Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

IV Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$, nell'indeterminata x e di grado al piu' 3. Sia dato il sistema di vettori:

$$S := \{1 - x,\ 1 + x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ x + x^2,\ 1 + x^2 + x^3\}.$$

(i) Stabilire se S e' un sistema di vettori linearmente indipendenti.
(ii) In caso di risposta negativa, estrarre un sottosistema S' **massimale** di vettori linearmente indipendenti di S.
(iii) Verificare che S' e' anche un sistema di generatori per V, i.e. una **base** di V.
(iv) Determinare l'espressione del vettore $p(x) = 10-7x-x^2+x^3 \in V$ come combinazione lineare dei vettori selezionati nel sottosistema S', i.e. dei vettori della **base** S' di V.
(v) Detto $W := \{q(x) \in V \mid q(2) = 0\} \subseteq V$, stabilire che W e' un sottospazio proprio di V e determinare un sistema di generatori linearmente indipendenti per W, i.e. una base per W.

Esercizio 2. Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate nel campo $\mathbb{R}$.
(i) Sia $Tsup_{2,2}$, rispettivamente $Tinf_{2,2}$, il sottospazio vettoriale di V delle matrici triangolari superiori, rispettivamente triangolari inferiori. Determinare un sistema di generatori linearmente indipendenti (i.e. una **base**) per $Tsup_{2,2}$, rispettivamente per $Tinf_{2,2}$.
(ii) Verificare che $V = Tsup_{2,2} + Tinf_{2,2}$ ma che la somma non e' diretta.
(iii) Cosiderato il vettore $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in V$, determinare tutte le possibili scritture di A come vettore somma in $Tsup_{2,2} + Tinf_{2,2}$.
(iv) Sia $Sym_{2,2}$, rispettivamente $Antisym_{2,2}$, il sottospazio vettoriale di V delle matrici simmetriche, rispettivamente antisimmetriche. Determinare un sistema di generatori linearmente indipendenti (i.e. una **base**) per $Sym_{2,2}$, rispettivamente per $Antisym_{2,2}$.
(v) Verificare che $V = Sym_{2,2} \oplus Antisym_{2,2}$ e scrivere A in modo unico come vettore somma in $Sym_{2,2} \oplus Antisym_{2,2}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e siano $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ i vettori canonici. Siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

scritti in funzione dei vettori canonici $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ di $\mathbb{R}^3$. Si consideri inoltre il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, anche esso scritto in funzione dei vettori canonici $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$.

(i) Verificare che $S := \{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{v}_3\}$ e' un sistema di vettori linearmente indipendenti e che genera $\mathbb{R}^3$, i.e. che S e' una **base** per $\mathbb{R}^3$.
(ii) Scrivere il vettore $\underline{w}$ come combinazione lineare dei vettori nella **base** S.
(iii) Determinare le componenti (o **coordinate**) del vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$ sapendo che $\underline{u} = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $V := Funz(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considerare il sistema di vettori

$$S := \{1,\ \sin(x), \cos(x), \sin(x) \cdot \cos(x),\ \sin(2x)\}.$$

(i) Estrarre da S un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti S'.
(i) E' possibile scrivere $\cos(2x)$ come combinazione lineare dei vettori determinati in S'?
(ii) E' possibile scrivere $\mathrm{tg}(x)$ come combinazione lineare dei vettori determinati in S'?