

1. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $v_2 = (1, 0, 1)$.

Svolgimento: Il vettore w , proiezione ortogonale del vettore v_1 sul vettore v_2 e' per definizione il vettore multiplo di v_2 secondo il coefficiente

$$\langle v_1, v_2 \rangle / \|v_2\|^2.$$

Poiche' $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$ e $\|v_2\| = \sqrt{2}$, il vettore cercato e' $\pi_{v_2}(v_1) = (1/2, 0, 1/2)$.

2. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = (0, 1, 2)$ sul sottospazio W generato dai vettori ortogonali $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$.

Svolgimento: Il vettore richiesto w e' la somma dei vettori, $\pi_{v_1}(v)$ e $\pi_{v_2}(v)$, che sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di v su v_1 e su v_2 , cioe':

$$w = (\langle v, v_1 \rangle / \|v_1\|)v_1 + (\langle v, v_2 \rangle / \|v_2\|)v_2 = (1/2, 1/2, 2).$$

Si verifica facilmente che il vettore $t := v - \pi_{v_1}(v) - \pi_{v_2}(v)$ e' ortogonale a v_1 e a v_2 e che $\text{Lin}(\{v_1, v_2, t\}) = \text{Lin}(\{v_1, v_2, w\})$.

3. Sia \mathbf{R}^4 munito del prodotto scalare standard.
 (a) Determinare il complemento ortogonale U^\perp del sottospazio cosi' definito:

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}.$$

- (b) Verificare esplicitamente che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

Svolgimento: (a) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U , cioe':

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$

Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Allora, U^\perp e' costituito da tutti i vettori $t = (x_1, \dots, x_4)$ tale che $t \cdot u = 0$, cioe' tali che risultino:

$$x_1 + x_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U . Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$u_1 = (1, 0, -1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = \text{Lin}(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in \mathbf{R}^4 .
 (b) Visto che il determinante della matrice che ha per colonne, rispettivamente, le coordinate di u, u_1, u_2 ed u_3 , ha determinante $1 \neq 0$, allora l'insieme $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ forma una base di \mathbf{R}^4 , che verifica che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$, dato che necessariamente $U \cap U^\perp = \{(0, 0, 0, 0)\}$.