Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. A. Rapagnetta, Codocente: Prof. F. Flamini

X Foglio Esercitazioni

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare non-omogeneo $SL(2,3;\mathbb{R})$

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 &= 7 \end{cases}$$

(i) Senza utilizzare l'eliminazone di Gauss-Jordan, verificare che il sistema $(*)$ e' compatibile, determinando il numero di parametri liberi da cui dipendono tutte le sue soluzioni.
(ii) Aggiungendo ora al sistema $(*)$ l'equazione

$$5x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 10$$

si ottiene il $SL(3,3;\mathbb{R})$

$$(**) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 10 \end{cases} .$$

Verificare, senza l'utilizzo dell'eliminazione di Gauss-Jordan, che il nuovo sistema $(**)$ e' compatibile con unica soluzione.
(iii) Trovare con il metodo di Cramer l'unica soluzione del sistema $SL(3,3;\mathbb{R})$ $(**)$.
(iv) Senza l'utilizzo dell'eliminazione di Gauss-Jordan, trovare in modo alternativo a (iii) l'unica soluzione del sistema $SL(3,3;\mathbb{R})$ $(**)$.

Esercizio 2. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^5$, munito della base canonica $\mathcal{E}^5 = \{\underline{e}_i\}_{1\leq i\leq 5}$, e sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ il vettore arbitrario delle coordinate di $\mathbb{R}^5$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}^5$. Si consideri l'endomorfismo (i.e. applicazione lineare di $\mathbb{R}^5$ in se stesso) $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ definito da

$$f(\underline{x}) = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f e' un automorfismo di $\mathbb{R}^5$, i.e. $f \in Aut(\mathbb{R}^5)$, in altri termini se oltre ad essere lineare f e' anche un'applicazione biunivoca di $\mathbb{R}^5$ in se'.
(ii) Dedurre chi sono i sottospazi vettoriali $Ker(f)$, $Im(f)$ e quali dei vettori $\underline{w}$ del codominio $\mathbb{R}^3$ hanno un'insieme delle controimmagini

$$\overleftarrow{f}(\underline{w}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid f(\underline{x}) = \underline{w}\}$$

che sia diverso dal vuoto.
(iii) Per i vettori $\underline{w}$ del codominio $\mathbb{R}^3$ per cui risulta $\overleftarrow{f}(\underline{w}) \neq \emptyset$, descrivere l'insieme delle controimmagini $\overleftarrow{f}(\underline{w})$ in termini di f e di $\underline{w}$.

Esercizio 3. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}^3 = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Sia dato l'automorfismo $f \in Aut(\mathbb{R}^3)$, definito sui vettori di $\mathcal{E}^3$, dalle condizioni

$$f(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 - \underline{e}_2,\ f(\underline{e}_2) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2,\ f(\underline{e}_3) = \underline{e}_2 + \underline{e}_3.$$

Siano dati inoltre i vettori

$$\underline{b}_1 = \underline{e}_1 - \underline{e}_3,\ \underline{b}_2 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2,\ \underline{b}_3 = 2\underline{e}_1 + \underline{e}_3.$$

Sia $\mathcal{B} := \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}\}$ il relativo sistema di vettori da essi determinato.

(i) Verificare che $\mathcal{B}$ e' una base per $\mathbb{R}^3$.
(ii) Utilizzando le matrici cambiamento di base $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^3}$ e $M_{\mathcal{E}^3}^{\mathcal{B}}$ esprimere i vettori immagine

$$f(\underline{b}_1),\ f(\underline{b}_2), f(\underline{b}_3)$$

in combinazioni lineari rispetto alla nuova base $\mathcal{B}$.