ESERCIZI DEL 28/10/2013

① Sia $V := \{x \in \mathbb{R} \text{ con } x > 0\}$. Dati x e y in V definiamo la seguente operazione di somma $\boxplus$:

$$x \boxplus y = xy$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ definiamo una moltiplicazione $\boxdot$ fra α e $x \in V$ tale che:

$$\alpha \boxdot x = x^{\alpha}$$

Dimostrare che $(V, \boxplus, \boxdot)$ è uno spazio vettoriale reale e calcolarne la dimensione.

<u>Soluzione</u> Bisogna verificare le otto proprietà delle operazioni $\boxplus$ e $\boxdot$ elencate nella definizione 4.5 a pagina 76 del libro "Matrici e vettori".

1) Associatività della somma:
$$(x \boxplus y) \boxplus z = xyz = x \boxplus (y \boxplus z)$$
2) Commutatività della somma:
$$x \boxplus y = xy = y \boxplus x$$
3) Esistenza di $\bar{0} \in V$ tale $x \boxplus \bar{0} = \bar{0} \boxplus x = x$ per ogni $x \in V$: in questo caso $\bar{0} = 1$ dato che $x \boxplus 1 = 1 \boxplus x = x$
4) Esistenza dei vettori opposti:
$$x \boxplus 1/x = 1$$
5) Per ogni $v \in V$ $\quad 1 \boxdot v = v^1 = v$
6) $\alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = (x^{\beta})^{\alpha} = x^{\alpha\beta} = \alpha\beta \boxdot x$
7) Distributività di $\boxdot$ rispetto a $\boxplus$
$$\alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot xy = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\alpha \boxdot y)$$
8) Distributività di $\boxdot$ rispetto alla somma di numeri reali
$$(\alpha + \beta) \boxdot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\beta \boxdot x).$$

V ha dimensione 1 in quanto $v = 2$ genera V. Bisogna verificare che per ogni $w \in V$, cioè per ogni w reale positivo, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \boxdot 2 = w$. Basta prendere $\alpha = \log_2 w$ dato che $2^{\log_2 w} = w$.

② Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Sia U definito dall'equazione: $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$.

Per concludere indichiamo con V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcolare le dimensioni di W, $W \cap V$, $W + V$ e mostrare che $W + V = U$.

Soluzione

La matrice incompleta del sistema che definisce W ha rango 2 pertanto il sistema ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni il che equivale a dire che W ha dimensione 2.

Risolvendo il sistema possiamo determinare esplicitamente una base di W:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ 2x_3 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -3x_2 - x_4 \\ x_1 = 2x_3 = -6x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

Le soluzioni sono della forma: $\begin{pmatrix} -6x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ -3x_2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pertanto $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di W.

I vettori di V sono della forma $au + bv$ al variare di a e b in $\mathbb{R}$:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -2a \end{pmatrix}$$

Vediamo per quali valori di a e b i vettori della forma $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ -2a \end{pmatrix}$ oltre che a V appartengono anche a W:

$$\begin{cases} a + 3b - b - 2a = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui } a = 2b$$

$W \cap V$ é costituito da vettori del tipo $\begin{pmatrix} 2b \\ b \\ b \\ -4b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Pertanto $W \cap V$ ha dimensione 1 con base formata dall'unico vettore $2u + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Non é difficile verificare che anche $2u+v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

formano una base di $\overline{V}$ (in quanto, ad esempio, $\overline{V}$ ha dimensione 2 e $2u+v$ e v sono due vettori linearmente indipendenti).

Analogamente abbiamo che $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base di $\overline{W}$.

Ne segue che ogni vettore di $\overline{V}+\overline{W}$ é combinazione lineare di:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essendo questi tre vettori linearmente indipendenti, essi formano una base di $\overline{V}+\overline{W}$ che ha pertanto dimensione 3.

Il sottospazio $\overline{U}$ definito dall'equazione $2x_1+3x_2-3x_3+x_4=0$ ha dimensione 3. I vettori di $\overline{U}$ infatti corrispondono alle $\infty^{4-1} = \infty^3$ soluzioni dell'equazione sopra riportata.

Per verificare che $\overline{W}+\overline{V} = \overline{U}$ basta osservare che i due sottospazi hanno la stessa dimensione e che ogni vettore della base di $\overline{W}+\overline{V}$ prima calcolata verifica l'equazione di $\overline{U}$.

Si osservi infine che vale la formula di Grassmann:

$$\dim(\overline{V}+\overline{W}) + \dim(\overline{V}\cap\overline{W}) = \dim\overline{V} + \dim\overline{W}$$

(teorema 9.4, pagina 249 del libro "Matrici e Vettori")