ESERCIZI DEL 14/10/2013 E DEL 21/10/2013

① Dimostrare che se un sistema lineare $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ ammette due soluzioni distinte s_1 ed s_2 in $\mathbb{R}^n$, allora ne ammette infinite.

<u>Soluzione</u>

$s_1 - s_2$ è soluzione non nulla del sistema omogeneo associato (Proposizione 1.1 pagina 18 del libro "Matrici e vettori").
Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ottengono infinite soluzioni del sistema omogeno associato: $\lambda(s_1 - s_2)$.
$s_1 + \lambda(s_1 - s_2)$ sono infinite soluzioni al sistema non omogeneo di partenza.

② Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Dimostrare che ogni matrice $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che commuta con A (ovvero tale che $AB = BA$) si scrive nella forma $B = aA + bI$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Soluzione</u>

Sia $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Bisogna determinare x, y, z e t in modo che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x+3y \\ z & 2z+3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z = x \\ y+2t = 2x+3y \\ 3z = z \\ 3t = 2z+3t \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} z = 0 \\ t = x+y \end{cases} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$$

Affinché ogni matrice che commuta con A possa scriversi come $aA + bI$ il sistema lineare nelle incognite a e b:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a+b = x \\ 2a = y \\ 3a+b = x+y \end{cases}$$

deve essere compatibile per ogni x ed y.

La terza equazione è somma delle prime due e può essere omessa. Il sistema $\begin{cases} a+b=x \\ 2a=y \end{cases}$ è sempre compatibile con unica soluzione $\begin{cases} a=y/2 \\ b=x-y/2 \end{cases}$.

(3) Sia $q(x)$ un polinomio a coefficienti reali $q(t)=a_n t^n+\dots+a_1 t+a_0$.
Se A è una matrice quadrata definiamo:

$$q(A)=a_n A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1 A+a_0 I.$$

Sia $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare un polinomio $p(t)$ tale che $p(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Sfruttiamo il risultato dell'esercizio precedente.

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ è una matrice che commuta con A, pertanto $A^2=\frac{y}{2}A+(x-\frac{y}{2})I$ ed essendo $x=1$ e $y=8$ si ha $A^2=4A-3I$ cioè $A^2-4A+3I=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pertanto $p(t)=t^2-4t+3$ è tale che $p(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) Determinare il rango delle seguenti matrici

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{8} & \sqrt{18} \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} k & 5k & 2k \\ k & 2k & k^2 \\ 3k & 9k & 16k \end{pmatrix}$$

Soluzione

Applichiamo l'algoritmo di riduzione ad A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{8} & \sqrt{18} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo rimaste solo due righe non nulle il rango è 2.

La matrice B ha rango massimo (quindi 4) perché la matrice quadrata che si ottiene da B rimuovendo la quarta riga é invertibile essendo ridotta e senza righe nulle.
Applichiamo a C l'algoritmo di riduzione:

$$\begin{pmatrix} K & 5K & 2K \\ K & 2K & K^2 \\ 3K & 9K & 16K \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K & 5K & 2K \\ 0 & -3K & K^2-2K \\ 0 & -6K & 10K \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K & 5K & 2K \\ 0 & -3K & K^2-2K \\ 0 & 0 & -2K^2+14K \end{pmatrix}$$

Se $K \neq 0, 7$ tutte le righe sono non nulle quindi il rango é 3.
Per $K=7$ la terza riga é nulla quindi il rango é 2.
Per $K=0$ si ottiene la matrice nulla e dunque il rango é 0.

5 Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite x, y e z in cui m é un parametro reale:

$$\begin{cases} y + mz = m+1 \\ x + y + z = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases}$$

Soluzione

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix} = m + m - m^2 = m(2-m)$$

Per $m \neq 0$ e $m \neq 2$ la matrice incompleta ha determinante non nullo. Matrice completa e matrice incompleta in questo caso hanno entrambe rango 3. Il sistema ha quindi una unica soluzione che possiamo determinare con la regola di Cramer:

$$x = \frac{1}{m(2-m)} \det\begin{pmatrix} m+1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m(2-m)}(2m+m+1-m^2-m-m-1) = \frac{1-m}{2-m}$$

$$y = \frac{1}{m(2-m)} \det\begin{pmatrix} 0 & m+1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ m & m+1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m(2-m)}(m^2+m+m^2+m-2m^2) = \frac{2}{2-m}$$

$$z = \frac{1}{m(2-m)} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & m+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & m+1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{m(2-m)} \det\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & m \end{pmatrix} = \frac{(-1)^2}{m(2-m)} \det\begin{pmatrix} m+1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = x$$

Se $m=0$ la prima e la terza equazione coincidono con $y=1$.
Il sistema $\begin{cases} y=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ è compatibile con le ∞^1 soluzioni della forma $(t, 1, 1-t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Se $m=2$ la matrice incompleta ha rango 2. In questo caso la matrice completa ha rango 3 in quanto ad esempio calcolando il determinante del minore che si ottiene rimuovendo la seconda colonna si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 8-6-6=-4 \neq 0$$

Se $m=2$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

6) Calcolare, se possibile, la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione

$\operatorname{Det} A = 2+8+2-4=8$, quindi l'inversa esiste.
Un primo metodo per calcolare l'inversa consiste nell'osservare che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ è equivalente a $A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Usando l'algoritmo di Gauss-Jordan risolviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ 4x_1 + x_2 = y_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & y_1 \\ 4 & 1 & 0 & y_2 \\ -2 & 2 & 1 & y_3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & -2 & y_2-2y_1 \\ 0 & 3 & 2 & y_3+y_1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & -2 & y_2-2y_1 \\ 0 & 0 & -4 & y_3+3y_2-5y_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_2 - 2x_3 = y_2 - 2y_1 \\ -4x_3 = y_3 + 3y_2 - 5y_1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_1 = 1/8\, y_1 + 1/8\, y_2 - 1/8\, y_3 \\ x_2 = -1/2\, y_1 + 1/2\, y_2 + 1/2\, y_3 \\ x_3 = \frac{5}{4} y_1 - \frac{3}{4} y_2 - \frac{1}{4} y_3 \end{cases}$$

Pertanto : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

Altra strategia per calcolare A^{-1} è il metodo descritto nel paragrafo 3.3 a pagina 64 del libro "Matrici e Vettori".

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 1 & 4 & -6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & -1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

7 Dimostrare che per ogni h reale diverso da 2 ogni $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ si scrive in modo unico come:

$$aA + bB + cC + dD$$

dove a, b, c e d sono coefficienti reali e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} h^2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Affinché il sistema lineare:

$$\begin{cases} a + 3b + h^2 d = t_1 \\ ha + b + 4c + 7d = t_2 \\ b + d = t_3 \\ -3a - 5b + 5c - 3d = t_4 \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione per ogni possibile scelta di $M = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$, la matrice incompleta del sistema deve essere invertibile o, equivalentemente, deve avere determinante non nullo.

Calcoliamo il determinante con lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza riga:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & h^2\\ h & 1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -3 & -5 & 5 & -3\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}1 & 0 & h^2\\ h & 4 & 7\\ -3 & 5 & -3\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ h & 1 & 4\\ -3 & -5 & 5\end{pmatrix} =$$

$$= -\left(-12+5h^3+12h^2-35\right)-\left(5-36+20-15h\right)=$$

$$= -\left(5h^3+12h^2-15h-58\right) = (2-h)\left(5h^2+22h+29\right)$$

Dato che $5h^2+22h+29$ ha discriminante negativo, il determinante della matrice incompleta è non nullo per ogni h reale diverso da 2.

8 MATRICI DI VANDERMONDE.

Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ n numeri reali. Sia $V(x_1,\dots,x_n)$ la seguente matrice:

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

La riga i-esima di $V(x_1,\dots,x_n)$ è $R_i(V) = (x_1^{i-1}, x_2^{i-1}, x_3^{i-1}, \dots, x_n^{i-1})$.
Vogliamo dimostrare che $\det(V(x_1,\dots x_n)) = \prod_{r>s}(x_r - x_s)$.
Per $n=2$ la formula è vera perché $\det(V(x_1,x_2)) = \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix} = x_2 - x_1$.
Procediamo ora per induzione: assumiamo come ipotesi induttiva che la formula sia vera per matrici quadrate di dimensione al più $n-1$ e facciamo vedere che la formula è valida anche per matrici $n\times n$.

Definiamo $p(x) = \prod_{i=2}^{n} (x - x_i) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0$.

Osserviamo che per $i \geq 2$ risulta $p(x_i) = 0$.

Inoltre: $p(x_1) = \prod_{i=2}^{n} (x_1 - x_i) = (-1)^{n-1} \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1)$.

Costruiamo a partire da $V(x_1, \dots, x_n)$ una matrice F tale che: le prime $n-1$ righe di F coincidono con le prime $n-1$ righe di $V(x_1, \dots, x_n)$ e detta $R_n(F)$ l'ennesima riga di F risulta:

$$R_n(F) = R_n(V) + a_{n-2} R_{n-1}(V) + a_{n-3} R_{n-2}(V) + \dots + a_1 R_2(V) + a_0 R_1(V)$$

Non è difficile constatare che:

$$R_n(F) = (p(x_1), p(x_2), p(x_3), \dots, p(x_n)) =$$
$$= (p(x_1), 0, 0, \dots, 0)$$

Avremo quindi:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \\ x_1 & \\ x_2 & \boxed{V(x_2, x_3, \dots, x_n)} \\ \vdots & \\ x_{n-2} & \\ p(x_1), & 0, 0, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo $\det F$ rispetto alla n-esima riga. Si avrà:

$$\det F = (-1)^{n+1} p(x_1) \det V(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \prod_{n \geq r > s \geq 2} (x_r - x_s) =$$
$$= \prod_{n \geq r > s \geq 1} (x_r - x_s)$$

Per le proprietà del determinante si ha $\det F = \det(V(x_1, \dots, x_n))$ e questo conclude la dimostrazione. Osserviamo che $V(x_1, \dots, x_n)$ è invertibile se e solo se gli x_i sono tutti distinti.

9 Siano $a_1, a_2, \dots, a_n$ n numeri reali distinti. Dimostrare che le funzioni nella variabile reale x $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ ovvero che la funzione:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{a_i x} \quad \text{con } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

è identicamente nulla solo nel caso in cui $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Soluzione

Se $f(x) = 0$ per ogni x si avrà anche:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i e^{a_i x} = 0 \quad \text{per ogni } x$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^2 e^{a_i x} = 0 \quad \text{per ogni } x$$

....

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{n-1} e^{a_i x} = 0 \quad \text{per ogni } x$$

Ponendo $x=0$ nelle precedenti n equazioni si ottiene un sistema lineare nelle incognite $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n = 0 \\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \dots + a_n^2 c_n = 0 \\ \dots \\ a_1^{n-1} c_1 + a_2^{n-1} c_2 + \dots + a_n^{n-1} c_n = 0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema è $V(a_1, \dots, a_n)$ e dato che per ipotesi gli a_i sono distinti è una matrice invertibile. Pertanto la relazione:

$$V(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

può essere invertita ottenendo:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(V(a_1, \dots, a_n)\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$