ESERCIZI DEL 6/11/2013 E DEL 18/11/2013

① Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale $F(v_1) = 4$, $F(v_2) = 1$, $F(v_3) = 2$ con:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $F(w)$ con $w = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

<u>Soluzione</u> Basta semplicemente osservare che $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$ e dunque v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
(Si veda il teorema 9.1 a pagina 245 del libro "Matrici e Vettori").
Scritto w come $2v_1 + v_3$ avremo $F(w) = 2F(v_1) + F(v_3) = 10$.

② Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x + 3y - 4z = 0$. Sia $g: V \to \mathbb{R}^2$ tale che $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x - 2z \end{pmatrix}$.
Calcolare nucleo ed immagine di g.

<u>Soluzione</u> $Ker(g)$ é l'insieme dei vettori v in V tali che $g(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Pertanto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(g)$ se e solo se $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 5y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

Le soluzioni sono della forma $\begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ pertanto $Ker(g) = Lin\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Essendo $\dim(Im\, g) = \dim V - \dim(Ker(g)) = 2 - 1 = 1$,
per determinare l'immagine di g basta considerare lo spazio generato da $g(v)$ con $v \in V$ e $v \notin Ker(g)$.
Si avrá dunque $Im(g) = Lin(g(v))$.
Una possibile scelta é $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui $Im(g) = Lin\left(\begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

③ Sia P_2 lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più 2 a coefficienti reali. Si considerino le seguenti basi di P_2:
$E = \{1, t, t^2\}$, $B = \{1, t+2, t^2-1\}$, $B' = \{3t^2+t-1, 2t+7, t^2+t+8\}$.
Calcolare la matrice di passaggio di base da B a B'.
Scrivere le coordinate di $p(t) = 4t^2+6t+21$ rispetto alle basi B e B'.
Sia $F : P_2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $F(q(t)) = {}^T(q(0), q(1))$.
Siano $C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e $D = \left\{d_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$.
Calcolare le matrici $M_{C,E}(F)$ e $M_{D,B}(F)$ che esprimono F rispetto alle basi indicate.

<u>Soluzione</u> La i-esima colonna della matrice $A_{B,B'}$ di passaggio di base da B a B' è il vettore delle coordinate rispetto alla base B dell'i-esimo vettore della base B'. Determiniamo a, b e c tali che:

$$3t^2+t-1 = a + b(t+2) + c(t^2-1) \quad \text{da cui :}$$

$$\begin{cases} a+2b-c=-1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases} \quad \text{e la prima colonna di } A_{B,B'} \text{ è } \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

Procedendo analogamente con gli altri vettori della base B' si ha:

$$2t+7 = 3+2(t+2) \quad , \quad t^2+t+8 = 7+(t+2)+(t^2-1)$$

da cui si ottiene $A_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Altro modo per calcolare $A_{B,B'}$ è osservare che $A_{B,B'} = A_{B,E} \cdot A_{E,B'}$

$$A_{E,B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{E,B'} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{B,E} = A_{E,B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $x' = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ il vettore delle coordinate di $p(t)$ rispetto a B'.

Deve essere $4t^2+6t+21 = \alpha(3t^2+t-1) + \beta(2t+7) + \gamma(t^2+t+8)$ da cui $x' = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Il vettore $x \in \mathbb{R}^3$ delle coordinate di $p(t)$ rispetto a B si ottiene come:

$$x = A_{B,B'} x' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Infatti: $13 + 6(t+2) + 4(t^2-1) = 4t^2 + 6t + 21 = p(t)$.

Essendo $F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si avrà:

$$M_{C,E}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{D,B}(F) = A_{D,C}\, M_{C,E}(F)\, A_{E,B}$$

$$A_{C,D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_{D,C} = A_{C,D}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{D,B}(F) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La i-esima colonna della matrice $M_{D,B}(F)$ è il vettore delle coordinate rispetto alla base D dell'immagine tramite F dell'i-esimo vettore della base B. Infatti:

$$F(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2d_1 - d_2, \quad F(t+2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = d_1, \quad F(t^2-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -5d_1 + 3d_2$$

④ Siano A e B due matrici quadrate. Dimostrare che $Tr(AB) = Tr(BA)$. Dimostrare che due matrici simili hanno la stessa traccia.

<u>Soluzione</u> $Tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} =$

$= \sum_k (BA)_{kk} = Tr(BA)$

Siano poi M e CMC^{-1} ($\det C \neq 0$) due matrici simili.
Allora, sfruttando la relazione precedente con $A = CM$ e $B = C^{-1}$ si ha:

$Tr(CMC^{-1}) = Tr(C^{-1}CM) = Tr\, M$.

⑤ Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$D=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\3&3&5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}&0&0\\0&-2a&15(1-a)\\0&2a-2&9a-11\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1-6a&0&9a\\0&a^2+2&0\\-4a&0&6a+1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}-6&2&-5\\-4&4&-2\\10&-3&8\end{pmatrix}$$ dove a è un parametro reale

Soluzione

$$p_D(t)=\det\begin{pmatrix}3-t&1&1\\2&4-t&2\\3&3&5-t\end{pmatrix}=(3-t)(4-t)(5-t)+6+6-12+3t-18+6t-10+2t=$$

$$=-t^3+12t^2-36t+32=-(t-2)(t^2-10t+16)=-(t-2)^2(t-8)$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(D-2I))=3-rg(D-2I)=3-rg\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=2$$

L'autovalore multiplo $t=2$ ha molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, ne segue che D è diagonalizzabile.

$$p_B(t)=-\left(t-\frac{7}{2}a+\frac{11}{2}\right)\left(t^2+(11-7a)t+12a^2-38a+30\right)=$$

$$=-\left(t-\frac{7}{2}a+\frac{11}{2}\right)(t-3a+5)(t-4a+6)$$

Se $a\neq 1$ i tre autovalori $\frac{7}{2}a-\frac{11}{2}$, $3a-5$ e $4a-6$ sono tutti distinti e la matrice B è diagonalizzabile. Per $a=1$ $B=-2I$, quindi in questo caso la matrice è già diagonale.

$$p_C(t)=-(t-a^2-2)(t-1)^2$$

L'autovalore a^2+2 (sempre diverso da 1) ha molteplicità algebrica 1 e l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2. La matrice è diagonalizzabile se e solo se:

$\dim(\mathrm{Ker}(C-I))=2$ da cui $rg(C-I)=1$ ovvero $rg\begin{pmatrix}-6a&0&9a\\0&a^2+1&0\\-4a&0&6a\end{pmatrix}=1$

L'unico caso in cui vale la precedente uguaglianza è per $a=0$.

$$p_A(t)=-t^3+6t^2-12t+8=-(t-2)^3$$

La matrice A non è diagonalizzabile perché se lo fosse sarebbe coniugata alla matrice $2I$ ovvero esisterebbe S invertibile tale che $A=S(2I)S^{-1}$. Ma $S(2I)S^{-1}=2I$ e $A\neq 2I$.