ESERCIZI DEL 9/12/2013 E DEL 16/12/2013

① Dati $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ ed $H\begin{pmatrix}1/11\\8/11\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$,

determinare il punto C in modo che H sia ortocentro del triangolo ABC.

Soluzione $V_{AB} = A - B = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ é un vettore parallelo alla retta per A e B.

$V_{AB}^{\perp} = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ é un vettore ortogonale alla retta per A e B.

Per definizione di ortocentro, C appartiene alla retta per H parallela a $V_{AB}^{\perp}$ di equazioni parametriche $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t V_{AB}^{\perp} + H = \begin{pmatrix}1/11 + t\\8/11 - 3t\end{pmatrix}$.

Le rette AC e BH sono ortogonali, dunque:

$$\langle C - A,\ B - H \rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}t - 21/11\\-3t - 14/11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-12/11\\3/11\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}11t - 21\\-33t - 14\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$-44t + 84 - 33t - 14 = 0$ da cui $t = 10/11$

In conclusione C ha coordinate $\begin{pmatrix}1/11 + 10/11\\8/11 - 33/11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

② Dati $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5/3\\1\end{pmatrix}$ e $I\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

trovare C in modo che I sia incentro del triangolo ABC.

Soluzione

$V_{AB}' = B - A = \begin{pmatrix}8/3\\-2\end{pmatrix}$ é un vettore parallelo alla retta AB e

analogamento lo è il vettore $V_{AB} = \frac{3}{2} V_{AB}' = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

Con analoga notazione $V_{IA} = I - A = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

Sia $\theta_{IA,AB}$ l'angolo compreso fra 0 e $\pi/2$ formato dalle rette IA e AB

$V_{AC} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ è per ora ignoto.

Essendo I incentro di ABC deve essere:

$$\cos \theta_{IA, AB} = \cos \theta_{IA, AC} \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{|\langle V_{IA}, V_{AB} \rangle|}{|V_{IA}| \cdot |V_{AB}|} = \frac{|\langle V_{IA}, V_{AC} \rangle|}{|V_{IA}| \cdot |V_{AC}|}$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}\sqrt{25}} = \frac{|v_1 - 2v_2|}{\sqrt{5}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$|v_1 - 2v_2| = 2\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad 3v_1^2 + 4v_1 v_2 = 0$

Ci sono due soluzioni. La prima $\left(v_1 = -\frac{4}{3} v_2\right)$ corrisponde al caso in cui $V_{AC} = V_{AB}$. La soluzione da considerare è la seconda $(v_1 = 0)$ da cui $V_{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la retta AC è verticale ed ha pertanto equazione $x = -1$ (dovendo passare per A).
La retta BI ha equazione $y = 1$. Pertanto V_{BC} deve essere il simmetrico di V_{AB} rispetto a V_{BI}, ovvero il simmetrico di $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ rispetto all'asse x.

Ne segue immediatamente che $V_{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
La retta BC ha equazioni parametriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t V_{BC} + B = \begin{pmatrix} 5/3 + 4t \\ 1 + 3t \end{pmatrix}$$

Il punto C si ottiene ora come intersezione delle rette AC e BC.
Da $5/3 + 4t = -1$ si ha $t = -2/3$
In conclusione C ha coordinate:

$$\begin{pmatrix} 5/3 - 8/3 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(3) Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $r: 9x-2y+2=0$ ed $s: 7x+6y-6=0$ e aventi centro sulla retta $t: 11x+7y+44=0$.

Soluzione I centri delle circonferenze cercate sono equidistanti dalle rette r ed s ovvero appartengono alle bisettrici di r ed s.
Un punto $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ è equidistante da r ed s se:

$$\frac{|9x-2y+2|}{\sqrt{81+4}} = \frac{|7x+6y-6|}{\sqrt{49+36}}$$

da cui le equazioni delle bisettrici:

$$b_1: x-4y+4=0 \qquad b_2: 4x+y-1=0$$

I centri C_1 e C_2 delle due circonferenze si ottengono come $b_1 \cap t$ e $b_2 \cap t$ da cui $C_1\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $C_2\begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$.

I rispettivi raggi $r_1 = \frac{38}{\sqrt{85}}$ e $r_2 = \frac{51}{\sqrt{85}}$ si ottengono come distanze di C_1 e C_2 dalla retta s.

Le due equazioni richieste sono dunque:

$$(x+4)^2+y^2 = \frac{1444}{85} \qquad \text{e} \qquad (x-3)^2+(y+11)^2 = \frac{2601}{85}$$

(4) Sia $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali.
Dimostrare che $\operatorname{Tr} A = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, Au_k \rangle$

Soluzione Sia U la matrice ortogonale $U = (u_1|u_2|\dots|u_n)$.
Essendo ${}^tU = U^{-1}$ le due matrici A e ${}^tUAU$ sono simili e dunque hanno stessa traccia (si veda l'esercizio 4 del foglio delle esercitazioni del 6/11/2013 e del 18/11/2013).

Ma: $$\operatorname{Tr}({}^tUAU) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} {}^tu_1 \\ \vdots \\ {}^tu_n \end{pmatrix}(Au_1|Au_2|\dots|Au_n)\right) = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, Au_k \rangle$$

⑤ Sfruttare la disuguaglianza di Schwartz (pagina 118 del libro "Matrici e Vettori") per dimostrare che:

- dati $a, b, c > 0$ si ha sempre $abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$
- dati $x, y, z \geq -\frac{1}{5}$ con $x+y+z=1$ si ha $\sqrt{5x+1} + \sqrt{5y+1} + \sqrt{5z+1} \leq 2\sqrt{6}$
- dati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ risulta $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 < \frac{\pi^2}{6} \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2$ (disuguaglianza di Carlson)

<u>Soluzione</u>

- Sia: $u = \begin{pmatrix} a/\sqrt{c} \\ b/\sqrt{a} \\ c/\sqrt{b} \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} \sqrt{c} \\ \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2$ da cui $(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(a+b+c)$

e infine la tesi $(a+b+c)abc \leq a^3b + b^3c + c^3a$

- Sia $u = \begin{pmatrix} \sqrt{5x+1} \\ \sqrt{5y+1} \\ \sqrt{5z+1} \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2$ $\quad \left(\sqrt{5x+1} + \sqrt{5y+1} + \sqrt{5z+1}\right)^2 \leq \left(5(x+y+z)+3\right) \cdot 3$

da cui essendo $x+y+z=1$, $\sqrt{5x+1} + \sqrt{5y+1} + \sqrt{5z+1} \leq \sqrt{8 \cdot 3} = 2\sqrt{6}$

- Si considerino: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \\ \vdots \\ na_n \end{pmatrix}$

$\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2$$

essendo poi $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$ si avrá $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < \frac{\pi^2}{6}$

da cui la tesi: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 < \frac{\pi^2}{6} \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i^2$

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n con prodotto scalare $\langle\,,\,\rangle$. Sia V^* lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V in $\mathbb{R}$. Sia V^{**} lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V^* in $\mathbb{R}$. Siano:

$$\beta : V \to V^* \qquad e \qquad \alpha : V \to V^{**}$$

tali che $(\beta(v))w = \langle v, w \rangle$ per ogni $v, w \in V$ e $(\alpha(v))\varphi = \varphi(v)$ per goni $v \in V$ e goni $\varphi \in V^*$.

Dimostrare che β e α sono lineari e che sono isomorfismi.

Soluzione

Per verificare che $\beta(v_1+v_2) = \beta(v_1) + \beta(v_2)$ basta vedere se per goni w risulta $(\beta(v_1+v_2))w = (\beta(v_1) + \beta(v_2))w$ ma questo segue dalla definizione di β e dalla proprietá $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w \rangle$ del prodotto scalare.

La verifica del fatto che $\beta(\lambda v) = \lambda \beta(v)$ é esattamente analoga.

Anche α é lineare. Infatti per ogni $\varphi \in V^*$ risulta:

$$(\alpha(v_1+v_2))\varphi = \varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = (\alpha(v_1) + \alpha(v_2))\varphi$$

e analogamente $(\alpha(\lambda v))\varphi = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = (\lambda\alpha(v))\varphi$.

Se V e W sono due spazi vettoriali di dimensioni finite rispettivamente n ed m, lo spazio delle applicazioni lineari da V in W ha dimensione nm (perché una volta fissate una base di V e una base di W, goni applicazione da V in W é associata univocamente ad una matrice $n \times m$; si veda il teorema 9.5 a pagina 250 del libro "Matrici e Vettori").

Da questo segue subito che V^* e V^{**} hanno entrambi dimensione n.

Per vedere che α e β sono isomorfismi basta quindi controllare se hanno nucleo banale.

$v \in \operatorname{Ker}\beta \Leftrightarrow (\beta(v))w = 0 \;\; \forall w \in V \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \;\; \forall w \in V \Leftrightarrow v = 0$

$v \in \operatorname{Ker}\alpha \Leftrightarrow (\alpha(v))\varphi = 0 \;\; \forall \varphi \in V^* \Leftrightarrow \varphi(v) = 0 \;\; \forall \varphi \in V^* \Leftrightarrow v = 0$