Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

II Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$. Indicate con (x_1, x_2, x_3, x_4) indeterminate su $\mathbb{R}^4$, si consideri il sistema lineare omogeneo $SLO(3,4;\mathbb{R})$ dato da:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

(i) Scrivere il sistema dato in notazione matriciale ed, attraverso l'eliminazione di Gauss-Jordan, ridurre il sistema dato ad un sistema lineare omogeneo che sia ad esso equivalente ed a gradini.
(ii) Determinare l'espressione della soluzione generale del $SLO(3,4;\mathbb{R})$ dato, stabilendo il numero di parametri liberi da cui dipende tale espressione.
(iii) Detto U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che costituisce il luogo dei vettori soluzioni in $\mathbb{R}^4$ del $SLO(3,4;\mathbb{R})$ dato, scrivere U come *Span* di un opportuno sistema S di vettori di V tale che S sia di cardinalita' finita.
(iv) Presi i vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^4$ (**N.B. Nel testo [Geometria 1 - Sernesi] i vettori canonici sono indicati con le lettere maiuscole $\mathbf{E_i}$ ma in questo foglio si potrebbero confondere con matrici, per questo utilizziamo i simboli minuscoli**), si consideri il sottospazio $W = Span\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e_3}\}$. Determinare un SLO che definisca il sottospazio W.
(v) Determinare il sottospazio vettoriale $U \cap W$.
(vi) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 2. Si considerino le matrici

$$A = (1\ 2\ 3), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Utilizzando le tre matrici precedenti, stabilire quali prodotti righe per colonne sono definiti ed, in caso di risposta affermativa, calcolare la matrice prodotto.
(ii) Determinare la matrice $A \cdot A^t$ e la matrice $A^t \cdot A$.
(iii) Verificare che in $M(2 \times 2;\mathbb{R})$ il prodotto righe per colonne

- (iii-1) non e' commutativo,
- (iii-2) ammette *zero-divisori* (i.e. esistono matrici $A, B \neq O$ tali che o $A \cdot B = O$ oppure $B \cdot A = O$)
- (iii-3) ammette elementi *nilpotenti* (i.e. esistono matrici $A \neq O$ tali che $A^n = O$ per qualche intero positivo $n \geq 2$).

(iv) Verificare che, per ogni $A \in M(n \times n;\mathbb{R})$, le matrici $C := A \cdot A^t$ e $D := A^t \cdot A$ sono matrici simmetriche quadrate di ordine n.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri il sistema lineare non omogeneo $SL(3,3;\mathbb{R})$ dato da

$$\begin{cases} x + (a-1)y + (2-a)z & = & a+5 \\ x + ay + 2z & = & 4 \\ x + (a-2)y + 2(1-a^2)z & = & 6 \end{cases}$$

(i) Denotato con $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle indeterminate e con $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} a+5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ il vettore colonna dei termini noti, scrivere il $SL(3,3;\mathbb{R})$ dato in notazione matriciale $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(ii) Utilizzando l'eliminazione di Gauss-Jordan, ridurre il sistema lineare $SL(3,3;\mathbb{R})$ dato ad un sistema equivalente che sia a gradini
(iii) Studiare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, la compatibilita' del sistema lineare $SL(3,3;\mathbb{R})$. Nel caso di compatibilita', determinare l'espressione della soluzione generale del sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$, in un'indeterminata x e di grado al piu' 2. Si consideri il sottospazio

$$U := Span\{x,\ x^2\}$$

ed il sottoinsieme

$$W := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V \mid a_0 = 0 = a_1 - a_2\}.$$

(i) Determinare l'espressione del vettore generale in U.
(ii) Verificare che W e' sottospazio di V e determinare l'espressione del vettore generale in W.
(iii) Scrivere W come *Span* di un opportuno sistema di cardinalita' finita di generatori.
(iv) Determinare il sottospazio $U \cap W$.
(v) Determinare il sottospazio $U + W$.
(vi) Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, elencare tutti gli elementi di U, di W, di $U \cap W$ e di $U + W$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{K}$ un campo ed m, n due interi positivi. Si identifichi lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ con $M(n \times 1;\mathbb{K})$ e contestualmente si identifichi il vettore canonico $\mathbf{e_j}$ con la matrice colonna E_j dotata di tutte entrate nulle tranne che al posto j in cui e' presente 1, per $1 \leq j \leq n$. Sia $F_i \in M(1 \times m;\mathbb{K})$ la matrice riga dotata di tutte entrate nulle tranne che al posto i in cui e' presente 1, per $1 \leq i \leq m$. Sia infine $B \in M(m \times n;\mathbb{K})$ una qualsiasi matrice.
(i) Descrivere il risultato del prodotto $B \cdot E_j$, $1 \leq j \leq n$, in termini di colonne di B.
(ii) Descrivere il risultato del prodotto $F_i \cdot B$, $1 \leq i \leq m$, in termini di righe di B.
(iii) Utilizzando le proprieta' del prodotto righe per colonne tra matrici, dimostrare che

$$U := \left\{ \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$$

e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

(iii) Utilizzando le proprieta' del prodotto righe per colonne tra matrici, dimostrare che

$$V := \left\{ B \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m$.