ESERCIZI DEL 20/1/2014

① Dati in $\mathbb{R}^3$: $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}11\\0\\1\end{pmatrix}$ e $D\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$

determinare il volume del tetraedro ABCD e dimostrare che l'unica affinità di $\mathbb{R}^3$ che fissa tutti e quattro i vertici è l'affinità identica.

<u>Soluzione</u> Sia $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un generico punto del piano BCD. I tre vettori

$P-B$, $C-B$ e $D-B$ sono linearmente dipendenti pertanto deve aversi:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 9 & 1 \\ y-3 & -3 & 1 \\ z-7 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{da cui} \quad x+y+z-12=0$$

L'altezza h del teatraedro ABCD relativa alla base BCD è la distanza di A dal piano BCD. Sfruttando la formula per la distanza punto-piano a pagina 227 del libro "Matrici e Vettori" si ha $h = 11/\sqrt{3}$.

La retta BC ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 2+9t \\ y = 3-3t \\ z = 7-6t \end{cases}$

Sia π il piano perpendicolare a BC passante per D. $\pi: 9x-3x-6y+d=0$

Essendo $D \in \pi$ $27-12-30+d=0$ da cui $d=15$ e $\pi: 3x-y-2z+5=0$.

Nel triangolo BCD il piede dell'altezza relativa al lato BC si può ottenere come punto P di intersezione fra la retta BC e il piano π da cui:

$$3(2+9t)-(3-3t)-2(7-6t)+5=0, \quad 42t-6=0, \quad t=1/7, \quad P\begin{pmatrix}23/7\\18/7\\43/7\end{pmatrix}.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{9^2+3^2+6^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \qquad \overline{PD} = \sqrt{\left(\tfrac{2}{7}\right)^2+\left(\tfrac{10}{7}\right)^2+\left(\tfrac{8}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{168} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

L'area $\mathcal{A}$ del triangolo BCD è:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{PD} = 6\sqrt{3}$$

Il volume del tetraedro ABCD è pertanto $\frac{1}{3}\mathcal{A}\cdot h = 22$

Ogni affinità T di $\mathbb{R}^3$ è della forma: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ con M matrice invertibile 3×3.

Se $T(A)=A$, $T(B)=B$, $T(C)=C$ e $T(D)=D$ si avrà:

$T(A)-T(D)=M(A-D)=A-D$, $T(B)-T(D)=M(B-D)=B-D$ e $T(C)-T(D)=M(C-D)=C-D$

ed essendo $A-D$, $B-D$ e $C-D$ linearmente indipendenti, l'unica matrice che fissa tutti i vettori di una base è $M=I$. Da $T(A)=A$ segue anche che $c_1=c_2=c_3=0$.

② Data la conica di equazione $x^2+4xy+4y^2+4x-12y+4=0$ ridurla a forma canonica metrica. Dopo aver verificato che si tratta di una parabola, determinare le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice.

Soluzione Associamo alla forma quadratica $Q(x,y)=x^2+4xy+4y^2$ relativa all'equazione della conica la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

$\det(A-tI)=\det\begin{pmatrix}1-t&2\\2&4-t\end{pmatrix}=t^2-5t$ pertanto A ha autovalori $t_1=0$ e $t_2=5$.

Dalla definizione 12.8 alle pagine 309-310 del libro "Matrici e Vettori" segue subito che la conica data è una parabola. Indichiamo con $\{u_1,u_2\}$ la base ortonormale di autovettori per A.

$\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Lin}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ da cui $u_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-5I)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}=\mathrm{Lin}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ da cui $u_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Sia M la matrice di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ a $\{u_1,u_2\}$. $M=(u_1|u_2)=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$.

Trasformiamo l'equazione della conica per mezzo del cambiamento di coordinate: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2X+Y\\-X+2Y\end{pmatrix}$

Si avrà:

$$5Y^2+\frac{4}{\sqrt5}(2X+Y)-\frac{12}{\sqrt5}(-X+2Y)+4=0$$ da cui:

$$X=-\frac14\sqrt5\,Y^2+Y-\frac{\sqrt5}{5}=-\frac{\sqrt5}{4}\left(Y^2-\frac{4}{\sqrt5}Y+\frac45\right)=-\frac{\sqrt5}{4}\left(Y-\frac{2}{\sqrt5}\right)^2$$

Posto $Y'=Y-\frac{2}{\sqrt5}$ e $X'=-X$ si perviene alla forma canonica metrica $X'=\frac{\sqrt5}{4}Y'^2$

Avremo poi: $\begin{cases}x=1/\sqrt5\,(2X+Y)=1/\sqrt5\,(-2X'+Y')+2/5\\ y=1/\sqrt5\,(-X+2Y)=1/\sqrt5\,(X'+2Y')+4/5\end{cases}$

L'asse di simmetria di $X'=\sqrt5/4\;Y'^2$ ha equazione $Y'=0$.

Sostituendo nelle equazioni dell'affinità si ha: $\begin{cases}x=-2/\sqrt5\,X'+2/5\\ y=1/\sqrt5\,X'+4/5\end{cases}$

Passando dalla forma parametrica all'equazione cartesiana si ottiene $x+2y-2=0$. In modo analogo si determina l'equazione della direttrice $2x-y-1=0$.

③ Ridurre a forma canonica metrica le quadriche della famiglia:

$$Q_K: (K+4)x^2 + 2y^2 + (K+4)z^2 - 2(K+2)xz + 6x + 4Ky + 6z + 2K^2 + 8 = 0$$

determinando esplicitamente le equazioni dei cambiamenti di coordinate. Classificare le quadriche al variare del parametro reale K.

Soluzione Sia A_K la matrice simmetrica relativa alla forma quadratica

$$\phi_K(x,y,z) = (K+4)x^2 + 2y^2 + (K+4)z^2 - 2(K+2)xz.$$

$$A_K = \begin{pmatrix} K+4 & 0 & -K-2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -K-2 & 0 & K+4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(tI - A_K) = t^3 - 2(K+5)t^2 + 4(2K+7)t - 8(K+3) = (t-2)^2(t-2(K+3))$$

Cerchiamo una base ortonormale di autovettori per A_K:

$$\mathrm{Ker}(A_K - 2(K+3)I) = \mathrm{Ker}\left(-(K+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{se } K=-2 \\ \mathrm{Lin}(v_1) & \text{se } K\neq -2 \text{ con } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(A_K - 2I) = \mathrm{Ker}\left((K+2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{se } K=-2 \\ \mathrm{Lin}(v_2, v_3) & \text{se } K\neq -2 \text{ con } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Essendo $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, $\langle v_2, v_3\rangle = 0$ e $\langle v_1, v_3\rangle = 0$ possiamo considerare come base ortonormale $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$, $u_2 = v_2$ e $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$.

Consideriamo il cambiamento di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (u_1|u_2|u_3)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ovvero:

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{2}\,(x'+z') \\ y = y' \\ z = 1/\sqrt{2}\,(-x'+z') \end{cases};$$

sostituendo nell'equazione di Q_K si ha:

$$2(K+3)(x')^2 + 2(y')^2 + 2(z')^2 + 4Ky' + 6\sqrt{2}z' + 2K^2 + 8 = 0$$

$$2\left[(K+3)(x')^2 + (y'+K)^2 + \left(z' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - 1 = 0$$

Posto $X = x'$, $Y = y'+K$ e $Z = z' + \frac{3}{\sqrt{2}}$ si ottiene:

$$2(K+3)X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 = 1$$

In base alla classificazione metrica delle quadriche a pagina 337 del libro "Matrici e Vettori" si ha che Q_K è un ellissoide per $K>-3$ (ed in particolare una sfera se $K=-2$), un cilindro ellittico per $K=-3$, ed un iperboloide iperbolico per $K<-3$.

④ Si consideri la forma quadratica:

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 16x_4^2 + 10x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 18x_2x_4 + 14x_1x_4.$$

Determinare indice di nullitá, rango, segnatura e forma canonica affine.

<u>Soluzione</u> La matrice associata é $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 & 16 \end{pmatrix}$

M ha polinomio caratteristico $t(t^3 - 23t^2 - 31t + 57)$.

L'autovalore $t=0$ ha molteplicitá algebrica 1 perché il termine t compare con esponente 1 nel polinomio caratteristico. Essendo M simmetrica, dunque diagonalizzabile, le molteplicitá algebriche sono uguali a quelle geometriche, ne segue che $\dim(\text{Ker } M) = 1$ e che la forma quadratica Q ha indice di nullitá 1 e rango 3. Per determinare la segnatura di Q occorre conoscere il segno delle radici di $t^3 - 23t^2 - 31t + 57 = 0$.

Puó essere utile il <u>Criterio di Cartesio</u> secondo cui:

dato un polinomio di grado n a coefficienti reali e tale che le sue radici siano tutte reali, scritta la successione ordinata dei coefficienti non nulli si considerino le variazioni di segno nel passaggio da ciascun coefficiente al successivo; allora il numero di tali variazioni uguaglia il numero di radici positive del polinomio.

Nel caso specifico il polinomio $t^3 - 23t^2 - 31t + 57$ ha due variazioni di segno. Ne segue che la forma quadratica Q ha segnatura (2,1). In base al teorema di Sylvester a pagina 297 del libro "Matrici e Vettori" esistono coordinate (z_1,z_2,z_3,z_4) legate ad (x_1,x_2,x_3,x_4) da una trasformazione affine rispetto alle quali Q si scrive come: $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.