

**ALGEBRE DI OPERATORI LAUREA MAGISTRALE IN  
MATEMATICA  
A.A. 2017/2018**

F. FIDALEO

1. ALGEBRE DI OPERATORI

- Algebre di Banach e  $C^*$ -algebre.
- Spettro e calcolo funzionale.
- Funzionali lineari positivi, stati e rappresentazioni; rappresentazione di Gelfand-Naimark-Segal (GNS).
- Struttura delle  $C^*$ -algebre finito-dimensionali.
- Algebre concrete di operatori su spazi di Hilbert: il teorema del bicommutante di J. von Neumann e le algebre di von Neumann (AvN).
- $W^*$ -algebre: caratterizzazione in termini del preduale, identificazione delle algebre di von Neumann come  $W^*$ -algebre concrete.
- Algebre di operatori abeliane.

2. CLASSIFICAZIONE DELLE  $W^*$ -ALGEBRE

- Geometria delle proiezioni.
- Tracce normali semifinite fedeli.
- Classificazione delle  $W^*$ -algebre.

3. TEORIA MODULARE DI TOMITA

- Stati normali e fedeli, e vettori ciclici e separanti su una AvN: operatore S di Tomita.
- Operatore  $\Delta$  e coniugazione  $J$  di Tomita.
- Gruppi a un parametro di automorfismi normali e condizione di Kubo-Martin-Schwinger (KMS), Teorema di Tomita.
- Pesi normali semifiniti fedeli: generalizzazione al caso non  $\sigma$ -finito (cenni); rappresentazione standard di una  $W^*$ -algebra.

4. APPLICAZIONI

- Applicazioni della condizione di KMS alla Meccanica Statistica Quantistica.
- Applicazioni alla classificazione di Connes dei fattori di tipo III (cenni).
- Attese condizionate normali e fedeli, teorema di esistenza di Takesaki, generalizzazione di Accardi-Cecchini e applicazioni alla Probabilità Quantistica (cenni).

**Testi consigliati:**

- (1) O. Bratteli, D. W. Robinson *Operator algebras and quantum statistical mechanics I,II*, Springer (paragrafi 2.1-2.5, 5.3.1).

- (2) M. Takesaki: *Theory of operator algebras I*, Springer (paragrafi II-5, I9, II1, III-4, III1-3, V1-2).
- (3) Strătilă, L. Zsidó, *Lectures on von Neumann algebras*, Abacus press (paragrafi 1, 3, 4, 5 e parte del 10).
- (4) Ş. Strătilă, *Modular theory in operator algebras*, Abacus press (paragrafi 1, 2, 9, 10).
- (5) L. Accardi, C. Cecchini: *Conditional expectations in von Neumann algebras and a theorem of Takesaki*, J. Funct. Anal. 45 (1982), 245-273.

**Obiettivi formativi:** Nonostante la vastità e la complessità delle tematiche, il corso "Algebre di Operatori" si prefigge di fornire le nozioni basilari (ma non solo) nella maniera più semplice possibile, di questa affascinante disciplina che ha permesso di spiegare molti fenomeni della fisica moderna, e che ha avuto notevoli applicazioni a svariati campi della Matematica e della Fisica. La parte finale del corso provvederà a fornire alcune di queste stimolanti applicazioni.

**Prerequisiti:** Elementi di Analisi Funzionale e di Teoria Spettrale.

**Modalità dell'esame:** L'esame consisterà in una prova orale vertente ad accertare il grado di preparazione dello studente.

**Note:**

- Il grado di approfondimento delle voci nell'ultima parte del corso (Applicazioni) sarà svolta compatibilmente col tempo a disposizione.
- Durante lo svolgimento del corso si cercherà di coinvolgere gli studenti in attività interattive (svolgimento di semplici esercizi, discussioni tenute da studenti in interazione col docente su argomenti chiave) che serviranno a facilitare lo studio, l'apprendimento e il conseguimento di un buon risultato alla prova finale di esame.
- I testi di riferimento sono quelli indicati nei punti 1 e 2, limitatamente ai paragrafi elencati.