ESERCIZI DEL 25/11/2013 E DEL 2/12/2013

(1) Si consideri su $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_2y_2) + x_3y_3 + x_4y_4$

Trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ rispetto al prodotto scalare considerato tale che $Lin(u_1) = Lin(v_1)$, $Lin(u_1, u_2) = Lin(v_1, v_2)$ $Lin(u_1, u_2, u_3) = Lin(v_1, v_2, v_3)$ e $Lin(u_1, u_2, u_3, u_4) = Lin(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$

con: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Soluzione</u> Per prima cosa usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per costruire una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$:

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = v_2 + \frac{1}{3} w_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$\langle w_1, v_3 \rangle = 0$ e $\langle w_2, v_3 \rangle = 0$ da cui $w_3 = v_3$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle w_1, v_4 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_4 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle w_3, v_4 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 =$$

$$= v_4 - \frac{-1/2}{3} w_1 - \frac{4/3}{8/3} w_2 - \frac{1}{2} w_3 = v_4 + \frac{1}{6} w_1 - \frac{1}{2} w_2 - \frac{1}{2} w_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Adesso basta prendere:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle}} w_2 = \frac{1}{\sqrt{8/3}} w_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle w_3, w_3 \rangle}} w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_4 = \frac{1}{\sqrt{\langle w_4, w_4 \rangle}} w_4 = \frac{1}{1/2} w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo procedimento è descritto alle pagine 112-115 del libro "Matrici e Vettori".

② Sia $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ -x+2y-z \\ x-y+2z \end{pmatrix}$. Mostrare che F è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori.
Indicata con A la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ calcolare A^n per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $q(A)$ con $q(t) = (t^2-3t+1)(t^2-3t+3)$.

Soluzione

$A = M_e(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, sia $p_A(t)$ il suo polinomio caratteristico

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 1 & -1 & 2-t \end{pmatrix} = -t^3+4t^2-5t+2 = (2-t)(t-1)^2$$

A è diagonalizzabile se e solo se l'autovalore multiplo $t=1$ ha molteplicità geometrica $m_g(1)=2$ e infatti:

$$m_g(1) = \dim(\operatorname{Ker}(A-I)) = 3 - rg(A-I) = 3 - rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-I)$ allora $-a+b-c=0$. Ne segue che i due vettori $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base per l'autospazio di autovalore 1.

Inoltre: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-2I)$ se e solo se $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui $a=b=-c$.

Pertanto $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ genera l'autospazio di autovalore 2.

$b = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di autovettori per F.

$M_b(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice che rappresenta F rispetto alla base b

$C_{eb} = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di cambiamento di base da e a b.

Dalla relazione $A = M_e(F) = C_{eb}\, M_b(F)\, C_{be} = C_{eb}\, M_b(F)\, C_{eb}^{-1}$ si ha:

$$A^n = C_{eb} \cdot (M_b(F))^n\, C_{eb}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 1 & -1 \\ 2^n & 1 & 0 \\ -2^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n+2 & 2^n-1 & -2^n+1 \\ -2^n+1 & 2^n & -2^n+1 \\ 2^n-1 & -2^n+1 & 2^n \end{pmatrix}$$

Per calcolare $q(A)$ con $q(t) = (t^2-3t+1)(t^2-3t+3)$ osserviamo che:

$$q(t) = (t^2-3t+2)^2 - 1 = (t-1)^2(t-2)^2 - 1 = (2-t)\, p_A(t) - 1$$

Per il teorema di Cayley-Hamilton $p_A(A) = 0$ quindi:

$$q(A) = (2I - A)\, p_A(A) - I = -I$$

③ Dire per quali x ed y reali la seguente matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} x+2 & x+2 & xy+2y \\ x+2 & x^2y+x+2 & xy+2y \\ xy+2y & xy+2y & y^2(x+2)+1-x \end{pmatrix}$$ é definita positiva.

<u>Soluzione</u> Usiamo il teorema 5.2 a pagina 109 del libro "Matrici e Vettori".

Deve essere:

i) $x+2>0$ da cui $x>-2$

ii) $\begin{vmatrix} x+2 & x+2 \\ x+2 & x^2y+x+2 \end{vmatrix} = x^2y(x+2) > 0$ da cui tenuto conto di i) $y>0$ e $x \neq 0$

iii) $\det S > 0$ ovvero $\begin{vmatrix} x+2 & x+2 & xy+2y-y(x+2) \\ x+2 & x^2y+x+2 & xy+2y-y(x+2) \\ xy+2y & xy+2y & y^2(x+2)+1-x-y(xy+2y) \end{vmatrix} > 0$

da cui $\begin{vmatrix} x+2 & x+2 & 0 \\ x+2 & x^2y+x+2 & 0 \\ y(x+2) & xy+2y & 1-x \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & x+2 & 0 \\ 1 & x^2y+x+2 & 0 \\ y & xy+2y & 1-x \end{vmatrix}(x+2) > 0$,

$(x+2)(1-x)\begin{vmatrix} 1 & x+2 \\ 1 & x^2y+x+2 \end{vmatrix} > 0$, $(x+2)(1-x)x^2y > 0$ da cui tenendo anche conto di i) e ii) si ha $1-x>0$ cioé $x<1$

In conclusione S é definita positiva per $y>0$ e $-2<x<1$ ma $x \neq 0$.

④ Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ n numeri reali distinti.

Sia $K \geq 1$ intero. Definiamo $\sigma_0 = n$ e $\sigma_K = \sum_{m=1}^{n} a_m^K$.

Dimostrare che la matrice simmetrica M tale che $(M)_{ij} = \sigma_{i+j-2}$ è definita positiva.

<u>Soluzione</u> Nei fogli delle esercitazioni del 14/10/2013 e del 21/10/2013 era stata definita la matrice di Vandermonde $V(a_1, \dots, a_n)$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{con determinante } \det V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{r>s} (a_r - a_s)$$

Osserviamo che $$\left(V(a_1 \dots a_n) \cdot {}^T V(a_1 \dots a_n)\right)_{ij} = (a_1^{i-1}, a_2^{i-1}, \dots, a_n^{i-1}) \begin{pmatrix} a_1^{j-1} \\ a_2^{j-1} \\ \vdots \\ a_n^{j-1} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{n} a_m^{i+j-2}$$

Ne segue che $(V \cdot {}^T V)_{ij} = \sigma_{i+j-2} = (M)_{ij}$ e dunque $M = V \cdot {}^T V$.

M è definita positiva se e solo se per ogni $z \in \mathbb{R}^n$ non nullo risulta ${}^T z M z > 0$. Ma:

$${}^T z M z = {}^T z V \cdot {}^T V z = \langle {}^T V z, {}^T V z \rangle = \| {}^T V z \|^2 > 0$$

L'ultima disuguaglianza è dovuta al fatto che se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono distinti risulta $\det {}^T V = \det V \neq 0$ e dunque $\operatorname{Ker}({}^T V) = \{0\}$, cioè se $z \neq 0$ ${}^T V z$ è un vettore non nullo.

⑤ Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ verificare che sono ortogonali e scrivere l'equazione del piano α che generano.

Calcolare le matrici (rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$) di proiezione ortogonale e di riflessione rispetto ad α.

<u>Soluzione</u> Sia $\alpha : ax + by + cz = 0$. Essendo $v_1 \in \alpha$ e $v_2 \in \alpha$ deve essere: $\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 5a + 2b - 3c = 0 \end{cases}$ da cui $a = -\frac{2}{3} b = \frac{3}{2} c$.

α ha quindi equazione $6x - 9y + 4z = 0$.

Altro modo per ottenere lo stesso risultato è scegliere $w \notin \operatorname{Lin}(v_1, v_2)$.

Una possibile scelta è $w = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Essendo $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{v_1, v_2, w\}$ in modo da ottenerne una ortogonale $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$v_3 = w - \frac{\langle w, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle w, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{5}{38}\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{6}{133}\begin{pmatrix}6\\-9\\4\end{pmatrix}$$

I vettori di $\alpha = Lin(v_1, v_2)$ sono tutti e soli i vettori ortogonali a v_3. In altre parole $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \alpha$ se e solo se $\frac{6}{133}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-9\\4\end{pmatrix}\right\rangle = 0$ da cui riotteniamo l'equazione di $\alpha: 6x - 9y + 4z = 0$.

Normalizzando i vettori v_1, v_2 e v_3 otteniamo la base ortonormale $b = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{133}}\begin{pmatrix}6\\-9\\4\end{pmatrix}$

La proiezione ortogonale P sul piano α è tale che:

$$P(k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3) = k_1 u_1 + k_2 u_2$$

La matrice P_b che rappresenta P rispetto alla base b è: $P_b = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Indicata con $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con C_{eb} la matrice di cambiamento di base da e a b risulta:

$$C_{eb} = (u_1 | u_2 | u_3) = \begin{pmatrix}1/\sqrt{14} & 5/\sqrt{38} & 6/\sqrt{133}\\ 2/\sqrt{14} & 2/\sqrt{38} & -9/\sqrt{133}\\ 3/\sqrt{14} & -3/\sqrt{38} & 4/\sqrt{133}\end{pmatrix}$$

$C_{be} = C_{eb}^{-1} = {}^{T}C_{eb}$ perché in base al teorema 5.5 a pagina 118 del libro "Matrici e Vettori", la matrice C_{eb} è ortogonale (ovvero ha l'inversa che coincide con la trasposta).

Detta P_e la matrice di proiezione su α rispetto alla base canonica si ha

$$P_e = C_{eb} P_b C_{be} = C_{eb} P_b ({}^{T}C_{eb}) = \frac{1}{133}\begin{pmatrix}97 & 54 & -24\\ 54 & 52 & 36\\ -24 & 36 & 117\end{pmatrix}$$

Altra strategia per calcolare P_e è sfruttare la proposizione 5.13 a pagina 121 del libro "Matrici e Vettori"

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, v_1 \right\rangle v_1 + \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, v_2 \right\rangle v_2 =$$

$$= \frac{x+2y+3z}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \frac{5x+2y-3z}{38}\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{133}\begin{pmatrix}97x+54y-24z\\54x+52y+36z\\-24x+36y+117z\end{pmatrix}$$

La riflessione R rispetto ad α è tale che $R(v_1)=v_1$, $R(v_2)=v_2$, $R(v_3)=-v_3$.

Pertanto la matrice R_b di R rispetto alla base b è $R_b = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Essendo $R_b = 2P_b - I$ $\quad R_e = C_{eb} R_b {}^T C_{eb} = C_{eb}(2P_b - I){}^T C_{eb} = 2P_e - I$

da cui $R_e = \frac{1}{133}\begin{pmatrix}61&108&-48\\108&-29&72\\-48&72&101\end{pmatrix}$

⑥ In riferimento all'esercizio precedente sia $s = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
Trovare i vettori t di lunghezza $3\sqrt{19}$, che formano con s un angolo pari a $\arccos\frac{\sqrt{19}}{3\sqrt{3}}$ e tali che le proiezioni di s e t sul piano α siano perpendicolari.

Soluzione $\quad P_e s = \frac{1}{133}\begin{pmatrix}97&54&-24\\54&52&36\\-24&36&117\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{133}\begin{pmatrix}19\\38\\57\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}}\, v_1$

$$s - P_e s = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-9\\4\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{133}}{7} v_3 = \sqrt{\frac{19}{7}}\, v_3$$

Ne segue che $s = \sqrt{\frac{2}{7}}\, v_1 + \sqrt{\frac{19}{7}}\, v_3$

Sia $t = \beta v_1 + \gamma v_2 + \delta_3 v_3$.
Dette $P(s)$ e $P(t)$ le proiezioni di s e t su α, dovendo essere $\langle P(s), P(t)\rangle = 0$ si ha $\left\langle \sqrt{\frac{2}{7}}\, v_1, \beta v_1 + \gamma v_2 \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{7}}\,\beta = 0$
da cui $\beta = 0$.

Pertanto t è un vettore della forma $t = \gamma v_2 + \delta v_3$

Si ha $|s| = \sqrt{3}$ $|t| = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$ $\langle s, t \rangle = \sqrt{\frac{19}{7}}\, \delta$

Il coseno dell'angolo compreso fra 0 e π formato dai due vettori s e t é pari a : $\frac{\langle s, t \rangle}{|s| \cdot |t|}$.

(Si veda la definizione 5.17 a pagina 119 del libro "Matrici e Vettori")

Pertanto, in base alle richieste dell'esercizio deve essere:

$$\begin{cases} \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} = 3\sqrt{19} \\ \dfrac{\sqrt{19/7}\ \delta}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} = \dfrac{\sqrt{19}}{3\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \delta = \sqrt{133} \\ \gamma = \pm\sqrt{38} \end{cases}$$

Ci sono quindi due soluzioni:

$$t_1 = -\sqrt{38}\, u_2 + \sqrt{133}\, u_3 = -\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$t_2 = \sqrt{38}\, u_2 + \sqrt{133}\, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$