Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

V Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{E} := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ la sua **base canonica**. Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro reale e siano assegnati i seguenti vettori parametrici:

$$\underline{u}_{1,t} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_{2,t} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}, \ \underline{v}_{1,t} = \begin{pmatrix} t-2 \\ -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, \underline{v}_{2,t} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix},$$

scritti in funzione della base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$. Si considerino, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le **famiglie** di sottospazi vettoriali

$$U_t := \langle \underline{u}_{1,t}, \ \underline{u}_{2,t} \rangle \ \text{ e } \ V_t := \langle \underline{v}_{1,t}, \ \underline{v}_{2,t} \rangle, \ t \in \mathbb{R},$$

dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{R}$, ed il vettore $\underline{z} = \underline{e}_1 - \underline{e}_3$.
(i) Stabilire se esiste $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $U_t + V_t = \mathbb{R}^4$.
(ii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap V_t) = 1$.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U_1 \cap V_1$.
(iv) Determinare la dimensione di $U_1 + V_1$, stabilire se la somma e' diretta, se i sottospazi sono supplementari in $\mathbb{R}^4$ e determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U_1 + V_1$.
(v) Determinare una base di $U_1 + V_1$ ed estendere la base determinata ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$.
(vi) Determinare le coordinate del vettore $\underline{z} \in \mathbb{R}^4$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ determinata al punto (v).

Esercizio 2. Sia $V := \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$, nell'indeterminata x e di grado al piu' 2 e sia $\mathcal{E} := \{1, x, x^2\}$ la sua **base canonica**. Sia dato il sistema di vettori:

$$S := \{p_1(x) = x^2+x(1-x)+(1-x)^2, \ p_2(x) = x^2+(1-x)^2, \ p_3(x) = x^2+1+(1-x)^2, \ p_4(x) = x(1-x)\}$$

in cui ciascun polinomio e' scritto rispetto ad $\mathcal{E}$.
(i) Stabilire se e' possibile estrarre da S una base per V.
(ii) In caso di risposta negativa, determinare $\dim(\langle S \rangle)$.
(iii) Determinare equazioni parametriche di $\langle S \rangle$ rispetto alle coordinate indotte dalla base $\mathcal{E}$.
(iv) Determinare equazioni cartesiane di $\langle S \rangle$ rispetto alle coordinate indotte dalla base $\mathcal{E}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e sia $\mathcal{E} := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ la sua **base canonica**. Siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

scritti in funzione della base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$. Si considerino il sottospazio

$$U := \langle \underline{u}_1, \ \underline{u}_2 \rangle$$

ed il sottospazio V, che e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Si determini $\dim(U \cap V)$ ed una base di $U \cap V$
(ii) Si determini $\dim(U + V)$
(iii) Estendere la base di $U \cap V$ determinata al punto (i) ad una base di $U + V$

Esercizio 4. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate nel campo $\mathbb{R}$. Siano date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in V.$$

Si consideri infine il sottospazio vettoriale $U := \langle A_1, A_2, A_3 \rangle \subset V$.
(i) Determinare dimensione ed una base di U.
(ii) Considerato un parametro $t \in \mathbb{R}$ e considerata la naturale struttura di spazio affine di V, si consideri la retta affine $\mathcal{L}$ in V data da

$$\mathcal{L} : \ X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Si dica per quali valori $t \in \mathbb{R}$ la retta $\mathcal{L}$ interseca il sottospazio U.
(iii) Sia dato $W := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V \mid a_{11} + a_{12} + 2a_{21} = 0 \right\}$. Dopo aver verificato che W e' un sottospazio di V, determinare dimensione ed una base di $U \cap W$.
(iv) Determinare la dimensione di $U + W$ e stabilire se U e W sono sottospazi supplementari in V.