \overline{SQ},\ \overline{RP}.$$

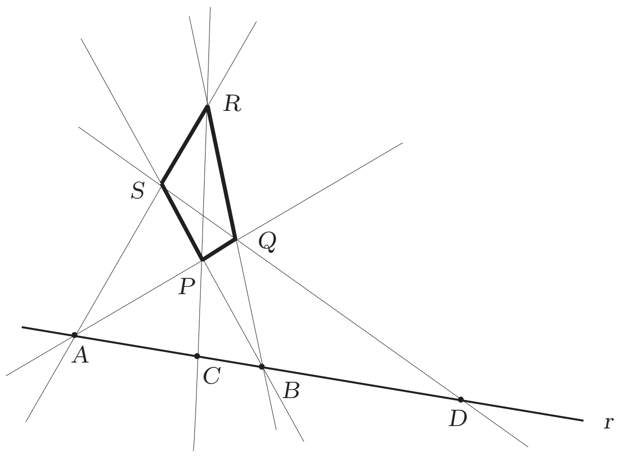


Un quadrangolo.

Teorema. *(Teorema del quadrangolo). Siano A, B i punti di intersezione dei lati opposti*

$$A = \overline{SR} \cap \overline{PQ} \qquad B = \overline{SP} \cap \overline{RQ},$$

e sia r la retta passante per A, B. Siano inoltre $C = \overline{RP} \cap r$ e $D = \overline{SQ} \cap r$. Allora $(ABCD) = -1$.

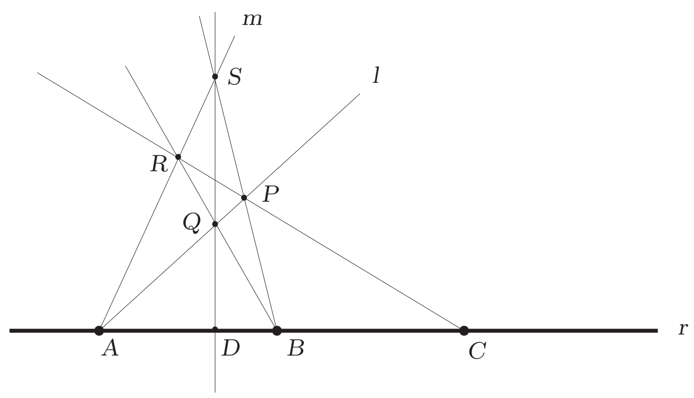


Il teorema del quadrangolo.

Il teorema del quadrangolo può esssere applicato per risolvere il seguente problema grafico:

Problema. Dati A, B, C su una retta r, costruire il quarto armonico, cioè il punto D tale che $(ABCD) = -1$.

Soluzione. Tracciare due rette uscenti da A: l, m.
Tracciare una retta per C: questa retta interseca m in un punto $R \in m$ e in un punto $P \in l$.
Tracciare la retta $\overline{BP}$: questa retta interseca m in un punto $S \in m$.
Tracciare la retta $\overline{BR}$: questa retta interseca l in un punto $Q \in l$.
Applicando il teorema del quadrangolo al quadrangolo P, Q, R, S, si ha che la retta $\overline{SQ}$ interseca la retta r nel punto D, quarto armonico di A, B, C.

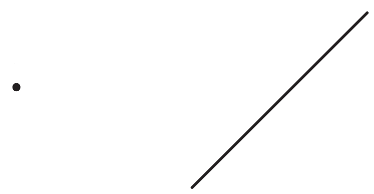


Costruzione del quarto armonico D.

Dualità

Dualità nel piano proiettivo.

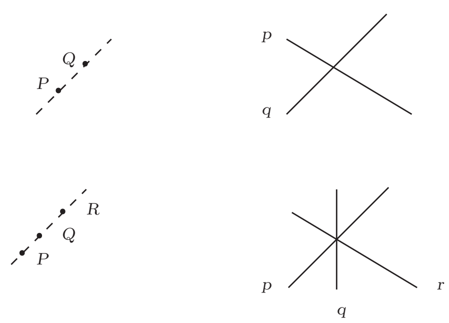
Sia r una retta del piano proiettivo e sia α il piano corrispondente in $\mathbb{R}^3$. L'equazione cartesiana di α è un'equazione della forma $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$, i cui coefficienti (a_0,a_1,a_2) sono determinati a meno di multipli non nulli. Dunque alla retta $r=\pi(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0)$ è associato il punto del piano proiettivo di coordinate omogenee $(a_0:a_1:a_2)$. Viceversa, ad un punto del piano proiettivo di coordinate omogenee $(a_0:a_1:a_2)$ è associata la retta proiettiva $r=\pi(a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0)$. Questa corrispondenza tra rette e punti del piano proiettivo è un esempio della cosidetta *dualità*.



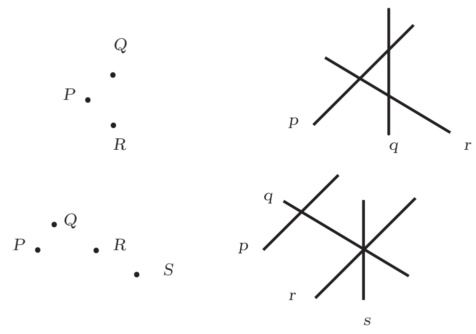
Il duale di un punto è una retta e il duale di una retta è un punto.

Una *configurazione* $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$ è un insieme finito di punti e rette. La *configurazione duale* $\mathcal{C}'$ si ottiene a partire da $\mathcal{C}$, sulla base dei seguenti fatti

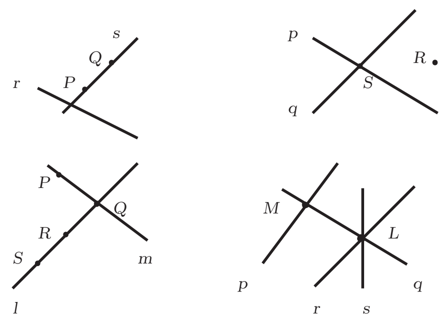
- *Due punti distinti P, Q in $\mathbb{P}^2$ determinano un'unica retta r* (la retta passante per P, Q)
- *Due rette distinte r, s in $\mathbb{P}^2$ determinano un unico punto* (il punto di intersezione $r\cap s$)
- *Siano l_1, l_2 due rette del piano proiettivo, siano P_1, P_2 i punti duali e sia r la retta passante per P_1 e P_2. Allora il punto di intersezione $Q=l_1\cap l_2$ è il punto duale della retta r* (segue direttamente dalle formule del paragrafo precedente).



Esempi di configurazioni duali.



Esempi di configurazioni duali.



Esempi di configurazioni duali.

Vale il seguente *principio di dualità*.

Proposizione. *Sia $\mathcal{T}$ un teorema, riguardante proprietà di appartenenza, allineamento e concorrenza, valido per una data configurazione. A partire da esso si ottiene un teorema valido per la configurazione duale, scambiando fra loro* punto/retta *e* allineamento/concorrenza*.*

Esempio.
(Teorema di Pappo) Dati P, Q, R tre punti distinti su una retta r e tre punti distinti P', Q', R' tre punti distinti su una retta s in $\mathbb{P}^2$, allora i punti di intersezione $A = QR' \cap RQ'$, $B = PR' \cap RP'$, $C = PQ' \cap QP'$ sono collineari.

(Teorema di Pappo duale) Date tre rette distinte r, s, t passanti per un punto R e tre rette distinte r', s', t' passanti per un punto S, allora la retta l per $s \cap t'$ e $t \cap s'$, la retta m per $r \cap t'$ e $t \cap r'$ ed n per $r \cap s'$ e $s \cap r'$, hanno un punto di intersezione comune.

Vedremo in seguito che alcuni teoremi classici della geometria proiettiva possono essere ottenuti da altri semplicemente applicando il principio di dualità.

Esercizio.
Verificare che l'enunciato del Teorema di Desargues duale coincide con l'enunciato del Teorema di Desargues inverso.

Classificazione affine e proiettiva delle coniche

Forma canonica affine di una conica.

Come la riduzione in forma canonica metrica, la riduzione in forma canonica affine di una conica consiste nella ricerca di un sistema di riferimento rispetto al quale l'equazione che la definisce risulti "più semplice possibile". In questo caso, i cambiamenti di coordinate ammessi non sono necessariamente isometrie, ma trasformazioni affini

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove A è una matrice invertibile qualunque e $\mathbf{b}$ è un vettore. Ad esempio, si ammettono anche le *dilatazioni.*

Definizione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ di $\mathbf{R}^2$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = \mu > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ è semplicemente un "ingrandimento" di fattore $\lambda = \mu$. Se λ e μ sono numeri positivi distinti, $D_{\lambda,\mu}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore μ nella direzione dell'asse delle ordinate.

Una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$, $\lambda, \mu > 0$ conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned} \mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda\mu \mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Tramite un'opportuna dilatazione, l'equazione di una conica può essere trasformata in una equazione i cui coefficienti sono uguali a $1, -1$ o 0, a seconda che i corrispondenti coefficienti nell'equazione canonica metrica sono positivi, negativi o nulli. Ad esempio, se una conica ha equazione canonica metrica

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0$$

dopo la dilatazione

$$x_1 = ax_1', \quad x_2 = bx_2'$$

ha equazione canonica affine

$$(x_1')^2 - (x_2')^2 = 1.$$

Oppure, se una conica ha equazione canonica metrica

$$\frac{x_1^2}{p} - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 - px_2 = 0, \qquad p > 0$$

dopo la dilatazione

$$x_1 = \sqrt{p}x_1', \quad x_2 = x_2'$$

ha equazione canonica affine

$$(x_1')^2 - x_2' = 0.$$

L'equazione così ottenuta si chiama "equazione canonica affine" della conica.

Classificazione proiettiva delle coniche.

Definizione. Una conica in $\mathbf{P}^2$ è l'insieme dei punti $P = (x : y : z) \in \mathbf{P}^2$ che soddisfano un'equazione omogenea di secondo grado

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0, \tag{1}$$

dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, non sono tutti nulli.

Osservazione. L'equazione (1) è ben definita in $\mathbf{P}^2$: essendo omogenea, ogni volta che è soddisfatta da $X = (x : y : z)$, è soddisfatta anche da $tX = (tx : ty : tz)$, per ogni $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Scriviamo l'equazione (1) nella forma

$$^tXAX = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice A è simmetrica reale. Dunque A ha tutti gli autovalori reali ed è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste una matrice M ortogonale (che soddisfa $^tMM = Id$) tale che

$$M^{-1}AM = {}^tMAM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo adesso la matrice

$$N = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & \lambda_i \neq 0 \\ 1, & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

Si ha che

$$^t(MN)AMN = {}^tN{}^tMAMN = {}^tN({}^tMAM)N = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \lambda_i > 0 \\ -1, & \lambda_i < 0 \\ 0, & \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

Mediante il cambiamento di coordinate in $\mathbf{R}^3$ dato da

$$X = NMX', \tag{2}$$

l'equazione (1) della conica diventa

$$^tX' \; ^t(MN)AMN \; X' = \varepsilon_1(x')^2 + \varepsilon_2(y')^2 + \varepsilon_3(z')^2 = 0, \quad \varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}.$$

Interpretiamo il cambiamento di coordinate (2) come un cambiamento di coordinate proiettivo. Otteniamo così la classificazione proiettiva delle coniche in $\mathbf{P}^2$:

Una conica in $\mathbf{P}^2$ *è proiettivamente equivalente ad una delle seguenti coniche:*

$$\begin{array}{lr} (1) & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ (2) & x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ (3) & x^2 + y^2 = 0 \\ (4) & x^2 - y^2 = 0 \\ (5) & x^2 = 0. \end{array}$$

Si può dimostrare che le coniche (1)–(5) sono *a due a due proiettivamente non equivalenti.*

Una conica si dice *non-degenere* se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono tutti non nulli, altrimenti si dice degenere. Le coniche (1) e (2) sono non degeneri, le altre sono degeneri. La conica (2) coincide con l'insieme vuoto, la (3) consiste di un solo punto $(0 : 0 : 1)$, la (4) consiste di due rette distinte $(x : x : z) \cup (x : -x : z)$, la (5) di due rette coincidenti $(0 : y : z) \cup (0 : y : z)$. Consideriamo infine la conica (1)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

In $\mathbf{R}^3$, l'equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ definisce il cono ottenuto ruotando intorno all'asse z (asse del cono) una retta (generatrice del cono) passante per l'origine (vertice del cono), inclinata di un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto ad esso. In $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $z = 1$, l'equazione (1) diventa

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

e definisce un'ellisse. In $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $x = 1$, l'equazione (1) diventa

$$z^2 - y^2 = 1,$$

e definisce un'iperbole. Infine in $\mathbf{P}^2$, identificato con il piano esteso $y - z = 1$, l'equazione (1) diventa

$$x^2 + 2y - 1 = 0,$$

e definisce una parabola. Questi tre casi equivalgono rispettivamente a tagliare il cono con un piano che interseca una sola falda del cono, con un piano che interseca entrambe le falde del cono, con un piano parallelo alla generatrice del cono. In altre parole, ellisse iperbole e parabola sono "tre facce" della stessa conica proiettiva e per questa ragione vengono anche chiamate *sezioni coniche.*