Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

VII Foglio Esercitazioni

Contenuti esercitazione: in questa esercitazione si ridiscutono tutti gli esercizi del I Esonero unitamente a due esercizi ulteriori su matrici rappresentative di applicazioni lineari in basi fissate di dominio e codominio, loro proprieta' indipendenti dalla rappresentazione, determinazione di nucleo ed immagine, eccetera.

Esonero di Geometria 1 per Matematica (25/11/2022)

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 1 Sia $M := \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Stabilire se l'insieme $A := \{Y \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \ : \ MY \in Span\,\{M\}\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ e, in caso di risposta affermativa, calcolarne la dimensione.

b) Stabilire se l'insieme $B := \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ MX \in Span\,\{X\}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ e, in caso di risposta affermativa, calcolarne la dimensione.

a) A è sottospazio vettoriale di $M_{22}(\mathbb{R})$ di dimensione 3.

A è sottospazio vettoriale di $M_{22}(\mathbb{R})$ perché:

0) $M\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in Span\,M$ e perciò $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in A$

1) Se $Y_1, Y_2 \in M_{22}(\mathbb{R})$ sono in A anche $Y_1+Y_2\in A$

infatti $M(Y_1+Y_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dist} \\ \text{pdt} \\ \text{matrici}}}{=} MY_1+MY_2 \in Span\{M\}$

perché MY_1 e $MY_2\in Span\{M\}$

e $Span\{M\}$ è sottospazio vettoriale. vettoriale.

Quindi $Y_1+Y_2\in A$.

2) Se $Y\in A$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, si ha

$M(\alpha Y)=\alpha MY\in Span\{M\}$ perché $MY\in Span\{M\}$

e $Span\{M\}$ è sottospazio vettoriale. Quindi $\alpha Y\in A$.

Siccome $A\subseteq M_{22}(\mathbb{R})$ abbiamo $\dim(A)\leq 4$.

Siccome $M\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\9&0\end{pmatrix}\notin Span\{M\}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\notin A$ e perciò $\dim(A)\leq 3$.

Infine $\begin{pmatrix}2&0\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ sono 3 vettori indipendenti di A e quindi

$\dim(A)=3$.

b) B è sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$.

Osserviamo che $rg(M)=1$ e $\operatorname{Im} L_M = Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$.

Se $X\neq 0$ è in $Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$ abbiamo $MX\in \operatorname{Im} L_M=Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}=Span\{X\}$ e quindi $X\in B$.

Se $X\notin Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$, $X\in B \iff MX\in Span\{X\} \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Im} L_M=Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}}}{\iff} MX\in Span\{X\}\cap Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ X\notin Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}}}{\iff} MX=0 \iff X\in \operatorname{Ker} L_M$.

In conclusione $B=Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}\cup \operatorname{Ker} L_M$ e siccome $\operatorname{Ker} L_M=Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$

si ottiene $B=\cancel{\operatorname{Ker} L_M}\ Span\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}\right\}$ e $\dim(B)=1$.

Esercizio 2 a) Sia $p := \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, sia $v := \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, sia S il sistema lineare $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -12 \end{cases}$. Stabilire se S è un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $p + Span\{v\}$ (cioè $Sol(S) = p + Span\{v\}$).

b) Siano dati il sistema lineare (di una equazione in 3 incognite) $S_1 := \{x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ e il sottospazio affine $Z = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + Span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$ di $\mathbb{R}^3$. Esiste $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $L_A(Sol(S_1)) = Z$? Esiste $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $L_B(Z) = (Sol(S_1))$?

a) S non è sistema di equazioni cartesiane per $p + Span\{v\}$.
Osserviamo che p è soluzione di S.
Per il teorema di struttura delle soluzioni dei sistemi lineari abbiamo $Sol(S) = p + W$ dove W è il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_2 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

e ha dimensione pari a $4 - rg\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -5\end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$.

Siccome $Span\{v\}$ ha dimensione 1 abbiamo $W \neq Span\{v\}$ e $Sol(S) = p + W \neq p + Span\{v\}$.

b) $\exists A \in M_{33}(\mathbb{R})$ tale che $L_A(Sol(S_1)) = Z$.
Non $\exists B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $L_B(Z) = Sol\, S_1$.
$Sol(S_1)$ è sottospazio affine di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$, cioè esistono $v_1\ v_2$ linearmente indipendenti e p in $\mathbb{R}^3$ tali che $Sol(S_1) = p + Span\{v_1, v_2\}$. Siccome S_1 non è omogeneo $Sol(S_1)$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e pertanto $p \notin Span\{v_1, v_2\}$: quindi p, v_1, v_2 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Dalla teoria, sappiamo che $\exists A \in M_{33}(\mathbb{R})$ t.c. $L_A(p) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $L_A(v_1) = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $L_A(v_2) = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$. Per linearità deduciamo $L_A(Sol(S_1)) = Z$.
Osserviamo che $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in Span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$, perciò Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e $0 \in Z$. D'altra parte $0 \notin Sol(S_1)$. Siccome ogni applicazione lineare manda 0 in 0 non può esistere $B \in M_{33}(\mathbb{R})$ tale che $L_B(Z) = Sol(S_1)$.

Esercizio 3 a) Sia $f : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := Det\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & a & b \\ 4 & c & d \end{pmatrix}\right)$.
Stabilire se f è un'applicazione lineare e, in caso di risposta affermativa, esibire una base del nucleo di f.

b) Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$. È vero che $Det(A^T A) = Det(AA^T)$?

a) f è applicazione lineare e una base del nucleo di f è
$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sviluppando il determinante con Laplace rispetto I^a colonna abbiamo $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 4\, Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

Linearità: dobbiamo mostrare che $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
si ha $f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \alpha f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$.
Questo è vero perché $f\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix} =$
$4\, Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{linearità di Det} \\ \text{II}^a \text{ riga}}}{=} 4 \alpha\, Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + 4\beta\, det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a' & b' \end{pmatrix} =$
$= \alpha\, 4\, Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \beta\, 4\, Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a' & b' \end{pmatrix} = \alpha f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \beta f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$.

Inoltre $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker f \iff Det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = 0 \iff a = 3b$. Perciò $M \in Ker f \iff$
$\exists\, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $M = \begin{pmatrix} 3b & b \\ c & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$
$M \in Span\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi $Ker f = Span\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Siccome $\dim(Ker f) = \dim(M_{22}(\mathbb{R})) - \dim(Im f) = 4 - \underbrace{\dim Im f}_{\leq 1} \geq 3$
i 3 generatori dati di $Ker f$ sono linearmente indipendenti e formano base.

b) No: si ha $Det(M^T M) = 0$ e $Det(M M^T) \neq 0$.

$Det(M^T M) = 0$) Siccome $L_M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\dim Ker L_M \geq 1$ e L_M non è iniettiva.
di conseguenza $L_{M^T M} = L_{M^T} \circ L_M$ non è iniettiva e perciò $Det\, M^T M = 0$.

$Det(M M^T) \neq 0$) Osserviamo che se $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha $Y^T Y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \neq 0$.
Siccome $Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -4$ si ha $rg(M) = 3$ e quindi $rg(M^T) = 3$.
Quindi $L_{M^T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è iniettiva. ~~Quindi~~ Perciò abbiamo
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^T X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{osservazione}}{\Longrightarrow} (M^T X)^T M^T X \neq 0 \underset{(AB)^T = B^T A^T}{\Longrightarrow} X^T M M^T X \neq 0 \Rightarrow$
$M M^T X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi $L_{M M^T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è iniettiva e perciò $det(M M^T) \neq 0$

Esercizio 4 a) Sia $B := \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e sia $M =\in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che $L_M(e_1) = -e_1 + e_2$, $L_M(e_2) = e_1 + 2e_2$,$L_M(e_3) = 0$, $L_M(e_4) = 2e_3$. Calcolare MMM e Stabilire quante matrici $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tali che $AAA = MMM$ esistono.

b) Stabilire quali delle seguenti inclusioni sono vere per ogni A che soddisfi $AAA = MMM$: i)$Im(L_{AAA}) \subseteq Im(L_{AA})$; ii)$Im(L_{AA}) \subseteq Im(L_{AAA})$.

a) $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e ci sono infinite $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ tali che $A^3 = M^3$.

Abbiamo $L_{M^3}(e_1) = (L_M \circ L_M \circ L_M)(e_1) = L_M(L_M(L_M(e_1))) = L_M(L_M(-e_1+e_2)) =$

$= L_M(-(-e_1+e_2)+e_1+2e_2) = L_M(2e_1+e_2) = 2(-e_1+e_2)+e_1+2e_2$

$= -e_1+4e_2$

$L_{M^3}(e_2) = L_M(L_M(L_M(e_2))) = L_M(L_M(e_1+2e_2)) = L_M(-e_1+e_2+2(e_1+2e_2)) =$

$= L_M(e_1+3e_2) = -e_1+e_2+3(e_1+2e_2) = 2e_1+7e_2$

$L_{M^3}(e_3) = L_M(L_M(L_M(e_3))) = 0$

$L_{M^3}(e_4) = L_M(L_M(L_M(e_4))) = L_M(L_M(2e_3)) = L_M(0) = 0$.

Siccome $L_{M^3}(e_i)$ è la i-esima colonna di M^3 abbiamo

$M^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se A_α è l'unica matrice tale che $L_{A_\alpha}(e_1) = -e_1+e_2$

$L_{A_\alpha}(e_2) = e_1+2e_2$, $L_{A_\alpha}(e_3) = 0$, $L_A(e_4) = \alpha e_3$ abbiamo

$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_\alpha^3 = M^3$. Quindi ci sono ∞ A che soddisfano $A^3 = M^3$.

b) i) e ii) sono entrambe vere $\forall A \in M_{44}(\mathbb{R})$ tale che $A^3 = M^3$.

In generale date 2 funzioni $g: X \to Y$ e $f: Y \to Z$ si ha

$\mathrm{Im}(f \circ g) = f(\mathrm{Im}\, g) \subseteq \mathrm{Im}\, f$.

Perciò $\mathrm{Im}(L_{A^3}) = \mathrm{Im}(L_{A^2} \circ L_A) \subseteq \mathrm{Im}\, L_{A^2}$ e i) è verificata.

Siccome $\mathrm{Im}(L_{A^3}) \subseteq \mathrm{Im}\, L_{A^2}$, per mostrare ii) basta far vedere che $\dim(\mathrm{Im}(L_{A^3})) = \dim(\mathrm{Im}(L_{A^2}))$ cioè $rg(A^3) = rg(A^2)$.

Siccome $rg(A^3) = rg(M^3) = 2$ e $\mathrm{Im}\, L_{A^3} \subseteq \mathrm{Im}\, L_A$ abbiamo 3 possibilità:

•) $rg(A) = 4$, ••) $rg(A) = 3$, •••) $rg(A) = 2$.

Il caso •) non si presenta perché $rg(A) = 4 \Rightarrow L_A$ isomorfismo $\Rightarrow L_{A^3}$ isomorfismo $\Downarrow$ $rg(A^3) = 4$.

Nel caso ••) si ha necessariamente $rg(A^2) = 2$.

Infatti deve essere $\underset{\overset{\|}{3}}{rg(A)} \geq rg\, A^2 \geq \underset{\overset{\|}{2}}{rg\, A^3}$ cioè $rg\, A^2 = 2$ o $rg(A^2) = 3$.

Se fosse $rg(A^2) = 3$ avremmo ~~...~~ $\dim(\mathrm{Im}(L_{A^2})) = \dim(\mathrm{Im}(L_A))$ e

perciò $\mathrm{Im}(L_{A^2}) = \mathrm{Im}(L_A)$ e potremmo dedurre $rg(A^3) = \dim(\mathrm{Im}(L_{A^3})) =$

$= \dim(\mathrm{Im}(L_A \circ L_{A^2})) = \dim(L_A(\mathrm{Im}\, L_{A^2})) = \dim(L_A(\mathrm{Im}\, L_A)) = \dim(\mathrm{Im}(L_{A^2})) = rg(A^2)$.

Infine se $rg(A) = 2$ abbiamo $2 = rg(A) \geq rg(A^2) \geq rg(A^3) = 2$, cioè $rg(A^2) = 2$.

Esercizio 5. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica $\mathcal{E}^3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, sia data $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in se' (o endomorfismo di $\mathbb{R}^3$) definita nel modo seguente:

$$\varphi(\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3, \;\; \varphi(2\underline{e}_1) = \underline{e}_2, \;\; \varphi(\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 + 5\underline{e}_2 + 6\underline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_{\mathcal{E}^3,\,\mathcal{E}^3}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**), che rappresenta l'endomorfismo φ nella base canonica $\mathcal{E}^3$ sia nel dominio ($\mathbb{R}^3$) che nel codominio ($\mathbb{R}^3$) di φ.
(ii) Determinare le dimensioni dei sottospazi $Ker(\varphi)$ ed $Im(\varphi)$.
(iii) Determinare una base di $Ker(\varphi)$.
(iv) Dati i vettori linearmente indipendenti

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

espressi in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^3$, verificare che formano una base per un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che si abbia $\mathbb{R}^3 = W \oplus Ker(\varphi)$ (W si dice **un sottospazio supplementare** in $\mathbb{R}^3$ al sottospazio $Ker(\varphi)$).
(v) Sia $\mathcal{V}$ la base di $\mathbb{R}^3$ ottenuta unendo ordinatamente la base di $Ker(\varphi)$ e la base di W. Determinare la matrice $B := M_{\mathcal{V},\,\mathcal{V}}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi** rappresentativa di φ in base $\mathcal{V}$ usata sia nel dominio ($\mathbb{R}^3$) che nel codominio ($\mathbb{R}^3$) di φ.
(vi) Determinare la matrice $C := M_{\mathcal{E}^3,\,\mathcal{V}}(\varphi)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) rappresentativa di φ quando nel dominio ($\mathbb{R}^3$) di φ si usa la base $\mathcal{V}$ mentre nel codominio di φ ($\mathbb{R}^3$) si usa la base canonica $\mathcal{E}^3$.

Esercizio 6 Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^4}(f)$ (**Notazione del testo Geometria 1, Sernesi**) che rappresenta l'applicazione lineare f nelle rispettive basi canoniche $\mathcal{E}^4$ del dominio $\mathbb{R}^4$ ed $\mathcal{E}^3$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di f.
(ii) Stabilire se l'applicazione lineare f e' suriettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Im(f) \subset \mathbb{R}^3$ nelle coordinate date dalla base $\mathcal{E}^3$ del codominio $\mathbb{R}^3$ di f.
(iii) Stabilire se f e' iniettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per il sottospazio $Ker(f) \subset \mathbb{R}^4$ nelle coordinate date dalla base $\mathcal{E}^4$ del dominio $\mathbb{R}^4$ di f.