ESERCIZI DEL 13/1/2014

① Scrivere l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ contenente il punto $Q\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ e la retta $r: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+t \\ z = 1+7t \end{cases}$

__Soluzione__ Siano $v = \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$ e $P\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ in modo che r abbia equazioni parametriche $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = tv + P$.

I vettori $w = P - Q = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$ generano la giacitura del piano richiesto dall'esercizio.

$$w \wedge v = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 7\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}-1 & 3\\0 & 7\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\7\\-7\end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$ é normale alla giacitura del piano richiesto.

L'equazione da determinare sará della forma $2x+y-z+d=0$.
Imponendo il passaggio per Q si ottiene subito $8+d=0$ da cui: $2x+y-z-8=0$.

② Sia T l'affinitá di $\mathbb{R}^2$ di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 7/25\, x - 24/25\, y + 108/25 \\ y' = 24/25\, x + 7/25\, y + 6/25 \end{cases}$$

Trovare un'affinitá S tale che $S \circ S = T$.

__Soluzione__ La rotazione di angolo θ attorno al punto $P\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)(x-p_1) - (\sin\theta)(y-p_2) + p_1 \\ y' = (\sin\theta)(x-p_1) + (\cos\theta)(y-p_2) + p_2 \end{cases}$$

o equivalentemente $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-p_1\\y-p_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$

(Si veda il libro "Matrici e Vettori" a pagina 176)

Si osservi che i coefficienti $7/25$ e $24/25$ verificano l'identitá $\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1$ e dunque possono essere pensati come coseno e seno di un angolo $0 < \theta < \pi/2$.

L'affinità T è quindi una rotazione di angolo θ tale che:

$$\begin{cases} \cos\theta = 7/25 \\ \sin\theta = 24/25 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \theta = \arcsin\frac{24}{25}$$

Il centro C della rotazione T è l'unico punto fisso dell'affinità quindi verifica il sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} 3x+4y=18 \\ 4x-3y=-1 \end{cases} \quad \text{e} \quad C\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un'affinità S con la proprietà $S \circ S = T$ è la rotazione di centro C e angolo $\theta/2 = 1/2 \arcsin 24/25$.

$$\sin(\theta/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = 3/5$$

Pertanto $\theta/2 = \arcsin 3/5$ ed essendo $0 < \theta/2 < \pi/4$ $\cos\theta/2 = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = 4/5$

In conclusione:

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S: \begin{cases} x' = 4/5\,x - 3/5\,y + 11/5 \\ y' = 3/5\,x + 4/5\,y - 3/5 \end{cases}$$

3) Dati: $P\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ 12 \end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r: \begin{cases} x = 12t+17 \\ y = -5t \\ z = t+1 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = t \\ y = 6 \\ z = 2t-13 \end{cases}$, $p: 13x+3y+z+21=0$

determinare l'equazione della sfera con centro C sul piano p, passante per P e tangente in Q alla retta r.
Individuare i piani contenenti la retta s e tangenti alla sfera.

__Soluzione__ La giacitura di r è $Lin\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Essendo la sfera da determinare tangente in Q ad r, il centro C deve appartenere al piano p' ortogonale a $\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per $Q\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$p': 12x - 5y + z + d = 0$, sostituendo le coordinate di Q si ha $35+d=0$

Infine $p': 12x-5y+z-35=0$.

Dato che la sfera passa per P e Q, il suo centro C è equidistante da P e Q. Il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ con uguale distanza da P e Q è dato dal piano p'' ortogonale alla retta PQ (quindi al vettore $Q-P=\begin{pmatrix}2\\16\\-12\end{pmatrix}$) e passante per il punto medio $M\begin{pmatrix}(3+5)/2\\(-11+5)/2\\12/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ del segmento PQ.

$p'': 2x+16y-12z+d=0$

$112+d=0$ (essendo $M\in p''$) da cui $p'': 2x+16y-12z+112=0$

o anche $p'': x+8y-6z+56=0$.

Il centro C si ottiene come $p\cap p'\cap p''$ cioé come soluzione del sistema lineare $\begin{cases}13x+3y+z+21=0\\12x-5y+z-35=0\\x+8y-6z+56=0\end{cases}$ da cui $C\begin{pmatrix}0\\-7\\0\end{pmatrix}$

Il raggio della sfera é $\overline{PC}=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$

L'equazione richiesta è dunque $x^2+(y+7)^2+z^2=13^2$ da cui:

$x^2+y^2+z^2+14y-120=0$.

La retta $s:\begin{cases}x=t\\y=6\\z=2t-13\end{cases}$ é inclusa nei piani $y-6=0$ e $2x-z-13=0$.

In base alla proposizione 8.9 a pagina 215 del libro "Matrici e Vettori" ogni piano contenente s ha una equazione della forma:

$$\alpha(2x-z-13)+\beta(y-6)=0 \quad \text{cioé} \quad 2\alpha x+\beta y-\alpha z-6\beta-13\alpha=0$$

Fra i piani di questo fascio proprio, quelli tangenti alla sfera prima determinata hanno la proprietà di distare 13 dal centro della sfera. Sfruttando la formula per la distanza punto-piano (relazione 8.53 a pagina 227) si ha:

$$\frac{|-7\beta-6\beta-13\alpha|}{\sqrt{(2\alpha)^2+\beta^2+(-\alpha)^2}}=13, \quad |\alpha+\beta|=\sqrt{5\alpha^2+\beta^2} \quad 4\alpha^2-2\alpha\beta=0$$

Le due soluzioni $\alpha=0$ e $\beta=2\alpha$ producono due piani tangenti:

$y-6=0$ e $2x+2y-z-25=0$.