Teoria dei Fibrati

Filippo Bracci

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA 1, 00133 ROMA, ITALY.

E-mail address: fbracci@mat.uniroma2.it

Indice

CAPITOLO 1

Preliminari

1. Elementi di algebra tensoriale

1.1. Applicazioni bilineari e prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Siano V, W due spazi vettoriali di *dimensione finita* sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

DEFINIZIONE 1.1. Una *applicazione bilineare* f su $V \times W$ a valori in uno spazio vettoriale U è una funzione $f : V \times W \to U$ tale che:

(1) $V \ni v \mapsto f(v, w)$ è $\mathbb{K}$-lineare per ogni $w \in W$ fissato, e
(2) $W \ni w \mapsto f(v, w)$ è $\mathbb{K}$-lineare per ogni $v \in V$ fissato.

Se f, g sono applicazioni bilineari su $V \times W$, allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la funzione $\lambda f + \mu g$ definita tramite

$$(\lambda f + \mu g)(v, w) := \lambda f(v, w) + \mu g(v, w),$$

è chiaramente una applicazione bilineare su $V \times W$ a valori in U. Pertanto l'insieme delle applicazioni bilineari da $V \times W$ in U forma uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Indichiamo con V^*, W^* i duali di V, W, in altri termini, $V^* = \mathsf{Hom}(V, \mathbb{K})$. Lo spazio delle applicazioni bilineari su $V^* \times W^*$ a valori in $\mathbb{K}$ (dette anche *forme bilineari*), si denota $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Dunque per definizione:

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W := \{f : V^* \times W^* \to \mathbb{K} : f \text{ è bilineare}\}$$

Definiamo adesso una applicazione

$$\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W,$$

tramite

$$(\otimes(v, w))(v^*, w^*) := v^*(v)w^*(w),$$

dove $(v, w) \in V \times W$ e $v^* \in V^*, w^* \in W^*$. Si verifica facilmente che per ogni fissato $(v, w) \in V \times W$, $\otimes(v, w)$ è una forma bilineare su $V^* \times W^*$. In più, per costruzione, si verifica che $\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è una applicazione bilineare.

Definiamo

$$v \otimes w := \otimes(v, w).$$

Gli elementi di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ del tipo $v \otimes w$ si dicono *semplici*.

PROPOSIZIONE 1.2. *Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di W. Allora $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Pertanto,*

$$\dim(V \otimes_{\mathbb{K}} W) = (\dim V) \cdot (\dim W).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e sia $\{w_1^*, \ldots, w_m^*\}$ la base di W^* duale di $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Sia $f \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Poniamo $a_{ij} := f(v_i^*, w_j^*)$. Sia poi

$$g := \sum_{k=1,\ldots,n;h=1,\ldots,m} a_{kh} v_k \otimes w_h.$$

Allora per definizione si ha

$$g(v_i^*, w_j^*) = \sum_{k,h} a_{kh} v_k \otimes w_h(v_i^*, w_j^*) = \sum_{k,h} a_{kh} v_i^*(v_k) w_j^*(w_h) = \sum_{k,h} a_{kh} \delta_{ik} \delta_{jh} = a_{ij}.$$

Pertanto $f(v_i^*, w_j^*) = g(v_i^*, w_j^*)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$ e per bilinearità $f = g$. Dunque, $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ è un sistema di generatori per $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Sia ora $0 = \sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j$. Applicando tale identità all'elemento (v_h^*, w_k^*) si ottiene $\lambda_{hk} = 0$ per ogni $h = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$, il che prova che $\{v_i \otimes w_j\}_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m}$ sono linearmente indipendenti e dunque formano una base. $\square$

Dalla proposizione precedente segue che ogni elemento di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ si esprime come combinazione lineare di elementi semplici. Inoltre sempre dalla Proposizione 1.2 segue che $\mathsf{span}(\otimes(V \times W)) = V \otimes_{\mathbb{K}} W$.

PROPOSIZIONE 1.3 (Proprietà universale del prodotto tensoriale). *Siano U, V, W spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Sia $\phi : V \times W \to U$ una applicazione bilineare. Allora esiste una unica applicazione lineare $\hat{\phi} : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to U$ tale che $\phi = \hat{\phi} \circ \otimes$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni elemento in $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è combinazione lineare di elementi semplici, basta definire $\hat{\phi}$ sugli elementi semplici ed estenderla per linearità. Definiamo

$$\hat{\phi}(v \otimes w) := \phi(v, w).$$

Si verifica facilmente che $\hat{\phi}$ ha le proprietà richieste. $\square$

Caratterizziamo adesso il prodotto tensoriale tramite la proprietà universale data dalla proposizione precedente.

TEOREMA 1.4. *Siano V, W, P tre spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Supponiamo che esista $\pi : V \times W \to P$ applicazione bilineare tale che*

(1) $\mathsf{span}(\pi(V \times W)) = P$,
(2) *per ogni spazio vettoriale finito dimensionale U e ogni applicazione bilineare $\phi : V \times W \to U$ esiste una unica applicazione lineare $\tilde{\phi} : P \to U$ tale che $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi$.*

Allora esiste $\sigma : V \otimes W \to P$ isomorfismo tale che $\pi = \sigma \circ \otimes$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma := \hat{\pi} : V \otimes W \to P$ l'applicazione lineare definita dalla Proposizione 1.3. E sia $\tilde{\otimes} : P \to V \otimes W$ l'applicazione lineare data dalla proprietà (2) nelle ipotesi del teorema.

Proviamo che $\tilde{\otimes} \circ \sigma = \mathsf{id}_{V \otimes_{\mathbb{K}} W}$. Sia $t \in V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Poiché t è combinazione lineare di elementi semplici, possiamo scrivere $t = \sum v_j \otimes w_j$. Dunque, tenendo presente che $\sigma \circ \otimes = \hat{\pi} \circ \otimes = \pi$ e che $\tilde{\otimes} \circ \pi = \otimes$, si ha

$$\begin{aligned}\tilde{\otimes} \circ \sigma(t) &= \sum_j \tilde{\otimes} \circ \sigma(v_j \otimes w_j) = \sum_j \tilde{\otimes} \circ \sigma \circ \otimes(v_j, w_j) = \sum_j \tilde{\otimes} \circ \pi(v_j, w_j) \\ &= \sum_j \otimes(v_j, w_j) = \sum v_j \otimes w_j = t.\end{aligned}$$

Pertanto σ è iniettiva. Poiché per definizione $\sigma(V \otimes_{\mathbb{K}} W) = \mathsf{span}(\pi(V \times W))$ e per la proprietà (1) nelle ipotesi del teorema, $\mathsf{span}(\pi(V \times W)) = P$, ne segue che σ è anche suriettiva. Da cui segue il risultato. $\square$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà:

(1) $V \otimes_{\mathbb{K}} W \simeq W \otimes_{\mathbb{K}} V$ (tramite $v \otimes w \mapsto w \otimes v$),
(2) $(V \otimes_{\mathbb{K}} W) \otimes_{\mathbb{K}} U \simeq V \otimes_{\mathbb{K}} (W \otimes_{\mathbb{K}} U)$ (tramite $(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u)$),
(3) $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \simeq V$ (tramite $v \otimes \lambda \mapsto \lambda v$).

In particolare grazie alla proprietà (2), si può parlare di prodotto tensoriale di più di due spazi vettoriali senza doversi preoccupare dell'ordine in cui tale prodotto viene preso. Ragionando come in Proposizione 1.2 si ha:

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano $V_1, \ldots, V_m$ degli spazi vettoriali finito dimensionali su $\mathbb{K}$. Allora $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V_m$ è isomorfo allo spazio delle forme r-multilineari su $V_1^* \times \ldots \times V_m^*$. Inoltre, per $h = 1, \ldots, m$ sia $\{v_1^h, \ldots, v_{n_h}^h\}$ una base di V_h. Allora $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V_m$ ha base data da $\{v_{j_1}^1 \otimes \ldots \otimes v_{j_m}^m\}$ al variare di $j_h \in \{1, \ldots, n_h\}$, $h = 1, \ldots, m$.*

ESEMPIO 1.6. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Si può definire $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $2n$. D'altra parte, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ data ponendo

$$\alpha(\sum_j v_j \otimes \lambda_j) := \sum_j v_j \otimes (\alpha\lambda_j),$$

per $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\sum_j v_j \otimes \lambda_j \in V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Allora per quanto visto, $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes i\}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. In particolare dunque $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1, v_1 \otimes i, \ldots, v_n \otimes i\}$ è un sistema di generatori di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Poiché $v \otimes i = i(v \otimes 1)$, risulta che $\{v_1 \otimes 1, \ldots, v_n \otimes 1\}$ generano $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Proviamo che essi sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$ e dunque sono una base di $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. In effetti, se

$\sum_{j=1}^n \lambda_j(v_j \otimes 1) = 0$, scrivendo $\lambda_j = x_j + iy_j$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^n (x_j(v_j \otimes 1) + y_j(v_j \otimes i)) = 0,$$

che implica $x_j = y_j = 0$ per ogni j.

Siano adesso V_1, V_2, W_1, W_2 spazi vettoriali finito dimensionali e siano $f_1 : V_1 \to W_1$, $f_2 : V_2 \to W_2$ applicazioni lineari. Si può definire una applicazione lineare

$$f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2 \to W_1 \otimes_{\mathbb{K}} W_2,$$

definendola sugli elementi semplici $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ tramite $f_1 \otimes f_2(v_1 \otimes v_2) := f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$ ed estendendola per linearità a tutto $V_1 \otimes_{\mathbb{K}} V_2$.

Sia $\mathcal{B}_i^V := \{v_1^i, \dots, v_{n_i}^i\}$ un base di V_i e $\mathcal{B}_i^W := \{w_1^i, \dots, w_{m_i}^i\}$ una base di W_i $(i = 1, 2)$. Sia $M_1 = (a_{ij})$ la matrice associata a f_1 nelle basi $\mathcal{B}_1^V$, $\mathcal{B}_1^W$ e similmente sia $M_2 = (b_{ij})$ la matrice associata a f_2 nelle basi $\mathcal{B}_2^V$, $\mathcal{B}_2^W$. Allora

$$f_1 \otimes f_2(v_i^1 \otimes v_j^2) = f_1(v_i^1) \otimes f_2(v_j^2) = \left(\sum_{k=1}^{m_1} a_{ki} w_k^1\right) \otimes \left(\sum_{h=1}^{m_2} b_{hj} w_h^2\right) = \sum_{h,k} a_{ki} b_{hj} w_k^1 \otimes w_h^2.$$

Pertanto, la matrice associata a $f_1 \otimes f_2$ nelle basi $\{v_1^1 \otimes v_1^2, \dots, v_1^1 \otimes v_{n_2}^2 \dots, v_{n_1}^1 \otimes v_{n_2}^2\}$ e $\{w_1^1 \otimes w_1^2, \dots, w_1^1 \otimes w_{m_2}^2, \dots, w_{m_1}^1 \otimes w_{m_2}^2\}$ è data dal prodotto di Kronecker $M_1 \otimes M_2$ definito tramite

$$M_1 \otimes M_2 := \begin{pmatrix} a_{11} M_2 & \dots & a_{1n_1} M_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1} M_2 & \dots & a_{m_1 n_1} M_2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSIZIONE 1.7. *Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$. Allora $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ è isomorfo a* $\mathsf{Hom}(V^*, W)$.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo una applicazione lineare $\Phi : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to \mathsf{Hom}(V^*, W)$ sugli elementi semplici (e poi estendiamola per linearità) tramite

$$\Phi(v \otimes w)(\varphi) := \varphi(v) w, \quad \forall \varphi \in V^*.$$

Verifichiamo che Φ è iniettiva. Sarà quindi l'isomorfismo richiesto poiché $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ e $\mathsf{Hom}(V^*, W)$ hanno le stesse dimensioni.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Sia $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \dots, v_n\}$. Allora $\{v_1 \otimes w_1, \dots, v_n \otimes w_m\}$ è una base di $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Per provare che Φ è iniettiva basta provare che $\{\Phi(v_1 \otimes w_1), \dots, \Phi(v_n \otimes w_m)\}$ sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathsf{Hom}(V^*, W)$. Sia $\sum a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j) = 0$ (qua 0 è il morfismo nullo da V^* in W). Allora per $k = 1, \dots, n$

$$0 = \sum_{ij} a_{ij} \Phi(v_i \otimes w_j)(v_k^*) = \sum_{ij} a_{ij} v_k^*(v_i) w_j = \sum_{ij} a_{ij} \delta_{ik} w_j = \sum_j a_{kj} w_j,$$

e questo implica $a_{kj} = 0$ per ogni k, j essendo $\{w_1, \ldots, w_m\}$ linearmente indipendenti. Pertanto Φ è iniettiva. $\square$

1.2. Algebra tensoriale di uno spazio vettoriale. Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale su $\mathbb{K}$. Si definisce $T^0(V) = \mathbb{K}$ e, per $r \in \mathbb{N}$, $r > 0$,

$$T^r(V) := \underbrace{V \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} V}_{r}.$$

Gli elementi di $T^r(V)$ si dicono *tensori controvarianti di grado* r. Similmente per $s \in \mathbb{N}$ si definisce

$$T_s(V) := T^s(V^*).$$

Gli elementi di $T_s(V)$ si chiamano *tensori covarianti di grado* s. Si pone poi

$$T^r_s(V) := T^r(V) \otimes_{\mathbb{K}} T_s(V).$$

DEFINIZIONE 1.8. Lo spazio vettoriale

$$T(V) := \bigoplus_{r \geq 0} T^r(V)$$

si dice l'*algebra tensoriale* di V.

L'algebra tensoriale di V^* si chiama anche l'algebra tensoriale duale di V, per definizione $T(V^*) = \bigoplus_{s \geq 0} T_s(V)$. Si ha poi l'*algebra tensoriale mista*

$$\mathbb{T}(V) := \bigoplus_{r \geq 0, s \geq 0} T^r(V) \otimes_{\mathbb{K}} T_s(V).$$

Presi $a, b \in T(V)$, se $a \in T^p(V)$ e $b \in T^q(V)$, allora si può definire in modo naturale il "prodotto" $a \otimes b \in T^{p+q}(V)$. Più precisamente, se $a = \sum v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p}$ e se $b = \sum v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_q}$, si definisce

$$a \otimes b := \sum v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p} \otimes v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_q}.$$

La dimostrazione del seguente risultato è semplice e viene lasciata per esercizio:

PROPOSIZIONE 1.9. *L'algebra tensoriale $T(V)$ munita del prodotto $\otimes$ ammette una naturale struttura di anello associativo, tale che, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e $a, b \in T(V)$ risulta*

$$\alpha(a \otimes b) = (\alpha a) \otimes b = a \otimes (\alpha b).$$

Uno spazio vettoriale che abbia una struttura di anello associativo per cui il prodotto per uno scalare è legato al prodotto di elementi dell'anello come nella proposizione precedente si chiama una *algebra*. Ciò giustifica la nomenclatura per $T(V)$.

In modo simile si vede che $T(V^*)$ è un'algebra. Similmente si può dotare $\mathbb{T}(V)$ della struttura di algebra ponendo $(v_1 \otimes w_1^*) \otimes (v_2 \otimes w_2^*) = v_1 \otimes v_2 \otimes w_1^* \otimes w_2^*$ per $v_1 \otimes w_1^* \in T^r_s(V)$ e $v_2 \otimes w_2^* \in T^p_q(V)$.

Siano $s, r > 0$ e siano $0 < i \leq r$ e $0 < j \leq s$. Si definisce una applicazione lineare $c_{ij} : T^r_s(V) \to T^{r-1}_{s-1}(V)$, detta *contrazione*, nel modo seguente (il simbolo ˆ significa rimosso):

$$c_{ij}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w_1^* \otimes \ldots \otimes w_s^*) := \\ w_j^*(v_i) v_1 \otimes \ldots \otimes \hat{v}_i \otimes \ldots \otimes v_r \otimes w_1^* \otimes \ldots \otimes \hat{w_j^*} \otimes \ldots \otimes w_s^*$$

ESEMPIO 1.10. Per la Proposizione 1.7 esiste un isomorfismo $\Phi : T_1^1(V) \to \mathsf{End}(V)$. Sia $f \in \mathsf{End}(V)$ Allora

$$\mathsf{tr}(f) = c_{11}(\Phi^{-1}(f)).$$

Infatti, sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V e sia $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base di V^* duale alla base scelta di V. Sia $M = (a_{ij})$ la matrice associata a f. Allora $\Phi^{-1}(f) = \sum_{ij} a_{ij} v_i \otimes v_j^*$, da cui si ha

$$c_{11}(\Phi^{-1}(f)) = \sum_{ij} a_{ij} c_{11}(v_i \otimes v_j^*) = \sum_{ij} a_{ij} v_j^*(v_i) = \sum_{ij} a_{ij} \delta_{ij} = \sum_i a_{ii} = \mathsf{tr}(f).$$

1.3. Algebra Esterna. Fissato $r \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\Sigma(r)$ il gruppo delle permutazioni su $\{1, \ldots, r\}$.

DEFINIZIONE 1.11. Per $\sigma \in \Sigma(r)$ definiamo $L_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ sugli elementi semplici tramite

$$L_\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)}$$

ed estendiamola per linearità.

OSSERVAZIONE 1.12. L'applicazione $L_\sigma : T^r(V) \to T^r(V)$ è un isomorfismo. Infatti data una base di $T^r(V)$ come nella Proposizione 1.5, si verifica facilmente che L_σ permuta gli elementi della base.

Dati $\sigma, \tau \in \Sigma(r)$ si ha

$$L_\tau \circ L_\sigma = L_{\tau\sigma}. \tag{1.1}$$

DEFINIZIONE 1.13. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce l'applicazione lineare $A_r : T^r(V) \to T^r(V)$ tramite

$$A_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma.$$

L'applicazione lineare $A := \oplus_{r \geq 0} A_r : T(V) \to T(V)$ si chiama l'*alternatore*.

Per definizione $A|_{T^r(V)} = A_r$. Osserviamo che per ogni $r \in \mathbb{N}$ e $\tau \in \Sigma(r)$ risulta

$$A_r \circ L_\tau = \mathsf{sgn}(\tau) A_r. \tag{1.2}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} A_r \circ L_\tau &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma \circ L_\tau \overset{(1.1)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_{\sigma\tau} \\ &= \mathsf{sgn}(\tau) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma\tau) L_{\sigma\tau} = \mathsf{sgn}(\tau) \frac{1}{r!} \sum_{\sigma\tau \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma\tau) L_{\sigma\tau} = \mathsf{sgn}(\tau) A_r. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 1.14. *Sia $A : T(V) \to T(V)$ l'alternatore. Allora $A^2 = A$. In particolare $\mathsf{Im}\, A = \ker(A - \mathsf{id})$ e $T(V) = \ker A \oplus \mathsf{Im}\, A$.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di A, occorre e basta provare che $A_r^2 = A_r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. Ma

$$A_r^2 = A_r \circ A_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) A_r \circ L_\sigma \overset{(1.2)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)\mathsf{sgn}(\sigma) A_r$$
$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} A_r = \frac{1}{r!} r! A_r = A_r.$$

Se $w \in \mathsf{Im}\, A$, allora esiste $w' \in T(V)$ tale che $Aw' = w$. Dunque $w = Aw' = A^2 w' = A(Aw') = Aw$ che prova che $Aw = w$. In altri termini $A|_{\mathsf{Im}\, A} = \mathsf{id}$ e $\mathsf{Im}\, A$ coincide con l'autospazio relativo all'autovalore 1. Pertanto $\mathsf{Im}\, A \cap \ker A = \{0\}$ e poiché ogni elemento $v \in V$ si può scrivere come $v = Av + (v - Av) \in \mathsf{Im}\, A + \ker A$, dunque $T(V) = \ker A \oplus \mathsf{Im}\, A$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.15. Se $r > n = \dim V$ allora $T^r(V) \subset \ker A$. Infatti, sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e sia $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}\}$ la base di $T^r(V)$ ottenuta al variare di $i_1, \ldots, i_r$ tra 1 e n. Proviamo che $A(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$ per ogni indice. Poiché $r > n$, esistono almeno due indici uguali, diciamo i_a, i_b. Sia $\tau \in \Sigma(r)$ la permutazione che scambia a con b e lascia fissi gli altri elementi. Per ogni permutazione $\sigma \in \Sigma(r)$ risulta dunque

$$L_\sigma(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = L_{\sigma\tau}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}),$$

ma le due permutazioni σ e $\sigma\tau$ hanno segno opposto. Pertanto $A_r(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$, come enunciato.

DEFINIZIONE 1.16. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$\Lambda^r(V) := \mathsf{Im}\, A_r = A(T^r(V)).$$

Gli elementi di $\Lambda^r(V)$ si dicono r-*forme*. Si definisce poi l'*algebra esterna* di V tramite

$$\Lambda(V) := \mathsf{Im}\, A = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r(V).$$

Per l'Osservazione 1.15, $\Lambda^r(V) = 0$ per $r > \dim V$. In particolare dunque

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{\dim V} \Lambda^r(V).$$

Sia adesso $\mathcal{I}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \otimes v$. In altre parole un elemento di $\mathcal{I}$ è una combinazione lineare finita di elementi del tipo $v_1 \otimes \ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots \otimes v_k$ in cui almeno due elementi consecutivi sono uguali.

LEMMA 1.17. $\ker A = \mathcal{I}$.

DIMOSTRAZIONE. Ragionando in modo analogo a quanto fatto nell'Osservazione 1.15 si vede che $\mathcal{I} \subseteq \ker A$.

Per provare il viceversa, sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{I}$ la proiezione canonica che ad un elemento $w \in T(V)$ associa la sua classe di equivalenza modulo $\mathcal{I}$. Poiché $\mathcal{I}$ è un ideale, $T(V)/\mathcal{I}$ possiede una struttura di anello associativo, il cui prodotto denotiamo con $\times$, e π è un omomorfismo suriettivo di anelli. Dati $v, w \in V$, si ha

$$\begin{aligned} 0 =& \pi((v+w)\otimes(v+w)) = \pi(v\otimes v + v\otimes w + w\otimes v + w\otimes w) \\ &= \pi(v\otimes v) + \pi(v\otimes w) + \pi(w\otimes v) + \pi(w\otimes w) = \pi(v)\times\pi(w) + \pi(w)\times\pi(v), \end{aligned}$$

da cui segue che $\pi(v)\times\pi(w) = -\pi(w)\times\pi(v)$.

Pertanto, fissato $r \in \mathbb{N}$ e dati $\sigma \in \Sigma(r)$ e $v_1, \ldots, v_r \in V$, si ha

$$\begin{aligned} \pi(v_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(r)}) &= \pi(v_{\sigma(1)})\times\ldots\times\pi(v_{\sigma(r)}) \\ &= \mathsf{sgn}(\sigma)\pi(v_1)\times\ldots\times\pi(v_r) = \mathsf{sgn}(\sigma)\pi(v_1\otimes\ldots\otimes v_r). \end{aligned}$$

Ovvero, $\pi\circ L_\sigma = \mathsf{sgn}(\sigma)\pi$. Dunque,

$$\pi\circ A_r = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)\pi\circ L_\sigma = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)^2\pi = \pi.$$

Questo prova che $\ker A \subseteq \ker\pi = \mathcal{I}$. □

COROLLARIO 1.18. *Sia $w \in T(V)$ e sia $v \in \ker A$. Allora $w\otimes v \in \ker A$ e $v\otimes w \in \ker A$.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti per il Lemma 1.17 risulta $\ker A = \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ è un ideale bilatero (dunque chiuso per moltiplicazione a destra e sinistra nell'anello $T(V)$. □

OSSERVAZIONE 1.19. Si noti che $A_r(v_1\otimes\ldots\otimes v_r) = 0$ se $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$. Infatti, sia $\sigma\in\Sigma(r)$ una permutazione tale che $\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$. Allora per il Lemma 1.17 e per la (1.2)

$$0 = A_r(v_{\sigma(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\sigma(r)}) = \mathsf{sgn}(\sigma)A_r(v_1\otimes\ldots\otimes v_r).$$

Si può dare una struttura di anello associativo (di fatto algebra) su $\Lambda(V)$ definendo un prodotto (detto *prodotto esterno*) nel modo seguente: siano $v, w \in \Lambda(V)$, allora

$$v\wedge w := A(v\otimes w).$$

Si osservi che la definizione è ben posta, poiché $\Lambda(V) = \mathsf{Im}\, A \subset T(V)$ e dunque è ben definito $a\otimes b$ per $a, b\in\Lambda(V)$. Tale prodotto potrebbe non stare in $\Lambda(V)$ e applichiamo dunque A la cui immagine è proprio $\Lambda(V)$.

PROPOSIZIONE 1.20. *Lo spazio vettoriale $\Lambda(V)$ con il prodotto $\wedge$ è un anello associativo tale che, per ogni $\alpha\in\mathbb{K}$ e $a, b\in\Lambda(V)$ risulta*

$$\alpha(a\wedge b) = (\alpha a)\wedge b = a\wedge(\alpha b).$$

DIMOSTRAZIONE. Per provare che $\Lambda(V)$ è un anello associativo, essendo già un gruppo abeliano rispetto alla somma, occorre e basta provare che $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ per $a, b, c \in \Lambda(V)$ e che valgono le proprietà distributive rispetto alla somma: $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$ e $(a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$. Le proprietà distributive sono di immediata verifica poiché $\otimes$ è bilineare e A è lineare. Per verificare l'associatività, si nota che, dati $a, b, c \in \Lambda(V)$ risulta

$$A(A(a \otimes b) \otimes c) = A(a \otimes b \otimes c). \tag{1.3}$$

Infatti, per la Proposizione 1.14 risulta $a \otimes b = A(a \otimes b) + v$ con $A(v) = 0$. Dunque

$$A(a \otimes b \otimes c) = A((A(a \otimes b) + v) \otimes c) = A(A(a \otimes b) \otimes c) + A(v \otimes c),$$

e $A(v \otimes c) = 0$ per il Corollario 1.18. Similmente

$$A(a \otimes A(b \otimes c)) = A(a \otimes b \otimes c). \tag{1.4}$$

Dalle (1.3) e (1.4) si ha

$$a \wedge (b \wedge c) = A(a \otimes A(b \otimes c)) = A(a \otimes b \otimes c) = A(A(a \otimes b) \otimes c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

Infine dalla bilinearità di $\otimes$ e dalla linearità di A si verifica facilmente che per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e $a, b \in \Lambda(V)$ vale $\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b)$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.21. *L'algebra esterna $\Lambda(V)$ è isomorfa come anello associativo all'anello $T(V)/\mathcal{I}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 1.14, risulta $T(V) = \mathsf{Im}\, A \oplus \ker A$. Pertanto (come isomorfismo di spazi vettoriali)

$$\Lambda(V) \simeq T(V)/\ker A.$$

Per il Lemma 1.17 si ha $\ker A = \mathcal{I}$, e dunque risulta $\Lambda(V) \simeq T(V)/\mathcal{I}$ come spazi vettoriali. Sia $\rho : \Lambda(V) \to T(V)/\mathcal{I}$ tale isomorfismo. Proviamo che ρ è anche un isomorfismo di anelli. Per questo occorre e basta verificare che

$$\rho(a \wedge b) = \rho(a) \times \rho(b),$$

per ogni $a, b \in \Lambda(V)$, essendo $\times$ il prodotto in $T(V)/\mathcal{I}$. Sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{I}$. Per definizione di ρ, si ha $\rho(A(a)) = \pi(a)$. Pertanto

$$\rho(a \wedge b) = \rho(A(a \otimes b)) = \pi(a \otimes b) = \pi(a) \times \pi(b) = \rho(A(a)) \times \rho(A(b)) = \rho(a) \times \rho(b),$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$

PROPOSIZIONE 1.22. *Siano $a \in \Lambda^p(V)$ e $b \in \Lambda^q(V)$. Allora*

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché ogni elemento di $\Lambda(V)$ è combinazione lineare di immagini mediante A di elementi semplici, occorre e basta provare la proposizione per $a = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ e $b = w_1 \wedge \ldots \wedge w_q$.

Osserviamo preliminarmente che, dati $v, w \in V$, dalla dimostrazione del Lemma 1.17 si vede che $\pi(v) \times \pi(w) = -\pi(w) \times \pi(v)$ in $T(V)/\mathcal{I}$. Essendo $T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$ come anelli, per la Proposizione 1.21 risulta che, dati $v, w \in \Lambda^1(V)$ si ha $v \wedge w = -w \wedge v$. Ma allora, utilizzando l'associatività del prodotto $\wedge$,

$$\begin{aligned}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) &= v_1 \wedge \ldots \wedge (v_p \wedge w_1) \wedge \ldots \wedge w_q \\ &= -v_1 \wedge \ldots \wedge (w_1 \wedge v_p) \wedge \ldots \wedge w_q = \ldots \\ &= (-1)^p w_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_q = \ldots \\ &= (-1)^{pq} (w_1 \wedge \ldots \wedge w_q) \wedge (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p),\end{aligned}$$

e la dimostrazione è conclusa. □

COROLLARIO 1.23. *Risulta* $a \wedge a = 0$ *per ogni* $a \in \Lambda^{2r+1}(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione precedente si ha

$$a \wedge a = (-1)^{(2r+1)^2} a \wedge a = -a \wedge a,$$

da cui segue $a \wedge a = 0$. □

OSSERVAZIONE 1.24. Se $\alpha \in \Lambda^{2r}(V)$, in generale, $\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Ad esempio, se $\{v_1, \ldots, v_4\}$ sono vettori linearmente indipendenti in V, posto $\alpha = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$, si ha (si veda il Corollario 1.29)

$$(v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) \wedge (v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4) = 2 v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_4 \neq 0.$$

DEFINIZIONE 1.25. Una forma r-multilineare f su V^* si dice *alternante* se per ogni $\sigma \in \Sigma(r)$ vale

$$f(v^*_{\sigma(1)}, \ldots, v^*_{\sigma(r)}) = \mathsf{sgn}(\sigma) f(v^*_1, \ldots, v^*_r).$$

Chiaramente, l'insieme delle forme r-multilineari alternanti su V^* forma un sottospazio dello spazio delle forme r-multilineari su V^*. Ricordiamo che $T^r(V)$ è identificato con lo spazio delle forme r-multilineari su V^*.

TEOREMA 1.26. $\Lambda^r(V) \subset T^r(V)$ *è identificato con il sottospazio delle forme* r*-multilineari alternanti su* V^**. Inoltre, se* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è una base di* V*, allora* $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n}$ *è una base di* $\Lambda^r(V)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché gli elementi di $\Lambda^r(V)$ sono combinazione lineare di immagini mediante A di elementi semplici, occorre e basta provare che elementi del tipo $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ danno luogo a forme r-multilineari alternanti su V^*. Dato $\tau \in \Sigma(r)$, ricordando che $A \circ L_\tau = \mathsf{sgn}(\tau) A$, si ha

$$\begin{aligned}
&(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)}) = A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)})\\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma)(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(r)})(w^*_{\tau(1)}, \ldots, w^*_{\tau(r)})\\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) w^*_{\tau(1)}(v_{\sigma(1)}) \ldots w^*_{\tau(r)}(v_{\sigma(r)})\\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) w^*_1(v_{\sigma(\tau^{-1}(1))}) \ldots w^*_r(v_{\sigma(\tau^{-1}(r))})\\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) L_\sigma(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(r)})(w^*_1, \ldots, w^*_r)\\
&= A(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau^{-1}(r)})(w^*_1, \ldots, w^*_r) = \mathsf{sgn}(\tau^{-1}) A(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r)(w^*_1, \ldots, w^*_r)\\
&= \mathsf{sgn}(\tau)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r)(w^*_1, \ldots, w^*_r),
\end{aligned}$$

pertanto $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ è una forma alternante.

Proviamo adesso che ogni forma r-multilineare alternante su V^* proviene da una r-forma di V. Per farlo, osserviamo preliminarmente che $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n}$ è una base di $\Lambda^r(V)$. Infatti, poiché $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}\}$ al variare di $i_1, \ldots, i_r$ in $\{1, \ldots, n\}$ formano una base di $T(V)$, la loro immagine mediante A_r è un insieme di generatori di $\Lambda^r(V)$. Ma, dato che $A_r(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) = 0$ se $i_l = i_m$ per qualche $i \neq m$ (per l'Osservazione 1.19) e dato che $A_r \circ L_\sigma = \mathsf{sgn}(\sigma) A_r$, risulta che in effetti $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n}$ è un insieme di generatori di $\Lambda^r(V)$. Per provare che tali elementi sono linearmente indipendenti, supponiamo che

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r} = 0.$$

Sia $\{v^*_1, \ldots, v^*_n\}$ la base di V^* duale di $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Fissati $1 \le k_1 < \ldots < k_r \le n$, si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}(v^*_{k_1}, \ldots, v^*_{k_r})\\
&= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} v^*_{k_1}(v_{i_1}) \ldots v^*_{k_r}(v_{i_r}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} \lambda_{i_1 \ldots i_r} \delta_{k_1 i_1} \ldots \delta_{k_r i_r} = \lambda_{k_1 \ldots k_r}.
\end{aligned}$$

Ciò prova che $\{v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}\}_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n}$ sono linearmente indipendenti.

Sia ora φ una forma r-multilineare alternante su V^*. Per $1 \le k_1 < \ldots < k_r \le n$ poniamo $a_{k_1 \ldots k_r} := \varphi(v^*_{k_1}, \ldots, v^*_{k_r})$. Si noti che, poiché la forma φ è alternante, per ogni $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$\varphi(v^*_{i_1}, \ldots, v^*_{i_r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists l \neq m \text{ tali che } i_l = i_m \\ \mathsf{sgn}(\sigma) a_{k_1 \ldots k_r} & \text{se } \exists \sigma \in \Sigma(r) : \sigma(i_j) = k_j \text{ e } 1 \le k_1 < \ldots < k_r \le n \end{cases}$$

Poniamo ora $f := r! \sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} a_{k_1\ldots k_r} v_{k_1}\wedge\ldots\wedge v_{k_r}$. Siano $i_1,\ldots,i_r\in\{1,\ldots,n\}$ fissati. Si osservi che se $i_l = i_m$ per qualche $m\neq l$, allora $f(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r}) = 0$. Supponiamo dunque $i_l\neq i_m$ per $l\neq m$. Allora esistono unici degli indici $1\le \tilde{k}_1<\ldots<\tilde{k}_r\le n$ ed esiste una unica permutazione $\tilde\sigma\in\Sigma(r)$ tale che $\tilde\sigma(\tilde{k}_j) = i_j$ $(j=1,\ldots,r)$. Pertanto:

$$\begin{aligned}
f(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r}) &= r!\sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} a_{k_1\ldots k_r} v_{k_1}\wedge\ldots\wedge v_{k_r}(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r})\\
&= r!\sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} a_{k_1\ldots k_r} A(v_{k_1}\otimes\ldots\otimes v_{k_r})(v^*_{i_1},\ldots,v^*_{i_r})\\
&= r!\sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} a_{k_1\ldots k_r}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)}\mathsf{sgn}(\sigma) v^*_{i_1}(v_{\sigma(k_1)})\ldots v^*_{i_r}(v_{\sigma(k_r)})\\
&= r!\sum_{1\le k_1<\ldots<k_r\le n} a_{k_1\ldots k_r}\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\Sigma(r)}\mathsf{sgn}(\sigma)\delta_{i_1\sigma(k_1)}\ldots\delta_{i_r\sigma(k_r)} = r! a_{\tilde{k}_1\ldots\tilde{k}_r}\frac{1}{r!}\mathsf{sgn}(\tilde\sigma)\\
&= \mathsf{sgn}(\tilde\sigma) a_{\tilde{k}_1\ldots\tilde{k}_r}.
\end{aligned}$$

Pertanto $f=\varphi$ (essendo uguali sugli elementi di una base di V^* ed essendo multilineari). Ciò prova il teorema. □

OSSERVAZIONE 1.27. Nel corso della dimostrazione precedente si è visto che, se $a\in\Lambda^p(V), b\in\Lambda^q(V)$ allora

$$a\wedge b(w^*_1,\ldots,w^*_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\Sigma(p+q)}\mathsf{sgn}(\sigma) a(w^*_{\sigma(1)},\ldots,w^*_{\sigma(p)}) b(w^*_{\sigma(p+1)},\ldots,w^*_{\sigma(p+q)})$$

Come corollario immediato del teorema precedente si ha il calcolo della dimensione dello spazio delle r-forme:

COROLLARIO 1.28. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$. Allora per $0\le r\le n$ si ha $\dim\Lambda^r(V) = \binom{n}{r}$. Inoltre $\dim\Lambda(V) = 2^n$.*

COROLLARIO 1.29. *Siano $v_1,\ldots,v_r\in V$. Allora $\{v_1,\ldots,v_r\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_1\wedge\ldots\wedge v_r\neq 0$ in $\Lambda^r(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\{v_1,\ldots,v_r\}$ sono linearmente indipendenti allora si può completare l'insieme ad una base di V e dunque per il teorema precedente $v_1\wedge\ldots\wedge v_r$ è un elemento di una base di $\Lambda^r(V)$ e pertanto non è zero. Viceversa, supponiamo che $\{v_1,\ldots,v_r\}$ siano linearmente dipendenti. A meno di cambiare l'ordine possiamo supporre $v_1 = \sum_{j=2}^r \lambda_j v_j$. Ma allora

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_r = \sum_{j=2}^r \lambda_j v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r = 0$$

poiché, per $j=2,\ldots,n$, si ha

$$v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r = \pm v_j\wedge v_j\wedge v_2\wedge\ldots\wedge\hat{v}_j\wedge\ldots\wedge v_n = A(v_j\otimes v_j\otimes v_2\otimes\ldots\otimes\hat{v}_j\otimes\ldots\otimes v_n) = 0$$

per la Proposizione 1.22 e il Lemma 1.17. □

Sia adesso $f : V \to V$ una applicazione lineare. Come visto in precedenza f si estende ad un endomorfismo (che chiamiamo sempre $f : T(V) \to T(V)$) che è anche un omomorfismo di anelli. Pertanto definisce un omomorfismo $T(V) \to T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$ tramite la composizione $\pi \circ f$. Ora, $f(v \otimes v) := f(v) \otimes f(v)$. Pertanto $f(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$. E dunque $\pi \circ f$ definisce un omomorfismo di anelli (che denotiamo sempre con la stessa lettera) $f : \Lambda(V) \simeq T(V)/\mathcal{I} \to T(V)/\mathcal{I} \simeq \Lambda(V)$. In altri termini sugli elementi semplici f è definita da

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = A(f(v_1) \otimes \ldots \otimes f(v_r)) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_r).$$

PROPOSIZIONE 1.30. *Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e M è la matrice associata ad f in tale base, risulta*

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \det(M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $M = (a_{ij})$. Dunque

$$f(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = f(v_1) \wedge \ldots \wedge f(v_n) = \left(\sum_{h=1}^{n} a_{h1} v_h \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{h=1}^{n} a_{hn} v_h \right)$$

$$= \sum_{h_1, \ldots, h_n = 1}^{n} a_{h_1 1} \ldots a_{h_n n} v_{h_1} \wedge \ldots \wedge v_{h_n} = \sum_{\sigma \in \Sigma(n)} \mathsf{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} v_1 \wedge \ldots \wedge v_n.$$

□

COROLLARIO 1.31. *Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Siano $w_1, \ldots, w_n \in V$. Supponiamo che $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Sia $M = (a_{ij})$. Allora $w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = \det(M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $f : V \to V$ definita tramite $f(v_j) = w_j$ per $j = 1, \ldots, n$ e si estenda a V per linearità. Il risultato segue allora dalla proposizione precedente. □

1.4. Algebra Simmetrica.

DEFINIZIONE 1.32. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce l'applicazione lineare $S_r : T^r(V) \to T^r(V)$ tramite

$$S_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} L_\sigma.$$

L'applicazione lineare $S := \oplus_{r \geq 0} S_r : T(V) \to T(V)$ si chiama il *simmetrizzatore*.

PROPOSIZIONE 1.33. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $S_r \circ L_\sigma = L_\sigma \circ S_r = S_r$ *per ogni* $\sigma \in \Sigma(r)$.
(2) $S^2 = S$
(3) $S_r \circ A_r = A_r \circ S_r = 0$ *per* $r \geq 2$.

DIMOSTRAZIONE. (1) è ovvia. (2) segue subito da (1) poiché

$$S_r \circ S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} L_\sigma \circ S_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} S_r = S_r.$$

Per la (3), si ha

$$S_r \circ A_r = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) S_r \circ L_\sigma \overset{(1)}{=} \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) S_r = S_r \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) = 0,$$

dove si è usato il fatto che per $r \geq 2$ il numero delle permutazioni pari è uguale al numero delle permutazioni dispari e pertanto $\sum_{\sigma \in \Sigma(r)} \mathsf{sgn}(\sigma) = 0$. Similmente si prova che $A_r \circ S_r = 0$. □

OSSERVAZIONE 1.34. Per $r = 1$ risulta $A_1(v) = S_1(v) = v$.

COROLLARIO 1.35. $T(V) = \mathsf{Im}\, S \oplus \ker S$. *Inoltre* $\mathsf{Im}\, S = \ker(S - \mathsf{id})$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla (2) della proposizione precedente si ha $S^2 = S$. La prova è quindi del tutto analoga a quella della Proposizione 1.14 e la omettiamo. □

Sia $\mathcal{K}$ l'ideale bilatero di $T(V)$ generato dagli elementi della forma $v \wedge w$. In altri termini, $\mathcal{K}$ è l'ideale bilatero generato da $\mathsf{Im}\, A_2 = \Lambda^2(V)$ in $T(V)$.

LEMMA 1.36. $\ker S = \mathcal{K}$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento è simile a quello della prova del Lemma 1.17 e quindi ne diamo velocemente l'idea. Si vede facilmente che $\mathcal{K} \subseteq \ker S$.

Per il viceversa, sia $\pi : T(V) \to T(V)/\mathcal{K}$ la proiezione canonica e sia $\times$ la moltiplicazione in $T(V)/\mathcal{K}$. Dalla

$$0 = \pi(v \wedge w) = \pi(A(v \otimes w)) = \frac{1}{2}(\pi(v \otimes w) - \pi(w \otimes v)),$$

si ricava che $T(V)/\mathcal{K}$ è un anello commutativo. Da cui $\pi \circ S = \pi$ e pertanto $\ker S \subseteq \mathcal{K}$. □

DEFINIZIONE 1.37. Sia $r \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$S^r(V) := \mathsf{Im}\, S_r = S(T^r(V)).$$

Gli elementi di $S^r(V)$ si dicono *r-tensori simmetrici*. Si definisce poi l'*algebra simmetrica* di V tramite

$$S(V) := \mathsf{Im}\, S = \bigoplus_{r \geq 0} S^r(V).$$

Si può definire un prodotto su $S(V)$ tramite

$$a \odot b := S(a \otimes b),$$

essendo $a, b \in S(V)$.

Utilizzando il Lemma 1.36 si prova il seguente risultato similmente a quanto fatto per l'alternatore:

TEOREMA 1.38. *Il prodotto $\odot$ rende $S(V)$ un anello associativo commutativo, isomorfo a $T(V)/\mathcal{K}$.*

In modo simile a quanto fatto per le r-forme, si può dimostrare che gli r-tensori simmetrici coincidono con le forme r-multilineari simmetriche su V^*. Dove, una forma r-multilineare f su V^* si dice *simmetrica* se $f(v^*_{\sigma(1)}, \dots, v^*_{\sigma(r)}) = f(v^*_1, \dots, v^*_r)$ per ogni $\sigma \in \Sigma(r)$. Pertanto:

TEOREMA 1.39. *$S^r(V) \subset T^r(V)$ è identificato con il sottospazio delle forme r-multilineari simmetriche su V^*. Inoltre, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $\{v_{i_1} \odot \dots \odot v_{i_r}\}_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n}$ è una base di $S^r(V)$.*

Come conseguenza si ha che $\dim S^r(V) = \binom{n+r-1}{r}$ e che $S(V)$ ha dimensione infinita.

Dalla Proprietà (3) della Proposizione 1.33 segue anche che $\Lambda(V) \subset \ker S$ e $S(V) \subset \ker A$, ma, per $r \geq 3$, $\ker S_r$ è strettamente più grande di $\Lambda^r(V)$. Infatti $\ker S_r$ contiene elementi del tipo $v \wedge w \otimes u \otimes \dots \otimes u$ che non stanno in $\Lambda^r(V)$. Similmente $\ker A_r$ è strettamente più grande di $S^r(V)$. Per $r = 2$ invece $\ker S_2 = \Lambda^2(V)$ (per il Lemma 1.36) e dunque:

PROPOSIZIONE 1.40. $T^2(V) = \Lambda^2(V) \oplus S^2(V)$.

Pertanto, tenuto conto che le 2-forme corrispondono a forme bilineari alternanti su V^* e i 2-tensori simmetrici corrispondono a forme bilineari simmetriche su V^*, si ha che *ogni forma bilineare su V^* si può scrivere in modo unico come somma diretta di una forma bilineare alternante e di una forma bilineare simmetrica* (ma lo stesso non vale per forme r-multilineari su V^* con $r \geq 3$).

Ricordiamo che un polinomio omogeneo di grado k su V è una funzione $p : V \to \mathbb{K}$ tale che per ogni $v_1, \dots, v_k \in V$ fissati, per $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, la funzione $\mathbb{R}^k \ni (t_1, \dots, t_k) \mapsto p(t_1 v_1 + \dots + t_k v_k)$ è un polinomio, e che $p(\lambda v) = \lambda^k p(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. L'insieme dei polinomi omogenei di grado k su V (compreso il polinomio identicamente nullo che è omogeneo di ogni grado) si indica con $P_k(V)$ ed è in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Definiamo

$$P(V) := \bigoplus_{k \geq 0} P_k(V).$$

Allora $P(V)$ ammette una naturale struttura di anello associativo commutativo tramite

$$(p \cdot q)(v) := p(v)q(v) \quad v \in V, p, q \in P(V).$$

TEOREMA 1.41. *$S(V^*)$ è isomorfo come anello a $P(V)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $\Phi : T(V^*) \to P(V)$ nel modo seguente. Dato $w \in T^r(V^*)$, ricordiamo che w può essere visto come una forma r-multilineare su $(V^*)^* = V$. Dunque possiamo definire $\Phi(w) \in P(V)$ tramite

$$\Phi(w)(v) := w(v, \dots, v).$$

Poiché w è r-multilineare, è chiaro che $\Phi(w) \in P_r(V)$ e si verifica facilmente che Φ è un morfismo di anelli. Asseriamo che $\Phi(S(w)) = \Phi(w)$ (il che prova che $\ker S \subseteq \ker \Phi$). Infatti, sugli elementi semplici si ha

$$\Phi(S_r(w_1^* \otimes \ldots \otimes w_r^*))(v) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} w_{\sigma(1)}^* \otimes \ldots \otimes w_{\sigma(r)}^*(v, \ldots, v)$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \Sigma(r)} w_{\sigma(1)}^*(v) \ldots w_{\sigma(r)}^*(v) = w_1^*(v) \ldots w_r^*(v) = \Phi(w_1^* \otimes \ldots \otimes w_r^*)(v).$$

D'altra parte, se $p \in P_r(V)$, fissati $v_1, \ldots, v_r \in V$, espandiamo rispetto a $t_1, \ldots, t_r$ l'espressione $p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r)$. Poiché p è omogeneo di grado r si ottiene:

$$p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) = \sum_{j_1 + \ldots + j_r = r} T_{j_1 \ldots j_r}(v_1, \ldots, v_r) t_1^{j_1} \ldots t_r^{j_r}$$

Poniamo allora

$$\Psi(p)(v_1, \ldots, v_r) := \frac{1}{r!} T_{1 \ldots 1}(v_1, \ldots, v_r). \tag{1.5}$$

Verifichiamo che $\Psi(p)$ è r-multilineare. Per farlo, fissiamo una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V. Allora possiamo scrivere

$$p(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

essendo $a_{i_1 \ldots i_n} \in \mathbb{K}$. Si ha pertanto $v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i$ per opportuni $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Dunque

$$t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{ij} \right) e_i,$$

da cui si ha

$$p(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) = p\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{ij} \right) e_i \right)$$

$$= \sum_{i_1 + \ldots + i_n = r} a_{i_1 \ldots i_n} \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{1j} \right)^{i_1} \ldots \left(\sum_{j=1}^r t_j \alpha_{nj} \right)^{i_n}.$$

Da qui segue facilmente che per ogni fissato $j = 1, \ldots, r$, il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ è lineare in α_{ij} per $i = 1, \ldots, n$. Questo significa esattamente che $\Psi(p)$ è r-multilineare.

Verifichiamo adesso che, se $p \in P_k(V)$ allora $\Phi(\Psi(p)) = p$. Infatti, dato $v \in V$ si ha $\Phi(\Psi(p))(v) = \Psi(p)(v, \ldots, v)$. Per definizione $r!\Psi(p)(v, \ldots, v)$ è il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ nella espansione di $p(t_1 v + \ldots + t_r v)$. Per l'omogeneità si ha:

$$p(t_1 v + \ldots + t_r v) = p((t_1 + \ldots + t_r)v) = (t_1 + \ldots + t_r)^r p(v),$$

da cui segue subito che il coefficiente di $t_1 \ldots t_r$ è $r!p(v)$ e pertanto $\Phi(\Psi(p))(v) = p(v)$.

Questo prova che Φ è suriettiva ed è pertanto un isomorfismo da $T(V)/\ker \Phi \to P(V)$, la cui inversa è data da Ψ.

Per concludere la dimostrazione, visto che sappiamo già che $\ker S \subseteq \ker \Phi$, occorre e basta provare che $\ker \Phi \subseteq \ker S$.

A tal fine, verifichiamo che si ha $\Psi(\Phi(w)) = w$ se $w \in S^r(V^*)$. Utilizzando la multilinearità di w si ha

$$\begin{aligned}\Phi(w)(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r) &= w(t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r, \ldots, t_1 v_1 + \ldots + t_r v_r)\\ &= \sum_{i_1+\ldots+i_r=r} t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r} w(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}).\end{aligned}$$

Da cui, il termine $T_{1\ldots1}(v_1, \ldots, v_r)$, per la simmetria di w, è dato da

$$T_{1\ldots1}(v_1, \ldots, v_r) = \sum_{\sigma\in\Sigma(r)} w(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = r! w(v_1, \ldots, v_r).$$

Pertanto $\Psi(\Phi(w)) = w$ se $w \in S^r(V^*)$. □

La formula (1.5) si dice *formula di polarizzazione*.

2. Cenni sulle proprietà locali delle funzioni olomorfe

In $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$ siano fissate coordinate standard $(z_1, \ldots, z_N)$. Sia U un aperto in $\mathbb{C}^N$. Per una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ di classe C^1 si definisce l'operatore formale

$$\overline{\partial} f := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j,$$

dove, se $x_j = \mathsf{Re}\, z_j$ e $y_j = \mathsf{Im}\, z_j$, definiamo $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$.

DEFINIZIONE 2.1. Sia U un aperto di $\mathbb{C}^N$, $N \geq 1$. Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ di classe C^1 si dice *olomorfa* in U se $\overline{\partial} f \equiv 0$ in U.

In particolare dunque una funzione f è olomorfa se e solo se $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} f = 0$ per $j = 1, \ldots, N$.

Se $Z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, denotiamo con $Z''_j = (z_1, \ldots, z_{j-1}, \hat{z}_j, z_{j+1}, \ldots, z_N)$ la $(N-1)$-upla di coordinate ottenuta rimuovendo z_j da Z. Per comodità, indicheremo $f(Z) = f(Z''_j, z_j)$.

Dalla teoria delle funzioni olomorfe in una variabile, si ricava facilmente la seguente:

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia U un aperto in $\mathbb{C}^N$ e sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) *f è olomorfa in U.*
(2) *Per ogni $j \in \{1, \ldots, N\}$ la funzione $z_j \mapsto f(Z''_j, z_j)$ è olomorfa laddove è definita.*
(3) *(equazioni di Cauchy-Riemann) Se $f(Z) = u(Z) + iv(Z)$ con $u, v : U \to \mathbb{R}$, si ha per ogni $j = 1, \ldots, N$*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= \frac{\partial v}{\partial y_j} \\ \frac{\partial u}{\partial y_j} &= -\frac{\partial v}{\partial x_j} \end{cases}$$

DEFINIZIONE 2.3. Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$. Si indica con $\mathcal{O}(U)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe definite su U.

Sia U un aperto in $\mathbb{C}^N$. Una funzione $F : U \to \mathbb{C}^m$ di classe C^1 si dice *olomorfa* se ogni sua componente è olomorfa. Per la regola della catena, la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa.

Sia $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}$ con $r_j > 0$ per ogni j. Sia $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Definiamo il *polidisco* $P(a, r)$ di centro a e multi-raggio r

$$P(a, r) := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Il *bordo di Shilov* di $P(a, r)$ è definito da $\partial_S P(a, r) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$. Il bordo di Shilov del polidisco è contenuto nella frontiera topologica del polidisco.

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$ e sia $f \in \mathcal{O}(U)$. Sia $P(a, r)$ un polidisco contenuto e relativamente compatto in U. Utilizzando la formula di Cauchy per funzioni olomorfe di una variabile e il teorema di Fubini, sia ha

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_S P(a,r)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_n) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n, \tag{2.1}$$

per ogni $z \in P(a, r)$.

Come conseguenza, sviluppando sotto il segno di integrale e utilizzando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ha che $f \in \mathcal{O}(U)$ è analitica, ovvero, per ogni $a \in U$ esiste un intorno V tale che per ogni $z \in V$ si ha

$$f(z) = \sum_{j_1, \dots, j_n = 1}^{\infty} a_{j_1 \dots j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \cdots (z_n - a_n)^{j_n} \tag{2.2}$$

con $a_{j_1 \dots j_n} \in \mathbb{C}$ e tale serie di potenze converge uniformemente in ogni compatto di V. Viceversa, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, ogni serie di potenze definita su un aperto di $\mathbb{C}^n$ e uniformemente convergente sui compatti di tale aperto è olomorfa.

Un vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ si chiama un *multi-indice*. La sua *lunghezza* è $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Se $f \in \mathcal{O}(U)$ poniamo

$$D^\alpha f(a) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(a).$$

Dalla (2.2) segue il seguente

TEOREMA 2.4 (Prolungamento analitico). *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso e sia $f \in \mathcal{O}(U)$.*

1. *Se esiste $a \in U$ tale che $D^\alpha f(a) = 0$ per ogni multi-indice α allora $f \equiv 0$.*
2. *Se $g \in \mathcal{O}(U)$ è tale che $f \equiv g$ su un aperto $V \subset U$ allora $f \equiv g$ su U.*
3. *$\mathcal{O}(U)$ è un dominio di integrità.*

DIMOSTRAZIONE. (1) basta verificare che l'insieme $\{z \in U : D^\alpha f(z) = 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ è aperto e chiuso in U. La chiusura è immediata, l'apertura segue dalla (2.2).

(2) segue da (1) applicato a $f - g \in \mathcal{O}(U)$.

(3) Se $f \cdot g \equiv 0$ e $f \not\equiv 0$, allora esiste un aperto $V \subset U$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in V$. Ma allora $g(z) = 0$ su V e per (2) $g \equiv 0$ su U. □

TEOREMA 2.5 (mappa aperta). *Siano $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso e $f \in \mathcal{O}(U)$. Se f non è costante allora è aperta.*

DIMOSTRAZIONE. Sia f non costante. Sia B una palla di centro a e raggio $\rho > 0$ contenuta in U. Proviamo che $f(B)$ è aperto in $\mathbb{C}$. Per il Teorema di prolungamento analitico, $f|_B$ non è costante. Dunque esiste $b \in B$ tale che $f(a) \neq f(b)$. Sia $v = \frac{b-a}{\|b-a\|}$. Si considera allora l'applicazione $\zeta \mapsto f(a + \zeta v)$ definita per $\zeta \in \mathbb{C}$ tale che $|\zeta| < \rho$. Questa è una funzione olomorfa di una variabile, non costante, e dunque è aperta per la teoria delle funzioni olomorfe di una variabile. □

Come corollario immediato si ha

TEOREMA 2.6 (Principio del massimo). *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto connesso. Sia $f \in \mathcal{O}(U)$. Sia $a \in U$. Se $|f|$ ha un massimo locale in a, allora f è costante.*

3. Varietà differenziabili e complesse

Ricordiamo che uno spazio topologico M si dice *paracompatto* se ogni suo ricoprimento di aperti $\{U_j\}$ ammette un raffinamento *localmente finito*, ovvero, esiste un ricoprimento di aperti $\{V_i\}$ di M tale che per ogni j esiste i con $V_i \subseteq U_j$ e per ogni $p \in M$ esiste un intorno W di p che interseca solo un numero finito di $\{V_i\}$.

Si può provare che se X è uno spazio topologico connesso, di Hasdorff e tale che per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U \ni x$ che è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ allora X è paracompatto se e solo se è a base numerabile [**3**, p. 171].

DEFINIZIONE 3.1. Uno spazio topologico M di Hausdorff, paracompatto si dice una *varietà differenziabile* di classe C^κ, $\kappa = 0, \dots, \infty, \omega$ (reale analitica) di dimensione n se esiste un ricoprimento di aperti $\{U_j\}_{j \in J}$ di M e degli omeomorfismi $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j)$, dove $\varphi_j(U_j)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ per ogni $j \in J$, tali che per ogni $j, k \in J$ con $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, risulta che l'applicazione

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_j \cap U_k) \to \varphi_j(U_j \cap U_k),$$

è di classe C^κ.

L'insieme delle coppie $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ si dice un *atlante* C^κ di M. Se $x \in U_j$, l'aperto U_j si dice un *intorno coordinato* di x. La coppia (U_j, φ_j) si chiama un *sistema di coordinate locali* (o *carta locale*), mentre l'applicazione $\varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j) \to U_j$ si dice una *parametrizzazione locale*.

In modo simile si può definire una *varietà complessa* (detta anche *varietà olomorfa*) di dimensione (complessa) n chiedendo che per ogni $j \in J$, $\varphi_j(U_j)$ sia un aperto di $\mathbb{C}^n$ e che $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_j \cap U_k) \to \varphi_j(U_j \cap U_k)$ sia olomorfa per ogni $j, k \in J$ con $U_j \cap U_k \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE 3.2. Se M è una varietà complessa di dimensione complessa n allora è anche una varietà differenziabile analitica reale di dimensione (reale) $2n$.

Più in generale si può definire una *varietà con bordo*. Per farlo, ricordiamo che se U è un aperto di $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, si dice che una applicazione $f : U \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile di classe C^k se per ogni $p \in U$ esiste un intorno aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ di p e una applicazione $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}^n$ differenziabile di classe C^k tale che $\tilde{f}|_{V \cap U} = f|_U$. Ricordiamo inoltre che se U, U' sono aperti di $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ e $f : U \to U'$ è un omeomorfismo, allora, ponendo $\partial U = U \cap \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ risulta che $f|_{\partial U} : \partial U \to \partial U'$ è un omeomorfismo e $f|_{U \setminus \partial U} : U \setminus \partial U \to U' \setminus \partial U'$ è un omeomorfismo.

Possiamo allora definire:

DEFINIZIONE 3.3. Uno spazio topologico M di Hausdorff, paracompatto si dice una *varietà differenziabile di dimensione* n *con bordo* di classe C^κ, $\kappa = 0, \ldots, \infty, \omega$ (reale analitica) di dimensione n se esiste un ricoprimento $\{U_j\}_{j \in J}$ di M e degli omeomorfismi $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j)$, dove $\varphi_j(U_j)$ è un aperto di $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0\}$ per ogni $j \in J$ tali che per ogni $j, k \in J$ con $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, risulta che l'applicazione

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_j \cap U_k) \to \varphi_j(U_j \cap U_k),$$

è di classe C^κ.

Diciamo che un punto p è un punto di bordo di una varietà con bordo M se esiste una carta locale $\varphi_j : U_j \to \varphi_j(U_j)$, dove $\varphi_j(U_j)$ è un aperto di $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0\}$ tale che $\varphi_j(p)$ ha coordinate $(0, x_2, \ldots, x_n)$. L'insieme dei punti del bordo di M si denota ∂M e si dice il *bordo di* M, il suo complementare $\overset{o}{M} = M \setminus \partial M$ si dice *l'interno di* M.

ESERCIZIO 3.4. Sia M una varietà di dimensione n con bordo. Provare che ∂M è una varietà (senza bordo) di dimensione $n-1$ e che $\overset{o}{M}$ è una varietà (senza bordo) di dimensione n.

Nel seguito il termine varietà indicherà sempre una varietà senza bordo. Inoltre in ciò che segue considereremo varietà differenziabili di classe C^∞ e varietà complesse. Pertanto, salvo quando esplicitamente detto, una varietà differenziabile sarà sempre di classe C^∞.

Sia M una varietà (differenziabile o complessa) e siano $\{(U_j, \varphi_j)\}$ e $\{(V_j, \phi_j)\}$ due atlanti per M. Tali atlanti si dicono *compatibili* se per ogni j, k tali che $U_j \cap V_k \neq \emptyset$ l'applicazione

$$\varphi_j \circ \phi_k^{-1} : \phi_k(U_j \cap V_k) \to \varphi_j(U_j \cap V_k)$$

è di classe C^∞ (rispettivamente olomorfa).

Un atlante è *massimale* se contiene tutti gli atlanti compatibili. Per il Lemma di Zorn un tale atlante esiste sempre.

DEFINIZIONE 3.5. Siano M, N due varietà differenziabili (rispettivamente complesse). Una funzione $f : M \to N$ si dice *differenziabile* o *liscia* (rispettivamente *olomorfa*) se per ogni

$p \in M$ esistono un sistema di coordinate locali (U, φ) in M tali che $p \in U$ e un sistema di coordinate locali (V, ϕ) in N tali che $f(p) \in V$ tali che l'applicazione

$$\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \to V$$

sia di classe C^∞ (rispettivamente *olomorfa*).

ESERCIZIO 3.6. Provare che la nozione di differenziabilità (risp. olomorfia) di una funzione tra varietà differenziabili (risp. complesse) è ben data, ovvero non dipende dai sistemi di coordinate locali scelti.

DEFINIZIONE 3.7. Siano M, N due varietà differenziabili (risp. complesse). Una applicazione differenziabile (rispett. olomorfa) $f : M \to N$ si dice un *diffeomorfismo* (risp. *biolomorfismo*) se f è un omeomorfismo e se $f^{-1} : N \to M$ è differenziabile (risp. olomorfa).

Su uno stesso spazio topologico possono esserci diversi atlanti non compatibili, che però possono definire varietà diffeomorfe tra loro:

ESEMPIO 3.8. Sia $M = \mathbb{R}$ con "atlante" $(\mathbb{R}, \varphi)$, dove $\varphi(x) = x$. Sia $N = \mathbb{R}$ con "atlante" $(\mathbb{R}, \phi)$, dove $\phi(x) = x^{1/3}$. I due atlanti non sono compatibili poiché $\phi(\varphi^{-1}(x)) = x^{1/3}$ non è di classe C^∞ in $x = 0$. Dunque M e N sono due varietà distinte. Però $f : M \to N$ definita da $f(x) = x^3$ è un omeomorfismo e si verifica facilmente che è un diffeomorfismo. Pertanto nella categoria delle varietà differenziabili M, N sono indistinguibili.

ESEMPIO 3.9. Sia $\mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$. Sia $M = \mathbb{D}$ con atlante $(\mathbb{D}, \varphi)$ dove $\varphi(\zeta) = \zeta$. Sia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un omeomorfismo e sia $N = \mathbb{D}$ con atlante $(\mathbb{D}, f)$. Sia M che N sono due varietà complesse di dimensione 1. Però M, N non sono biolomorfe. Infatti, se $g : N \to M$ è una funzione olomorfa, allora $\varphi \circ g \circ f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ è olomorfa, e per il teorema di Liouville, è costante.

ESEMPIO 3.10. Lo spazio delle matrici $m \times n$ con entrate reali, $\mathsf{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ è una varietà reale di dimensione $m \times n$. Similmente, lo spazio delle matrici $m \times n$ con entrate complesse, $\mathsf{Mat}(n \times m, \mathbb{C})$ è una varietà complessa di dimensione $m \times n$.

ESEMPIO 3.11. Il *gruppo lineare* $GL(n, \mathbb{R})$ è l'aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$ definito dalle matrici $n \times n$ con determinante non nullo. Similmente si definisce $GL(n, \mathbb{C})$.

ESERCIZIO 3.12. Se M, N sono varietà differenziabili, si può definire su $M \times N$ una naturale struttura di varietà differenziabile per cui le proiezioni su M e su N sono differenziabili.

ESEMPIO 3.13. *Lo spazio proiettivo.* Definiamo adesso una varietà complessa compatta di importanza fondamentale in matematica, lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^n$ (argomentazioni simili nel caso reale definiscono lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$).

Su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ si definisca la relazione d'equivalenza seguente: $p \sim q$ se esiste $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $p = \lambda q$. Sia $\mathbb{CP}^n := \{[p] : p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\}$ l'insieme quoziente e sia

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$$

definita da $\pi(p) = [p]$. Su $\mathbb{CP}^n$ mettiamo la topologia quoziente (ovvero, $U \subset \mathbb{CP}^n$ è un aperto se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $\mathbb{C}^{n+1}$). Con tale topologia π è continua. Sia $\mathbb{S}^{2n+1} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| = 1\}$ la sfera di dimensione $2n+1$. È un sottospazio compatto e connesso di $\mathbb{C}^{n+1}$. Osserviamo che $\pi|_{\mathbb{S}^{2n+1}} : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ è suriettiva. Pertanto $\mathbb{CP}^n$ è connesso e compatto. Si verifichi per esercizio che $\mathbb{CP}^n$ è Hausdorff. Fissate delle coordinate su $\mathbb{C}^{n+1}$, indichiamo con le *coordinate omogenee* $[z_1 : \ldots : z_{n+1}]$ la classe di equivalenza di $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Definiamo per $j = 1, \ldots, n+1$

$$U_j := \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n : z_j \neq 0\}.$$

Si verifica subito che U_j è aperto in $\mathbb{CP}^n$ e che $\bigcup U_j = \mathbb{CP}^n$. Definiamo ora delle carte locali su U_j, $j = 1, \ldots, n+1$ nel modo seguente:

$$\varphi_j([z_1 : \ldots : z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \hat{z}_j, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right)$$

dove, come usuale, $\hat{z}_j$ significa omesso. Si verifica facilmente che $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ sono degli omeomorfismi suriettivi. In più, per fissati $j \neq k$, si ha $U_j \cap U_k = \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : z_j z_k \neq 0\}$ e se poniamo $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_j([p])$, si ha $\varphi_j(U_k \cap U_j) = \mathbb{C}^n \setminus \{x_k = 0\}$. Si vede poi facilmente che le componenti di $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1}$ sono del tipo $\frac{x_m}{x_k}$, $m \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ e $1/x_k$, dunque olomorfe. Pertanto $\mathbb{CP}^n$ è una varietà connessa compatta complessa di dimensione n.

ESEMPIO 3.14. *La Grassmanniana.* Generalizziamo la costruzione dello spazio proiettivo complesso. Definiamo

$$G_{k,n}(\mathbb{C}) := \{V \subset \mathbb{C}^n : V \text{ è un sottospazio vettoriale complesso di dimensione } k\}.$$

Vediamo che $G_{k,n}(\mathbb{C})$ ha una struttura naturale di varietà complessa connessa compatta di dimensione $k(n-k)$.

Sia $M_{k,n}(\mathbb{C})$ l'insieme delle matrici $k \times n$ a coefficienti complessi di rango k. Si vede facilmente che $M_{k,n}(\mathbb{C})$ è un aperto dello spazio delle matrici $k \times n$ e pertanto è una varietà complessa di dimensione kn.

Sia ora $\pi : M_{k,n}(\mathbb{C}) \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ definito nel modo seguente. Se $A \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ si indichi con $\underline{a}_j$ il vettore di $\mathbb{C}^n$ formato dalla j-sima riga di A. Si definisce pertanto $\pi(A) := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{C}^n$ generato dalle righe di A.

Si osservi che

$$\pi(A) = \pi(B) \text{ se e solo se esiste } g \in GL(k, \mathbb{C}) \text{ tale che } B = gA. \tag{3.1}$$

Pertanto possiamo identificare $G_{k,n}(\mathbb{C})$ con l'insieme quoziente di $M_{k,n}(\mathbb{C})$ rispetto alla relazione di equivalenza (3.1). Mettiamo su $G_{k,n}(\mathbb{C})$ la topologia quoziente. Se $U(k,n) := \{A \in M_{k,n}(\mathbb{C}) : A\overline{A}^t = I_k\}$, dove I_k è la matrice identica $k \times k$. Si noti che la condizione $A\overline{A}^t = I_k$ è equivalente alla condizione che i vettori riga $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ della matrice A siano ortonormali rispetto al prodotto Hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$. Da qui segue facilmente che $U(k,n)$ è compatto in $M_{k,n}(\mathbb{C})$. Inoltre, $U(k,n)$ è connesso per archi. Per vederlo, denotiamo con $U(n)$ lo spazio delle matrici $n \times n$ unitarie. Per prima cosa vediamo che se $B \in U(n)$, per il teorema spettrale complesso esiste $C \in U(n)$ tale che $CB\overline{C}^t = D$ dove D è una matrice $n \times n$ diagonale con entrate $e^{i\theta_j}$ per $\theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Sia D_t la matrice $n \times n$ diagonale con entrate $e^{it\theta_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Si ponga $\tilde{B}_t = \overline{C}^t D_t C$. Allora $[0,1] \ni t \mapsto \tilde{B}_t$ è una curva continua in $U(n)$ che unisce l'identità a B. Dunque, $U(n)$ è connesso per archi. Si noti che per $A \in U(k,n)$ e $B \in U(n)$, risulta $AB \in U(k,n)$. Data $A \in U(k,n)$, interpretando le righe di A come base ortonormale di un sottospazio di $\mathbb{C}^n$, estendendo tale base ad una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ e cambiando coordinate in modo tale che i k vettori riga di A nelle nuove coordinate siano i primi k vettori della base canonica di $\mathbb{C}^n$, si ottiene una matrice $B \in U(n)$ tale che $T := AB \in U(k,n)$ è della forma $(I|0)$, dove, I è la matrice identica $k \times k$ formata dalle prime k colonne e tutti le altre entrate di T sono 0. Dunque, se $[0,1] \ni t \mapsto B_t$ è una curva continua in $U(n)$ che unisce B all'identità si ha che $[0,1] \ni t \mapsto AB_t$ è una curva continua in $U(k,n)$ che unisce A alla matrice T, e dunque $U(k,n)$ è connesso per archi.

Poiché ogni sottospazio di $\mathbb{C}^n$ ammette una base ortonormale, ne segue che $\pi|_{U(k,n)} : U(k,n) \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ è suriettiva e dunque $G_{k,n}(\mathbb{C})$ è compatto e connesso. Si verifichi per esercizio che $G_{k,n}(\mathbb{C})$ è di Hausdorff e a base numerabile.

Definiamo adesso delle carte locali. Sia $A \in M_{k,n}(\mathbb{C})$ e siano $A_1, \ldots, A_t$ tutti i minori $k \times k$ di A. Poiché A ha rango k, esiste j_0 tale che $\det A_{j_0} \neq 0$ ed esiste una matrice di permutazione P_{j_0} tale che $AP_{j_0} = [A_{j_0}, B_{j_0}]$ dove B_{j_0} è una opportuna matrice $k \times (n-k)$ e il simbolo $[A_{j_0}, B_{j_0}]$ indica la matrice $k \times n$ formata giustapponendo A_{j_0} e B_{j_0}. Si pone

$$U_{j_0} := \{V \in G_{k,n}(\mathbb{C}) : V = \pi(A), \det A_{j_0} \neq 0\}.$$

Si definisce allora $\varphi_{j_0} : U_{j_0} \to \mathbb{C}^{k(n-k)}$ tramite

$$\varphi_{j_0}(\pi(A)) := A_{j_0}^{-1} B_{j_0}.$$

La φ_{j_0} è un omeomorfismo locale, infatti la sua inversa è definita da $\varphi_{j_0}^{-1}(B) := \pi([I_k, B])$. Si verifichi poi per esercizio che effettivamente $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1,\ldots,t}$ è un atlante olomorfo.

DEFINIZIONE 3.15. Una varietà differenziabile M si dice *orientabile* se esiste un atlante $\{(U_j, \varphi_j)\}$ tale che $\det(d(\varphi_j \circ \varphi_k^{-1})) > 0$ su $\varphi_k(U_j \cap U_k)$ ogni volta che $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. Un tale atlante si dice *orientato*.

ESEMPIO 3.16. Il nastro di Möbius è una superficie (sottovarietà di codimensione uno di $\mathbb{R}^3$) che non è orientabile.

PROPOSIZIONE 3.17. *Sia M una varietà complessa di dimensione (complessa) n. Allora M è orientabile come varietà analitica reale di dimensione (reale) $2n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante olomorfo di M. Siano α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e definiamo $F := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Dunque ponendo $U = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, un aperto in $\mathbb{C}^n$, si ha $F : U \to \mathbb{C}^n$ olomorfa. Scriviamo $F = u + iv$, con $u, v : U \to \mathbb{R}^n$ funzioni analitiche reali (e U riguardato come aperto di $\mathbb{R}^{2n}$). Il cambiamento di carte analitico reale è dunque dato da $F^r := (u,v) : U \to \mathbb{R}^{2n}$. Per calcolare il suo differenziale, usiamo la seguente notazione: se $z \in U$, $z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ con $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, pensiamo a u, v come funzioni di

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Inoltre indichiamo con $\frac{\partial u}{\partial x}$ la matrice $n \times n$ le cui entrate sono $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e similmente per $\frac{\partial u}{\partial y}$ e per v. Con queste notazioni, utilizzando le equazioni di Cauchy-Riemann, il differenziale di F^r è

$$dF^r = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Ora possiamo calcolare il determinante con delle semplici operazioni elementari sulle righe e colonne:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

da cui $\det(F^r) = |\det\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)|^2 > 0$.

$\square$

PROPOSIZIONE 3.18. *Sia M una varietà reale con bordo ∂M. Supponiamo M orientabile e sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante orientato di M. Allora $\{U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{\partial M}\}$ è un atlante orientato per ∂M. In particolare ∂M ha una orientazione naturale determinata dall'orientazione di M.*

DIMOSTRAZIONE. È semplice provare che $\{U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{\partial M}\}$ è un atlante per ∂M. Proviamo che è orientato. Supponiamo $U_\alpha \cap U_\beta \cap \partial M \neq \emptyset$. Sia $U := \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ e sia $V := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Poniamo $F := \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U \to V$. Allora poiché F manda $U \cap \{x_1 = 0\}$ in $V \cap \{x_1 = 0\}$, si ha

$$F(0, x_2, \ldots, x_n) = (0, y_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Occorre provare che $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=2,\ldots,n} > 0$ per ogni $(0, x_2, \ldots, x_n) \in U$.

Per ipotesi $\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=1,\ldots,n} > 0$ per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. Poiché $y_1(0, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, ne segue che $\frac{\partial y_1(0,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_j} \equiv 0$ per ogni $j = 2, \ldots, n$. Pertanto per $q = (0, x_2, \ldots, x_n) \in U$ si ha

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_j}\right)_{j=2,\ldots,n} \\ \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\right)_{k=2,\ldots,n} & \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)_{j,k=2,\ldots,n} \end{pmatrix}(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & 0 \\ \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_1}\right)_{k=2,\ldots,n} & \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)_{j,k=2,\ldots,n} \end{pmatrix}(q). \tag{3.2}$$

Poiché F manda $\{x_1 \geq 0\} \cap U$ in $\{x_1 \geq 0\}$, ne segue che

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0^+} \frac{y_1(h, x_2, \ldots, x_n)}{h} \geq 0,$$

e per la (3.2) si ha che $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(q) > 0$ e dunque $\det\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right)_{j,k=2,\ldots,n}(q) > 0$, come volevasi. $\square$

4. Partizioni dell'unità

LEMMA 4.1. *Sia M una varietà e sia K un compatto in M e $U \subset M$ un aperto che contiene K. Allora esiste una funzione C^∞ $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi \geq 0$, $\varphi(x) = 1$ per ogni $x \in K$ e* $\mathsf{supp}(\varphi) \subset\subset U$.

DIMOSTRAZIONE. Dati $0 < r < R$, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x-R} - \frac{1}{x-r}\right) & r < x < R, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $c = \int_r^R f(t)dt > 0$ e sia $F(x) = c^{-1} \int_x^R f(t)dt$. Allora $F(x)$ è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$, $F \geq 0$, e ha la proprietà che $F(x) = 1$ per $x \leq r$, $F(x) = 0$ per $x \geq R$. Si definisca $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tramite $\psi(x) = F(\|x\|^2)$. Allora ψ è di classe C^∞, $\psi \geq 0$, $\psi(x) = 1$ per $\|x\|^2 \leq r$ e $\psi(x) = 0$ per $\|x\|^2 \geq R$. Dunque, dato $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$, la funzione $\psi_a(x) = \psi(x-a)$ è di classe C^∞, $\psi_a \geq 0$, $\psi = 1$ nella palla $B(a, \sqrt{r})$ di centro a e raggio $\sqrt{r}$ e $\psi = 0$ fuori dalla palla $B(a, \sqrt{R})$.

Supponiamo che $M = \mathbb{R}^n$ e K sia un compatto in $\mathbb{R}^n$ contenuto in U. Allora esiste un ricoprimento finito di K fatto da palle aperte $B(a_1, R_1), \ldots, B(a_m, R_m)$ la cui chiusura è contenuta in U. Per $j = 1, \ldots, m$ siano $0 < r_j < R_j$ tali che $\{B(a_j, r_j)\}_{j=1,\ldots,m}$ formi ancora un ricoprimento di K. Per ciascun $j = 1, \ldots, m$ esiste una funzione $\psi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non negativa, di classe C^∞ tale che $\psi_j = 1$ su $B(a_j, r_j)$ e $\psi_j = 0$ fuori da $B(a_j, R_j)$. Si definisce allora $\varphi = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \psi_j)$.

Nel caso di una varietà M, se K è contenuto in una carta locale allora il risultato segue subito. Altrimenti, essendo K compatto, si può ricoprire con un numero finito di carte locali e dunque K risulta unione di un numero finito di compatti $\{K_j\}_{j=1,\ldots,N}$ contenuti ciascuno in una carta locale. Si applica il risultato per ciascuno di questi compatti e si ottiene una famiglia $\{\varphi_j\}_{j=1,\ldots,N}$ di funzioni di classe C^∞ tali che il supporto è contenuto ed è relativamente compatto in una carta locale, $\varphi_j \geq 0$ e $\varphi_j(x) = 1$ per $x \in K_j$. La funzione cercata è data da $\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \varphi_j(x))$. □

DEFINIZIONE 4.2. Sia M una varità. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M localmente finito. Una famiglia $\{\varphi_\alpha\}$ si dice una *partizione dell'unità* associata a $\mathcal{U}$ se per ogni α le funzioni $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ sono C^∞ e verificano:

(1) $\varphi_\alpha \geq 0$,
(2) $\mathsf{supp}(\varphi_\alpha) \subset\subset U_\alpha$,
(3) $\sum \varphi_\alpha(x) = 1$ per ogni $x \in M$.

TEOREMA 4.3. *Sia M una varietà differenziabile. Sia $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ un ricoprimento localmente finito di M tale che ciascun U_α sia relativamente compatto in M. Allora esiste una partizione dell'unità associata a $\mathcal{U}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni α si definisce $V_\alpha \subset\subset U_\alpha$ tale che $\{V_\alpha\}$ è un ricoprimento di M. Si definisce $\widetilde{\varphi}_\alpha$ in modo che $\widetilde{\varphi}_\alpha(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{V}_\alpha$ e $\mathsf{supp}\widetilde{\varphi}_\alpha \subset\subset U_\alpha$ usando il

Lemma 4.1. Si definisce poi $\widetilde{\varphi} := \sum \widetilde{\varphi}_\alpha$ (tale somma è ben definita poiché il ricoprimento è localmente finito, dunque per ogni $x \in M$ esiste solo un numero finito di U_α tali che $x \in U_\alpha$). Inoltre $\widetilde{\varphi}(x) > 0$ per ogni x. Si pone allora $\varphi_\alpha := \widetilde{\varphi}_\alpha / \widetilde{\varphi}$. □

5. Fascio di struttura di una varietà

Sia M una varietà reale (rispettivamente complessa) e sia $p \in M$. Consideriamo l'insieme $G_p := \{(U, f)\}$ dove U è un aperto di M contenente p e $f \in C^\infty(U)$ (rispettivamente $f \in \mathcal{O}(U)$). Mettiamo una relazione di equivalenza su G_p definendo $(U, f) \sim (V, g)$ se esiste $W \subset U \cap V$ con $p \in W$ e $f = g$ su W.

DEFINIZIONE 5.1. L'insieme quoziente $G_p/\sim$ si dice lo *spazio dei germi di funzioni C^∞ (rispettivamente, olomorfe) in* p e si denota $C^\infty_{M,p}$ (rispettivamente $\mathcal{O}_{M,p}$). La classe di (U, f) si denota con f_p.

PROPOSIZIONE 5.2. *$C^\infty_{M,p}$ (rispettivamente $\mathcal{O}_{M,p}$) è un anello commutativo con unità.*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

OSSERVAZIONE 5.3. Nel caso di una varietà complessa l'anello $\mathcal{O}_{M,p}$ è un dominio di integrità, mentre $C^\infty_{M,p}$ contiene divisori dello zero.

OSSERVAZIONE 5.4. E' ben definito il morfismo (suriettivo) di anelli

$$C^\infty_{M,p} \ni f_p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}$$

(e similmente per $\mathcal{O}_{M,p}$). Essendo $\mathbb{R}$ un campo, il nucleo di tale morfismo è un ideale massimale

$$\mathcal{M}_{M,p} := \{f_p : f(p) = 0\},$$

e $C^\infty_{M,p}/\mathcal{M}_{M,p} \simeq \mathbb{R}$ (similmente $\mathcal{O}_{M,p}/\mathcal{M}_{M,p} \simeq \mathbb{C}$).

DEFINIZIONE 5.5. Sia M una varietà. Sia U un aperto in M. Definiamo

$$C^\infty_M(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \quad \text{di classe } C^\infty\},$$

e similmente si definisce $\mathcal{O}_M(U)$ nel caso olomorfo. L'operatore C^∞_M (rispettivamente $\mathcal{O}_M$) che ad ogni aperto $U \subset M$ associa $C^\infty_M(U)$ (rispettivamente $\mathcal{O}_M(U)$) si dice il *fascio di struttura* di M.

ESERCIZIO 5.6. Sia M una varietà complessa connessa e compatta. Provare che non esistono funzioni olomorfe non costanti $f : M \to \mathbb{C}$, ovvero $\mathcal{O}_M(M) = \mathbb{C}$.

6. Lo spazio tangente ad un varietà e il differenziale di una applicazione

Definiamo adesso lo spazio tangente ad una varietà reale. Una analoga costruzione vale nel caso complesso.

Come notazione, se M è una varietà differenziabile e $\lambda \in \mathbb{R}$ si denota con $\lambda : M \to \mathbb{R}$ anche la funzione costante che ad ogni $x \in M$ associa il numero λ, e indicheremo sempre con λ il germe λ_p per un qualunque $p \in M$.

DEFINIZIONE 6.1. Una *derivazione* v su $C^\infty_{M,p}$ è un operatore $v : C^\infty_{M,p} \to \mathbb{R}$ tale che

(1) $v(\lambda f_p) = \lambda v(f_p)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_p \in C^\infty_{M,p}$,
(2) $v(f_p + g_p) = v(f_p) + v(g_p)$, per ogni $f_p, g_p \in C^\infty_{M,p}$
(3) $v(f_p g_p) = f(p)v(g_p) + g(p)v(f_p)$, per ogni $f_p, g_p \in C^\infty_{M,p}$.

L'insieme delle derivazioni si indica T_pM.

OSSERVAZIONE 6.2. Si osserva facilmente che T_pM è uno spazio vettoriale reale, in cui la somma di due derivazione è data da

$$(v + w)(f_p) := v(f_p) + w(f_p) \quad v, w \in T_pM, f_p \in C^\infty_{M,p},$$

e il prodotto per uno scalare è definito da

$$(\lambda v)(f_p) = \lambda \cdot (v(f_p)) \quad \lambda \in \mathbb{R}, f_p \in C^\infty_{M,p}.$$

Sia (U, φ) una carta locale con coordinate $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Si noti che

$$\varphi^* : C^\infty_{\mathbb{R}^n,\varphi(p)} \to C^\infty_{M,p}$$

è un isomorfismo di anelli, definito da $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$ per $f \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,\varphi(p)}$ e che

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

definito da

$$d\varphi_p(v)(f) := v(f \circ \varphi) \quad \forall f \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,\varphi(p)}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Definiamo $\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \in T_pM$ tramite

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p)(f) := \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}|_{\varphi(p)} \quad \forall f \in C^\infty_{M,p}.$$

LEMMA 6.3. $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ *formano una base di* T_pM.

DIMOSTRAZIONE. Applicando $(\varphi^{-1})^*, d\varphi_p$ possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ e $p = 0$. Per prima cosa osserviamo che $v(c) = 0$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$. Infatti

$$v(c) = v(1 \cdot c) = 1v(c) + cv(1) = v(c) + v(c) = 2v(c).$$

Sia $f \in C^\infty_{\mathbb{R}^n,O}$. Sviluppando f in serie di Taylor si ottiene

$$v(f) = v\left(f(0) + \sum c_j x_j + O(|x|^2)\right) = \sum c_j v(x_j).$$

Ponendo $a_j := v(x_j)$ si ottiene subito che $v = \sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}(0)$. Dunque $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(0), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(0)\}$ generano $T_O\mathbb{R}^n$. La lineare indipendenza segue subito dal fatto che

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(0)(x_k) = \delta^k_j.$$

$\square$

DEFINIZIONE 6.4. Siano M, N due varietà. Sia $f : M \to N$ una mappa liscia. Sia $p \in M$. Si definisce l'operatore lineare $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ tramite

$$df_p(v)(h) := v(h \circ f) \quad \forall v \in T_pM, h \in C^\infty_{f(p)}.$$

Ricordiamo che il differenziale di una funzione $F : U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ in $p \in U$ è quella applicazione lineare $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$F(p + hv) - F(p) = hdF_p(v) + o(|h|), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Nelle coordinate canoniche di $\mathbb{R}^n$ la matrice associata a dF_p è la matrice Jacobiana $m \times n$ la cui entrata di posto (i, j) è $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)$, dove $F = (F_1, \ldots, F_m)$.

ESERCIZIO 6.5. Sia $f : M \to N$ una mappa liscia tra due varietà di dimensione n e m rispettivamente. Sia $p \in M$ e sia (U, φ) un intorno coordinato di p in M, con $\varphi(q) = (x_1, \ldots, x_n)$. Sia (V, ϕ) un intorno coordinato di $f(p)$ in N, con $\phi(q') = (y_1, \ldots, y_m)$. Provare che la matrice associata a df_p rispetto alla base di T_pM definita da $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ e alla base di $T_{f(p)}N$ definita da $\{\frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_m}(f(p))\}$ è la matrice Jacobiana dell'applicazione $\phi^{-1} \circ f \circ \varphi$ valutata in $\varphi(p)$.

7. Sottovarietà regolari e teoremi di taglio

DEFINIZIONE 7.1. Sia M una varietà differenziabile reale o complessa di dimensione n. Un sottospazio topologico N di M si dice una *sottovarietà regolare* di M di codimensione k se per ogni $p \in N$ esiste un intorno coordinato (U, φ) di p in M tale che

$$\varphi(N \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n : x_1 = \ldots = x_k = 0\}.$$

ESERCIZIO 7.2. Sia M una varietà di dimensione n. Provare che se N è una sottovarietà regolare di codimensione k di M allora N è una varietà di dimensione $n - k$ le cui carte sono date dalle restrizioni delle carte di M ad N.

Dalla definizione segue che se N è una sottovarietà regolare di una varietà M allora N è *localmente chiuso*, ovvero per ogni $p \in N$ esiste un intorno aperto $U \subset M$ tale che $N \cap U$ è chiuso *in* U, ma non è detto che N sia chiusa in M. Ad esempio, l'intervallo aperto $(0, 1) \times \{0\}$ è localmente chiuso in $\mathbb{R}^2$ ma non è chiuso.

Se N è una sottovarietà regolare di M, l'applicazione naturale $\iota : N \to M$ data da $\iota(p) = p$ è una applicazione differenziabile (o olomorfa, a seconda della categoria) iniettiva e il suo differenziale $d\iota_p : T_pN \to T_pM$ è iniettivo in ogni punto $p \in N$. Inoltre, poiché per definizione N è un sottospazio topologico di M, $\iota : N \to M$ è un omeomorfismo da N a $\iota(N)$ (con la topologia indotta da M).

OSSERVAZIONE 7.3. Dalla definizione segue subito che se N è una sottovarietà regolare di codimensione k di una varietà M allora per ogni $p \in N$ esiste un intorno U e una funzione $F : U \to \mathbb{R}^k$ liscia (oppure $F : U \to \mathbb{C}^k$ olomorfa nel caso complesso) tale che $N \cap U =$

$\{q \in U : F(q) = 0\}$ e dF_q è suriettivo per ogni $q \in U$. Infatti, preso $p \in N$ esiste un intorno coordinato (U, φ) di p in M tale che

$$\varphi(N \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n : x_1 = \ldots = x_k = 0\}.$$

Si pone allora $F(q) = (x_1(q), \ldots, x_k(q))$ per $q \in U$. Ovviamente $N \cap U = \{p \in U : F(p) = 0\}$ e, utilizzando la carta locale (U, φ) si vede subito che dF_q è suriettivo per ogni $q \in U$.

Studiamo adesso il viceversa della osservazione precedente, ovvero sottovarietà regolari date come luoghi di zero di funzioni. Iniziamo con il richiamare il seguente:

TEOREMA 7.4 (Teorema della funzione inversa). *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^∞. Sia $p \in U$ tale che dF_p è un isomorfismo. Allora esiste un intorno aperto $V \subset U$ di p tale che $F(V)$ è un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $F|_V : V \to F(V)$ è un diffeomorfismo.*

ESERCIZIO 7.5. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $F : V \to F(V)$ è un diffeomorfismo, allora dF_p è un isomorfismo per ogni $p \in U$.

OSSERVAZIONE 7.6. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^n$ è iniettiva, in genere dF_p *non* è un isomorfismo. Si pensi ad esempio a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3$. Se però $U \subset \mathbb{C}^n$ è un aperto e $F : U \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa e iniettiva, allora dalla teoria delle funzioni olomorfe segue che dF_p è un isomorfismo per ogni $p \in U$ e in particolare F è un biolomorfismo sull'immagine.

LEMMA 7.7 (Teorema del rango). *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^∞. Supponiamo che dF_p abbia rango costante $k \leq \min(n, m)$ per ogni $p \in U$. Allora per ogni $p \in U$ esistono un intorno aperto $V \subset U$ di p, un intorno aperto $W \subset \mathbb{R}^m$ di $F(p)$ e dei diffeomorfismi $G : V \to G(V) \subset \mathbb{R}^n$, $H : W \to H(W) \subset \mathbb{R}^m$ tali che*

$$H \circ F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

DIMOSTRAZIONE. A meno di traslazioni si può assumere $p = F(p) = O$. Sia $F = (F_1, \ldots, F_m)$. Poichè per ipotesi il rango di dF_O è k, a meno di permutazioni delle coordinate, si può supporre che la matrice $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(O)\right)_{i,j=1,\ldots,k}$ sia invertibile. Si definisce allora la funzione $G : U \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$G(x_1, \ldots, x_n) := (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Il differenziale di G in O è

$$dG_O = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(O)\right)_{i,j=1,\ldots,k} & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

dove $*$ indica le derivate di F_i rispetto a $x_{k+1}, \ldots, x_n$ per $i = 1, \ldots, k$ e I_{n-k} è la matrice identica di dimensione $n - k$. Pertanto dG_O è invertibile e dunque per il Teorema 7.4 esiste un intorno $V \subset U$ di p tale che $G : V \to G(V) \subset \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo. Si noti che

$$F \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, \tilde{F}_{k+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{F}_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

dove $\tilde{F}_j = F_j \circ G^{-1}$ per $j = k+1, \ldots, m$.

Asseriamo che $\tilde{F}_j$ dipende *solo* da $x_1, \ldots, x_k$ $(j = k+1, \ldots, m)$. Infatti, $d(F \circ G^{-1})_q = dF_{G^{-1}(q)} \circ dG_q^{-1}$ e pertanto il rango di $d(F \circ G^{-1})_q$ è identicamente k per ogni $q \in G(V)$. D'altra parte

$$d(F \circ G^{-1}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & \left(\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_j}\right)_{i=k+1,\ldots,m; j=k+1,\ldots,n} \end{pmatrix}$$

da cui segue che $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_j} \equiv 0$ su $G(V)$, per $i = k+1, \ldots, m$, $j = k+1, \ldots, n$.

Adesso definiamo

$$H(y_1, \ldots, y_m) := (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} - \tilde{F}_{k+1}(y_1, \ldots, y_k), \ldots, y_{k+1} - \tilde{F}_m(y_1, \ldots, y_k)).$$

si vede facilmente che dH_O è invertibile e dunque ancora per il Teorema 7.4 H è un diffeomorfismo locale. Restringendo eventualmente V si verifica facilmente che $H \circ F \circ G^{-1}$ è ben definito ed ha la forma cercata. $\square$

COROLLARIO 7.8 (Teorema della funzione implicita). *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $F : U \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^∞. Sia $a \in \mathbb{R}^m$ e sia $M = F^{-1}(a) = \{p \in U : F(p) = a\}$. Supponiamo che M non sia vuoto e che dF_p sia suriettivo per ogni $p \in M$. Allora M è una sottovarietà regolare chiusa di U di codimensione m.*

DIMOSTRAZIONE. L'insieme M è un chiuso. Poiché dF_p è suriettivo per $p \in M$, significa che il suo rango è massimo ed è uguale a m, e dunque esiste un intorno aperto $U'_p \subset U$ di p tale che dF_q ha rango costante m per ogni $q \in U'_p$. Si applica allora il Lemma 7.7. $\square$

ESEMPIO 7.9. La sfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ essendo definita da

$$\mathbb{S}^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum x_j^2 = 1\}$$

è una sottovarietà regolare compatta di $\mathbb{R}^{n+1}$ di codimensione 1.

TEOREMA 7.10 (Teorema del rango su varietà). *Siano M_1, M_2 due varietà differenziabili di dimensione rispettivamente n, m. Sia $F : M_1 \to M_2$ una applicazione differenziabile. Supponiamo che per ogni $p \in M_1$ il differenziale dF_p abbia rango costante uguale a $k \leq \min(m, n)$. Allora per ogni $a \in M_2$ tale che $F^{-1}(a)$ sia non vuoto, risulta che $F^{-1}(a)$ è una sottovarietà regolare chiusa di M_1 di codimensione k.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché la funzione F è continua, $N := F^{-1}(a)$ è un chiuso in M_1. Verifichiamo che N è una sottovarietà regolare. Sia $p \in N$ e sia (U, φ) un intorno coordinato di p in M_1. Sia (V, ϕ) un intorno coordinato di $F(p)$ in M_2. Dall'esercizio 6.5 segue che $d(\phi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ ha rango costante k. Applichiamo allora il Lemma 7.7 alla applicazione $\phi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Si ottengono due diffeomorfimi G, H definiti in un intorno di p e di $F(p)$ rispettivamente, tali che

$$H \circ \phi \circ F \circ \varphi^{-1} \circ G^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Dunque $G \circ \varphi(N \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_k = 0\}$, che prova che N è una sottovarietà di codimensione k. $\square$

OSSERVAZIONE 7.11. Nel Teorema 7.10, la condizione che dF_p abbia rango costante uguale a k su tutta M_1 può essere chiaramente indebolita richiedendo che tale condizione valga in un aperto di M_1 che contiene $F^{-1}(a)$. Non è però in generale possibile richiedere che tale condizione valga solo per i punti di $F^{-1}(a)$ poiché il rango è una funzione semicontinua inferiormente, ovvero, se il rango di dF_p è k, allora esiste un intorno U di p per cui dF_q ha rango $\geq k$ per ogni $q \in U$, ma tale rango potrebbe essere maggiore di k. Ciò non accade ovviamente nel caso di rango massimo, e, in tal caso dunque vale il corollario che segue.

COROLLARIO 7.12 (Teorema del taglio su varietà). *Siano M_1, M_2 due varietà differenziabili di dimensione rispettivamente n, m. Sia $F : M_1 \to M_2$ una applicazione differenziabile. Sia $a \in M_2$. Sia $N := F^{-1}(a) = \{p \in M_1 : F(p) = a\}$. Supponiamo che per ogni $p \in N$ il differenziale dF_p sia suriettivo. Allora N è una sottovarietà regolare chiusa di M_1 di codimensione m.*

ESERCIZIO 7.13. Siano $p_1, \ldots, p_r : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ dei polinomi omogenei. Si definisca

$$V := \{[z] \in \mathbb{CP}^n : p_1(z) = \ldots = p_r(z) = 0\}.$$

Determinare condizioni sufficienti sui p_j affinché lo spazio V sia una sottovarietà regolare di $\mathbb{CP}^n$.

ESERCIZIO 7.14. Sia $a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. In $\mathbb{CP}^n$ si consideri

$$H := \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : a_1 z_1 + \ldots + a_{n+1} z_{n+1} = 0\}.$$

Si provi che H è una sottovarietà di $\mathbb{CP}^n$ (detta *iperpiano proiettivo*).

Se N è una sottovarietà regolare di una varietà M, allora si può pensare a T_pN come ad un sottospazio di T_pM per ogni $p \in N$. Più precisamente, se $\iota : N \to M$ è l'immersione naturale di N in M data da $\iota(p) = p$, allora $d\iota_p(T_pN)$ è un sottospazio di T_pM isomorfo in modo naturale a T_pN. Per non appesantire la notazione, si scrive T_pN invece di $d\iota_p(T_pN)$ quando non occorra precisare l'immersione. Se (U, φ) è un intorno coordinato di M, $p \in U$, adattato ad N nel senso che

$$\varphi(N \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) : x_1 = \ldots = x_k = 0\},$$

allora $\widetilde{\varphi} : N \cap U \to \varphi(U) \cap \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}$ definita tramite $\varphi(q) := (x_{k+1}(q), \ldots, x_n(q))$ è una carta locale per N e dunque lo spazio tangente T_pN è generato da $\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. Nel caso la sottovarietà sia data localmente come luogo di zeri di una funzione, si ha:

PROPOSIZIONE 7.15. *Sia N una sottovarietà regolare di codimensione k di una varietà M di dimensione n. Sia M' una varietà di dimensione k e sia $a \in M'$. Sia U un intorno aperto in M di $p \in N$, e sia $F : U \to M'$ una funzione C^∞ tale che $N \cap U = F^{-1}(a)$ e che dF_p sia suriettivo per ogni $p \in U \cap N$. Allora*

$$T_pN = \{v \in T_pM : dF_p(v) = 0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia T_pN che $\ker dF_p$ hanno la stessa dimensione, quindi basta provare che uno è contenuto nell'altro per avere l'uguaglianza. Sia $\iota : N \to M$ l'immersione naturale. Proviamo che $d_p\iota(T_pN) \subset \ker dF_p$ per $p \in N$. In effetti, se $v \in T_pN$, per ogni g germe di funzione C^∞ in M' vicino a $F(p)$ si ha

$$dF_p(d\iota_p(v))g = v(g \circ F \circ i) = 0,$$

essendo $F \circ i \equiv a$. □

8. Immersioni e sottovarietà immerse

DEFINIZIONE 8.1. Siano N, M due varietà e sia $f : N \to M$ una applicazione differenziabile *iniettiva*. Se df_p è iniettivo per ogni $p \in N$ allora $f : N \to M$ si dice una *immersione* e la sua immagine $f(N)$ si dice una *sottovarietà immersa*.

L'immagine di una immersione $f : N \to M$ *non* è in generale una sottovarietà regolare. Infatti, essendo f continua, la topologia indotta da M su $f(N)$ è in genere solo meno fine di quella definita da $f : N \to M$. Per essere più precisi occorre dare un'altra definizione:

DEFINIZIONE 8.2. Siano N, M due varietà e sia $f : N \to M$ una immersione. Dotiamo $f(N)$ della topologia indotta da M. Se $f : N \to f(N)$ è un omeomorfismo, allora f si dice una *immersione regolare* (o, utilizzando il termine inglese, un *embedding*).

OSSERVAZIONE 8.3. Siano N, M due varietà e sia $f : N \to M$ una immersione. Poiché M è di Hausdorff, se N è compatto allora f è una immersione regolare.

Dalla definizione si ha che una immersione $f : N \to M$ è regolare se e solo se f è una mappa aperta da N a $f(N)$ (con la topologia indotta da M). Inoltre, se N è una sottovarietà regolare di M allora l'immersione canonica $\iota : N \to M$ data da $\iota(p) = p$ è regolare. Vale anche il viceversa:

TEOREMA 8.4. *Sia $f : N \to M$ una immersione regolare. Allora $f(N)$ è una sottovarietà regolare di M.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $m = \dim N$ e $n = \dim M$. Per ipotesi sappiamo che $f(N)$ è un sottospazio topologico di M, occorre e basta provare dunque che per ogni $f(p) \in f(N)$ esiste un intorno coordinato (U, φ) di $f(p)$ in M tale che

$$\varphi(f(N) \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n : x_1 = \ldots = x_k = 0\}.$$

Passando a coordinate locali e utilizzando il Lemma 7.7 si vede che esistono coordinate locali (V, ψ) attorno a p in N e coordinate locali (U, φ) attorno a $f(p)$ in M tali che

$$\varphi \circ f \circ \psi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Poiché f è una immersione regolare, e quindi aperta, ne segue che $f(V) = f(N) \cap U'$ per un certo aperto $U' \subset M$ e possiamo supporre $U = U'$. Dunque

$$\varphi(f(N) \cap U) = \varphi(f(V)) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\},$$

come volevamo. □

Le immersioni che sono regolari si caratterizzano utilizzando il fatto che l'immagine è una sottovarietà regolare. Più precisamente:

PROPOSIZIONE 8.5. *Sia N una varietà di dimensione m e sia M una varietà di dimensione n. Sia $f : N \to M$ una immersione. Se per ogni $p \in f(N)$ esiste un intorno coordinato (U, φ) in M tale che*

$$\varphi(f(N) \cap U) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \varphi(U) : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}, \tag{8.1}$$

allora f è una immersione regolare.

DIMOSTRAZIONE. Sia $N' = f(N)$ dotato della topologia indotta da M. Per la (8.1) N' è una sottovarietà regolare di M. In particolare è una varietà di dimensione m. Dunque $f : N \to N'$ è una applicazione liscia e df_p è un isomorfismo per ogni $p \in N$. Passando a coordinate locali e utilizzando il teorema della funzione inversa si ha che f è un diffeomorfismo locale, in particolare è aperta e pertanto è una immersione regolare. □

COROLLARIO 8.6. *Sia $f : N \to M$ una immersione. Allora per ogni $p \in N$ esiste un intorno aperto $A \subset N$ di p tale che $f|_A : A \to M$ è una immersione regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $m = \dim N$ e $n = \dim M$. Sia $p \in N$. Passando a coordinate locali e utilizzando il Lemma 7.7 si vede che esistono coordinate locali (A, ψ) attorno a p in N e coordinate locali (U, φ) attorno a $f(p)$ in M tali che

$$\varphi \circ f \circ \psi(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0).$$

Pertanto $f|_A : A \to M$ soddisfa la proprietà della Proposizione 8.5 e dunque $f|_A$ è una immersione regolare. □

Esistono immersioni non regolari la cui immagine è chiusa. Un tale esempio è "l'otto", realizzato immergendo $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ in modo che 0 vada nell'origine, i valori positivi disegnino un cerchio che tende a all'origine per $x \to +\infty$ e i valori negativi disegnino un altro cerchio che tende a all'origine per $x \to -\infty$.

ESERCIZIO 8.7. Provare che $\mathbb{C}^n$ non contiene sottovarietà regolari complesse compatte [Suggerimento: se M è una tale varietà, considerare la restrizione di $z \mapsto z_j$ ad M, $j = 1, \ldots, n$].

OSSERVAZIONE 8.8. Whitney ha provato che se M è una varietà differenziabile di dimensione n allora esiste una immersione regolare con immagine chiusa di M in $\mathbb{R}^{2n+1}$. Pertanto le varietà reali potrebbero essere studiate come sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. D'altra parte, come mostrato nel precedente esercizio, non tutte le varietà complesse possono essere immerse come sottovarietà complesse di $\mathbb{C}^n$. Le varietà complesse per cui ciò è possibile si chiamano *varietà di Stein*.

Da un altro lato, un teorema di Chow afferma che le sottovarietà regolari complesse di $\mathbb{CP}^n$ sono tutti e soli i luogo di zeri di opportuni polinomi omogenei (cfr. Esercizio 7.13). Tali varietà si dicono *proiettive algebriche* e sono in particolare compatte.

Esistono delle proprietà geometriche e analitiche che permettono di identificare quali varietà complesse astratte sono di Stein o proiettive. Tali proprietà si leggono attraverso degli invarianti legati a fibrati e fasci definiti sulle varietà stesse e alle loro classi caratteristiche (classi di Chern). Discuteremo di tali oggetti nei prossimi capitoli. Una trattazione delle varietà di Stein o proiettive esula però da queste note.

9. Richiami sui Rivestimenti

Richiamiamo brevemente la teoria dei rivestimenti. Per dettagli si veda [**6**].

DEFINIZIONE 9.1. Siano $X, \tilde{X}$ due spazi topologici Hausdorff, connessi e localmente connessi per archi. Sia $\pi : \tilde{X} \to X$ un'applicazione continua e suriettiva. La coppia $(\tilde{X}, \pi)$ si dice un *rivestimento* di X se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U (detto *intorno onesto*) tale che

(1) $\pi^{-1}(U) = \cup_{i\in I}\tilde{U}_i$ con $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ se $i \neq k$,
(2) $\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ è un omeomorfismo.

OSSERVAZIONE 9.2. Si noti che π è un'applicazione aperta.

TEOREMA 9.3 (di sollevamento). *Sia $(\tilde{X}, \pi)$ un rivestimento di X.*

(1) *Se $f : [0,1] \to X$ un cammino continuo tale che $f(0) = x_0$. Allora per ogni $\tilde{x}_i \in \pi^{-1}(x_0)$ esiste un unico cammino continuo (detto il* sollevamento *di f) $\tilde{f} : [0,1] \to \tilde{X}$ tale che $\pi \circ \tilde{f} = f$ e valga $\tilde{f}(0) = x_i$.*
(2) *Siano $f, g : [0,1] \to X$ due cammini continui tali che $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$ e sia $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ una omotopia continua con estremi fissi tra f e g. Sia $\tilde{x}_i \in \pi^{-1}(x_0)$ e siano $\tilde{f}, \tilde{g}$ i due sollevamenti di f, g con origine in $\tilde{x}_i$. Allora esiste una unica omotopia continua $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \tilde{X}$ tra $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ tale che $\pi \circ \tilde{F} = F$, $\tilde{F}(0, s) = \tilde{x}_i$ per ogni $s \in [0,1]$ e $\tilde{F}(1, s) = \tilde{x}_j$ con $\pi(\tilde{x}_j) = x_1$, per ogni $s \in [0,1]$.*
(3) *Sia W uno spazio connesso e localmente connesso per archi, $w \in W$. Sia $\phi : W \to X$ una applicazione continua e sia $x_0 = \phi(w)$. Allora per ogni $\tilde{x}_i \in \pi^{-1}(x_0)$ esiste una unica applicazione continua $\tilde{\phi} : W \to \tilde{X}$ tale che $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$ e $\tilde{\phi}(w) = \tilde{x}_i$ se e solo se $\phi_*(\Pi_1(W, w)) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i))$, dove Π_1 indica il primo gruppo fondamentale.*

In particolare, dato un cappio ℓ in X con origine in x_0 e dato $\tilde{x}_i \in \pi^{-1}(x_0)$ esiste un solo sollevamento $\tilde{\ell} : [0,1] \to \tilde{X}$ di ℓ che ha origine in $\tilde{x}_i$. Il suo punto finale $\tilde{\ell}(1)$ dipende solo dalla classe di omotopia di ℓ in $\Pi_1(X, x_0)$. Come diretta conseguenza si ha inoltre che l'omomorfismo $\pi_* : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) \to \Pi_1(X, x_0)$ è iniettivo.

DEFINIZIONE 9.4. Sia $(\tilde{X}, \pi)$ un rivestimento di X. Indichiamo con

$$\Gamma_\pi(\tilde{X}, X) := \{\gamma : \tilde{X} \to \tilde{X} \text{ omeomorfismo} : \pi \circ \gamma = \pi\}.$$

$\Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ si dice il *gruppo delle trasformazioni del rivestimento* (dette anche *deck transformations*).

ESERCIZIO 9.5. Provare che $\Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ è effettivamente un gruppo rispetto alla composizione.

TEOREMA 9.6. *Sia $(\tilde{X}, \pi)$ un rivestimento di X. Sia $x_0 \in X$ e siano $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x_0)$.*

(1) *$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ e $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ sono coniugati in $\Pi_1(X, x_0)$.*
(2) *Se H è un sottogruppo di $\Pi_1(X, x_0)$ coniugato a $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ allora esiste $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_0)$ tale che $H = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.*
(3) *Esiste una unica trasformazione del rivestimento $\gamma \in \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ tale che $\gamma(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$.*

OSSERVAZIONE 9.7. Il coniugio di cui al punto (1) del teorema precedente si realizza tramite un automorfismo interno di $\Pi_1(X, x_0)$ definito da $\pi_*([\sigma])$ dove $[\sigma]$ è la classe di omotopia ad estremi fissi di un cammino σ che unisce $\tilde{x}_1$ con $\tilde{x}_2$ in $\tilde{X}$.

DEFINIZIONE 9.8. Un rivestimento $(\tilde{X}, \pi)$ di X si dice *di Galois* (o *regolare*) se $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ è un sottogruppo normale in $\Pi_1(X, x_0)$ per qualche (e quindi per ogni) $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_1 \in \pi^{-1}(x_0)$.

Per il Teorema 9.6 un rivestimento è di Galois se e solo se $\Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ agisce in modo transitivo sulla fibra $\pi^{-1}(x_0)$.

Notiamo inoltre che per il Teorema 9.6 una trasformazione del rivestimento $\gamma \in \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ è univocamente determinata dal suo valore in un punto dato (perché l'unica trasformazione del rivestimento che fissa un punto dato è l'identità).

TEOREMA 9.9. *Sia $(\tilde{X}, \pi)$ un rivestimento di Galois di X. Sia $x_0 \in X$ e sia $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Allora*

$$\Pi_1(X, x_0)/\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \Gamma_\pi(\tilde{X}, X).$$

DIMOSTRAZIONE. Si definisce una applicazione $H : \Pi_1(X, x_0) \to \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ nel modo seguente: se $[\ell] \in \Pi_1(X, x_0)$ sia $\tilde{\ell}$ l'unico sollevamento di ℓ con origine in $\tilde{x}_0$. Per il Teorema 9.6, data l'ipotesi di normalità di $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, esiste una unica $\gamma \in \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ tale che $\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{\ell}(1)$. Si pone allora $H([\ell]) := \gamma$. Tale applicazione è suriettiva. Infatti se $\gamma \in \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ allora $\gamma = H(\pi_*[\sigma]))$ dove σ è un cammino da $\tilde{x}_0$ a $\gamma(\tilde{x}_0)$. Si prova (esercizio) che H è un omomorfismo di gruppi. Infine, chiaramente $\ker H = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. □

DEFINIZIONE 9.10. Un rivestimento $(\tilde{X}, \pi)$ di X si dice *rivestimento universale* se $\Pi_1(\tilde{X}) = \{\mathsf{id}\}$.

Si può provare che ogni spazio topologico di Hausdorff, connesso e localmente connesso per archi ammette un rivestimento universale. Per il Teorema 9.3 se $(\tilde{X}_1, \pi_1)$, $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ sono due rivestimenti universali di X allora esiste un omeomorfismo $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $\pi_2 \circ f = \pi_1$. Parlemo quindi *del* rivestimento universale di uno spazio (sottointendendo l'unicità a meno di omeomorfismi che rispettano il rivestimento come detto sopra). Il rivestimento universale è di Galois.

OSSERVAZIONE 9.11. Sia $(\tilde{X}, \pi)$ il rivestimento universale di X. Per il Teorema 9.9 risulta $\Gamma_\pi(\tilde{X}, X) = \Pi_1(X, x_0)$. Inoltre, per ogni $x \in X$, la *fibra* $\pi^{-1}(x)$ è in naturale corrispondenza uno-uno con $\Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$. Infatti, fissato $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x)$, ad ogni $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ si associa in modo univoco $\gamma_{\tilde{x}} \in \Gamma_\pi(\tilde{X}, X)$ tale che $\gamma_{\tilde{x}}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}$.

ESERCIZIO 9.12. Sia $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definita da $\pi(x) := \exp(2\pi i x)$. Verificare che $(\mathbb{R}, \pi)$ è il rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$. Calcolare direttamente il gruppo delle trasformazioni del rivestimento.

ESERCIZIO 9.13. Provare che la proiezione naturale da $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{RP}^n$ definisce un rivestimento a due fogli. Poiché $\Pi_1(\mathbb{S}^n) = \{\mathsf{id}\}$ per $n > 1$, provare che $\Pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$.

PROPOSIZIONE 9.14. *Sia M una varietà differenziabile reale (risp. complessa). Sia $(\tilde{M}, \pi)$ un rivestimento di M. Allora esiste una unica (a meno di diffeomorfismi/biolomorfismi) struttura differenziabile reale (risp. complessa) su $\tilde{M}$ che renda π differenziabile (risp. olomorfa).*

DIMOSTRAZIONE. A meno di raffinamenti, si può supporre che esista un atlante $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j\in J}$ di M tale che U_j sia un intorno onesto per ogni $j \in J$. Sia $\pi^{-1}(U_j) = \cup_k \tilde{U}_{jk}$ tale che gli $\tilde{U}_{jk}$ siano disgiunti per k diversi e $\pi : \tilde{U}_{jk} \to U_j$ sia un omeomorfismo. Si definisce allora un atlante per $\tilde{M}$ tramite $\{(\tilde{U}_{jk}, \varphi_j \circ \pi)\}$. Si verifichi per esercizio che con tale scelta $\tilde{M}$ è una varietà differenziabile reale (o complessa) e che $\pi : \tilde{M} \to M$ è differenziabile (o olomorfa). Inoltre, si provi l'unicità. □

Sia M una varietà connessa e $(\tilde{M}, \pi)$ il suo rivestimento universale con la naturale struttura di varietà data dalla proposizione precedente. Se $U \subset M$ è un intorno onesto, allora $\pi^{-1}(U)$ è in corrispondenza naturale con $U \times \Pi_1(M)$. Infatti, se $\pi^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti $\{\tilde{U}_j\}$ ciascuno diffeomorfo a U tramite π, il gruppo $\Pi_1(M)$, che coincide con il gruppo delle trasformazioni di rivestimento per quanto visto, permuta in modo libero e transitivo i $\tilde{U}_j$, dunque, dato un $\tilde{U}_{j_0}$ si ha

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{\gamma \in \Gamma_\pi(\tilde{M}, M)} \gamma(\tilde{U}_{j_0}).$$

Di più, se dotiamo $\Pi_1(M)$ della topologia discreta (e dunque diventa una varietà di dimensione zero!), l'identificazione precedente è un diffeomorfismo.

Questo è l'esempio prototipo dei fibrati principali di cui discuteremo nel seguito.

10. Rudimenti della teoria dei Gruppi di Lie

Per approfondimenti si veda, ad esempio, [**5**].

DEFINIZIONE 10.1. Un gruppo G si dice un *gruppo di Lie* se G ha una struttura di varietà differenziabile tale per cui l'applicazione $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh^{-1} \in G$ sia differenziabile.

Il gruppo di Lie si dice complesso se G è una varietà complessa e $G\times G \ni (g,h) \mapsto gh^{-1} \in G$ è olomorfa.

ESEMPIO 10.2. Il gruppo lineare $GL(n,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie rispetto alla moltiplicazione di matrici. Infatti, date $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$, le entrate della matrice AB^{-1} sono polinomi e quozienti delle entrate di A, B. Similmente, $GL(n,\mathbb{C})$ è un gruppo di Lie complesso.

ESERCIZIO 10.3. Provare che $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$ sono gruppi di Lie. [*Suggerimento*: $\mathbb{S}^1$ si può identificare con l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 mentre $\mathbb{S}^3$ è l'insieme dei quaternioni di modulo 1]. Si può provare che le uniche sfere che sono gruppi di Lie sono proprio $\mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^3$, infatti, le sfere di dimensione pari non possono essere gruppi di Lie perché non sono *parallelizzabili* (cfr Esercizio 3.11 del Capitolo 2). Per le sfere di dimensione dispari, si può provare che solo $\mathbb{S}^7$ è parallelizzabile, ma non è un gruppo di Lie. Questo segue anche dal fatto, che non proveremo, che per un gruppo di Lie il cui primo gruppo di coomologia di de Rham è banale, necessariamente il terzo gruppo di coomologia di de Rham è non banale.

DEFINIZIONE 10.4. Un sottogruppo H di un gruppo di Lie G si dice un *sottogruppo di Lie* se H è una sottovarietà immersa di G.

ESEMPIO 10.5. Nel gruppo di Lie $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ si consideri il sottogruppo $T := \{(e^{ti}, e^{t\alpha i}) : t \in \mathbb{R}\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora T è un sottogruppo di Lie essendo una sottovarietà immersa. Se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ però T non è una sottovarietà regolare (perché T è denso in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

ESEMPIO 10.6. Possiamo vedere $GL(n,\mathbb{C})$ come sottogruppo di Lie (reale) di $GL(2n,\mathbb{R})$ nel modo seguente. Se $A \in GL(n,\mathbb{C})$, si scriva $A = X + iY$, dove X è la matrice $n\times n$ formata dalle parti reali delle entrate di A e Y è la matrice $n \times n$ formata dalle parti immaginarie delle entrate di A. Si pone

$$A^r := \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $(AB)^r = A^r B^r$. Inoltre, se $\det A \neq 0$, allora $\det A^r \neq 0$. Dunque $GL(n,\mathbb{C}) \ni A \mapsto A^r \in GL(2n,\mathbb{R})$ è un omomorfismo di gruppi e, poiché $A^r = \mathsf{id}$ se e solo se $A = \mathsf{id}$, è iniettivo. L'applicazione $A \mapsto A^r$ è poi reale analitica. Denotiamo con $GL(n,\mathbb{C})^r$ l'immagine di $GL(n,\mathbb{C})$ in $GL(2n,\mathbb{R})$. Allora si verifica facilmente che

$$GL(n,\mathbb{C})^r = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) : AJ = JA\},$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{id} \\ -\mathsf{id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiamo ora $F : GL(2n,\mathbb{R}) \to \mathsf{Mat}(2n \times 2n,\mathbb{R})$ tramite $F(A) := AJ - JA$. Risulta $GL(n,\mathbb{C})^r = F^{-1}(O)$. L'applicazione F è lineare (quindi di classe C^∞) e dunque $dF = F$. Se $A \in GL(2n,\mathbb{R})$ e $B \in \mathsf{Mat}(2n \times 2n,\mathbb{R})$, si ha $dF_A(B) = BJ - JB$. Si verifica allora che $B \in \ker dF_A$ se e solo se

$$B = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}.$$

Con X, Y matrici $n \times n$. Pertanto $\ker dF_A$ ha dimensione $2n^2$, indipendentemente da A. Per il Teorema 7.10 risulta che $GL(n, \mathbb{C})^r$ è una sottovarietà di $GL(2n, \mathbb{R})$ di codimensione $2n^2$, ovvero dimensione (reale) $4n^2 - 2n^2 = 2n^2$.

Definiamo e studiamo brevemente alcuni gruppi di Lie classici.

10.1. Il gruppo ortogonale $O(n)$. Si definisce come

$$O(n) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t A = I\}.$$

Proviamo che $O(n)$ è un sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$ di codimensione $n(n+1)/2$ (e di dimensione $n(n-1)/2$. È chiaramente un sottogruppo chiuso di $GL(n, \mathbb{R})$.

Sia $F(A) := A^t A - I$. L'applicazione $F : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathsf{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ è di classe C^∞. Calcoliamo il suo differenziale (identificando $\mathsf{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{4n^2}$). Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $X \in \mathsf{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$. Allora

$$dF_A(X) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[F(A + hX) - F(A)] = A^t X + X^t A.$$

Pertanto il nucleo di dF_A è dato da $\{X : A^t X + X^t A = 0\}$. In particolare, il nucleo di dF_I è dato da $\{X : X + X^t = 0\}$, ovvero sono le matrici antisimmetriche. Notiamo che l'applicazione $T : \ker dF_I \to \ker dF_A$ definita da $X \mapsto (A^t)^{-1} X$ è un isomorfismo di gruppi (rispetto alla somma di matrici), pertanto $\ker dF_A$ ha rango costante. Poiché $\ker dF_{\mathsf{id}}$ è lo spazio delle matrici antisimmetriche, che ha dimensione $n(n-1)/2$, il rango di dF_A è costante uguale a $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Dunque per il Teorema 7.10, $O(n)$ è una sottovarietà di $GL(n, \mathbb{R})$ di codimensione $n(n+1)/2$.

ESERCIZIO 10.7. Provare che $O(n)$ è compatto ma non è connesso.

10.2. Il gruppo speciale lineare $SL(n, \mathbb{R})$. Si definisce come

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

È un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$ poiché $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è un omomorfismo di gruppi per il teorema di Binet (considerando $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ come gruppo moltiplicativo) e $SL(n, \mathbb{R}) = \ker(\det)$. È inoltre chiuso. Sia X una matrice $n \times n$. Con una semplice induzione si vede che

$$\det(I + hX) = 1 + h\mathsf{tr}(X) + o(|h|).$$

Pertanto $d(\det)_I(X) = \mathsf{tr}(X)$. Dunque il differenziale dell'applicazione $A \mapsto \det A$ è suriettivo vicino a I e per il Teorema 7.12, esiste dunque un intorno aperto $U \subset GL(n, \mathbb{R})$ di I tale che $SL(n, \mathbb{R}) \cap U$ è una sottovarietà. Ora, sia $A \in SL(n, \mathbb{R})$. Allora $U \ni B \mapsto B \cdot A$ è un diffeomorfismo da U in $U \cdot A$ che, per il teorema di Binet, manda $SL(n, \mathbb{R}) \cap U$ in $SL(n, \mathbb{R}) \cap (U \cdot A)$. Ciò prova che $SL(n, \mathbb{R})$ è una sottovarietà di $GL(n, \mathbb{R})$ di codimensione 1.

10.3. Il gruppo speciale ortogonale $SO(n)$. È definito da

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

Osserviamo che se $A \in O(n)$, allora $\det A = \pm 1$, da cui segue che $SO(n) = \det^{-1}(1)$ è un *aperto* in $O(n)$. Poiché se $A, B \in SO(n)$ allora $A \cdot B \in SO(n)$, risulta che $SO(n)$ è un gruppo di Lie di dimensione $n(n-1)/2$.

ESERCIZIO 10.8. Provare che $SO(n)$ è connesso per archi [*Suggerimento:* se $A \in SO(n)$ allora A è coniugata attraverso una matrice ortogonale ad una matrice $n \times n$ del tipo

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

dove I_k è la matrice identica $k \times k$ e D è formata da blocchi 2×2 sulla diagonale del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \in (0, \pi]$ (si noti che i -1 sono in numero pari essendo $\det A = 1$)].

Provare poi che $O(n)$ ha esattamente due componenti connesse.

ESERCIZIO 10.9. Provare che $SO(2) = \mathbb{S}^1$.

10.4. Il gruppo simplettico $Sp(n, \mathbb{R})$. È definito tramite

$$Sp(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^t J A = J\},$$

dove J è definita nell'Esempio 10.6.

ESERCIZIO 10.10. Provare che $Sp(n)$ è un gruppo di Lie e calcolarne la dimensione.

10.5. Il gruppo unitario $U(n)$. È definito tramite

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \overline{A}^t A = I\}.$$

ESERCIZIO 10.11. Provare che $U(n)$ è un gruppo di Lie *reale* (ma non complesso) e calcolarne la dimensione.

ESERCIZIO 10.12. Provare che, denotando con $U(n)^r$ l'immagine di $U(n)$ in $GL(n, \mathbb{C})^r$ (si veda l'Esempio 10.6), si ha $U(n)^r = Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n)$.

10.6. Il gruppo speciale unitario $SU(n)$. È definito tramite

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

ESERCIZIO 10.13. Provare che $SU(n)$ è un gruppo di Lie *reale* (ma non complesso) e calcolarne la dimensione.

ESERCIZIO 10.14. Provare che $SU(2) = \mathbb{S}^3$.

Valgono i seguenti risultati:

TEOREMA 10.15. *Sia G un gruppo di Lie e sia H un suo sottogruppo.*

(1) *H è chiuso (nella topologia) se e solo se H è un sottogruppo di Lie di G che è una sottovarietà regolare di G.*
(2) *Se H è chiuso allora lo spazio quoziente G/H è una varietà differenziabile (detta varietà omogenea) e l'applicazione naturale $\pi : G \to G/H$ è differenziabile.*

Qua G/H indica come d'uso l'insieme delle classi di equivalenza di G date dalla relazione $g \sim h$ se $gh^{-1} \in H$. G/H è munito della topologia quoziente. Se H è un sottogruppo normale di G, chiuso nella topologia, allora G/H è anch'esso un gruppo di Lie.

TEOREMA 10.16. *Sia G un gruppo di Lie e sia $(\tilde{G}, \pi)$ il suo rivestimento universale. Sia $e \in G$ l'elemento neutro di G e sia $\tilde{e} \in \tilde{G}$ tale che $\pi(\tilde{e}) = e$. Allora esiste una unica struttura di gruppo di Lie su $\tilde{G}$ tale che $\tilde{e}$ sia l'identità e $\pi : \tilde{G} \to G$ un morfismo di gruppi, differenziabile come applicazione tra varietà. In più,* $\ker \pi = \Gamma_\pi(\tilde{G}, G) = \Pi_1(G)$ *è discreto ed è contenuto nel centro di $\tilde{G}$.*

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con $m : G \times G \to G$ il prodotto di gruppo, $m(g, h) := gh$. La coppia $(\tilde{G} \times \tilde{G}, \pi \times \pi)$ è il rivestimento universale di $G \times G$. L'applicazione $F := m \circ (\pi \times \pi) : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$ ha banalmente la proprietà che $F_*(\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})) = \mathsf{id} = \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}))$, dunque si applica il Teorema 9.3.3 e si definisce una unica applicazione $\tilde{m} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ imponendo che $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$. Similmente si definisce l'inverso sollevando la composizione di π con $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$.

Utilizzando le proprietà dei rivestimenti si verifichino poi per esercizio le asserzioni del teorema. □

OSSERVAZIONE 10.17. Si può provare che $\Pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$ per $n \geq 3$. Si definisce allora il *gruppo di Lie Spin*(n) come il rivestimento universale (a due fogli) di $SO(n)$.

11. Azioni di gruppi

Se M è una varietà differenziabile si indica con $\mathsf{Diff}(M)$ il gruppo dei diffeomorfismi di M in se con il prodotto dato dalla composizione, ovvero, $f \in \mathsf{Diff}(M)$ se $f : M \to M$ è un diffeomorfismo. Nella categoria olomorfa si considerano biolomorfismi.

DEFINIZIONE 11.1. Sia G un gruppo e sia M una varietà differenziabile. Si dice che G *agisce su* M se esiste un omomorfismo di gruppi $G \mapsto \mathsf{Diff}(M)$.

Se G agisce su M, si identifica un elemento $g \in G$ con la sua immagine in $\mathsf{Diff}(M)$.

DEFINIZIONE 11.2. Sia G un gruppo che agisce su una varietà M. Si dice che l'azione è *fedele* o *effettiva* se l'omomorfismo $G \mapsto \mathsf{Diff}(M)$ è iniettivo.

Si dice che l'azione è *propriamente discontinua* se dati K_1, K_2 compatti di M, l'insieme $\{g \in G : g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$ è finito.

Si dice che l'azione è *libera* se dato $g \in G$ tale che $g(x) = x$ per qualche $x \in M$ risulta $g = \mathsf{id}_G$.

ESERCIZIO 11.3. Sia M una varietà e sia $(\tilde{M}, \pi)$ un rivestimento, munito della naturale struttura di varietà indotta da M. Sia $\Gamma_\pi(\tilde{M}, M)$ il gruppo delle trasformazioni del rivestimento. Provare che $\Gamma_\pi(\tilde{M}, M)$ agisce liberamente e in modo propriamente discontinuo su $\tilde{M}$.

Se G è un gruppo che agisce su M, l'*orbita* di un elemento $x \in M$ è definita da $O_G(x) := \{g(x) : g \in G\}$ (talvolta l'orbita viene indicata anche con $G \cdot x$). Si può definire una relazione di equivalenza su M tramite $x \sim y$ se $y \in O_G(x)$. Per esercizio di verifichi che è effettivamente una relazione di equivalenza. Si indica con M/G l'insieme delle orbite di G, e si denota con $\pi : M \to M/G$ l'applicazione naturale che a $x \in M$ associa la sua classe di equivalenza. Si munisce M/G della topologia quoziente.

ESERCIZIO 11.4. Sia M una varietà reale connessa. Provare che $\mathsf{Diff}(M)$ agisce in modo *transitivo* su M, ovvero, per ogni $x, y \in M$ esiste $f \in \mathsf{Diff}(M)$ tale che $f(x) = y$. Pertanto $M/\mathsf{Diff}(M)$ è un punto. [Sugg.: si consideri un atlante $\{(U_p, \varphi_p)\}_{p\in M}$ di M composto da carte locali in modo tale che $\varphi_p(U_p)$ sia $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ e $\varphi_p(p) = 0$. Dati $x_0, y_0 \in B$ con $\|x_0\|, \|y_0\| < 1/2$, esiste un diffeomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = x$ per $\|x\| > 2/3$ e $f(x_0) = y_0$. Per ogni $p \in M$ fissato, ciascun diffeomorfismo f di $\mathbb{R}^n$ si trasporta ad un diffeomorfismo $\tilde{f}$ di M definito da $\tilde{f}(x) = x$ per $x \in M \setminus U_p$, $f(x) = \varphi_p^{-1}(f(\varphi_p(x)))$ per $x \in U_p$. Dunque $\mathsf{Diff}(M)$ agisce localmente in modo transitivo su M. Usare poi la connessione di M per provare che l'azione è transitiva su tutto M.]

Il precedente esercizio è falso nella categoria olomorfa. Esistono varietà complesse per cui il gruppo di biolomorfismi non agisce in modo transitivo sulla varietà stessa.

TEOREMA 11.5. *Sia G un gruppo e sia M una varietà differenziabile. Se G opera* liberamente *e in modo propriamente discontinuo su M, allora M/G ha una naturale struttura di varietà differenziabile tale che la proiezione naturale $\pi : M \to M/G$ sia differenziabile. Inoltre (M, π) è un rivestimento di Galois di M/G e G è il gruppo delle trasformazioni del rivestimento.*

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa vediamo che ogni $x \in M$ ha un intorno U relativamente compatto in M tale che $g(U) \cap U \neq \emptyset$ solo se $g = \mathsf{id}_G$. Infatti, sia $\{U_j\}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile di x tale che $U_{j+1} \subset U_j$ e U_j relativamente compatto in M per ogni j. Poniamo

$$G_j := \{g \in G : g(U_j) \cap U_j \neq \emptyset\}.$$

Poiché G opera in modo propriamente discontinuo, si ha che G_j è finito per ogni j e inoltre $G_{j+1} \subset G_j$ (poiché $U_{j+1} \subset U_j$). Asseriamo che esiste j_0 tale che $G_{j_0} = \{\mathsf{id}_G\}$ (e dunque scegliamo $U = U_{j_0}$). Se non fosse cosi, allora esisterebbe $g \neq \mathsf{id}_G$ tale che $g \in G_j$ per tutti i j, ovvero $g(U_j) \cap U_j \neq \emptyset$ per tutti i j. Quindi $\bigcap_j g(\overline{U}_j) \cap \overline{U}_j \neq \emptyset$. D'altra parte $\bigcap \overline{U}_j = \{x\}$ e $\bigcap g(\overline{U}_j) = \{g(x)\}$, pertanto

$$\{g(x)\} = \bigcap_j g(\overline{U}_j) \cap \overline{U}_j = \{x\},$$

e dunque $g(x) = x$, contro il fatto che G agisce liberamente.

Poiché $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ e $g(U)$ è aperto in M, la mappa π è aperta. D'altra parte $g(U) \cap U = \emptyset$ per $g \neq \mathsf{id}_G$ e pertanto $\pi|_U : U \to \pi(U)$ è iniettiva. Dunque π è un omeomorfismo locale. Di più, per quanto visto si verifica subito che l'aperto $\pi(U)$ è un intorno onesto, e dunque $\pi : M \to M/G$ è un rivestimento di Galois.

ESERCIZIO 11.6. Provare che M/G è di Hausdorff e a base numerabile.

Dobbiamo ora provare che M/G è una varietà. Per farlo occorre definire delle carte locali. Sia $x \in M$ e sia (U_j, φ_j) un intorno coordinato di x in M. Sia U un intorno di x contenuto e relativamente compatto in U_j tale che $g(U) \cap U \neq \emptyset$ solo se $g = \mathsf{id}_G$. Definiamo una carta locale $\widetilde{\varphi}_j : \pi(U) \to \varphi_j(U)$ tramite $\widetilde{\varphi}_j([p]) := \varphi_j(\pi|_U{}^{-1}([p]))$.

ESERCIZIO 11.7. Provare che i cambiamenti di coordinate sono differenziabili e che $\pi : M \to M/G$ è differenziabile.

$\square$

ESEMPIO 11.8. Sia $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ un insieme di $2n$ vettori $\{w_1, \ldots, w_{2n}\}$ che sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Si definisca G il gruppo di biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$ i cui elementi sono della forma $T(z) = z + \sum_{j=1}^{2n} p_j w_j$ dove $p_j \in \mathbb{Z}$ per $j = 1, \ldots, 2n$. In altri termini, G è il reticolo di $\mathbb{C}^n$ definito da $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{w_1, \ldots, w_{2n}\}$ e agisce su $\mathbb{C}^n$ per traslazioni. Allora G opera liberamente e in modo propriamente discontinuo su $\mathbb{C}^n$. Il quoziente, indicato $\mathbb{C}^n/\Gamma$ è una varietà complessa compatta di dimensione n che si dice *toro complesso*.

ESEMPIO 11.9. Se M è una varietà e $(\tilde{M}, \pi)$ un suo rivestimento di Galois con la struttura naturale di varietà ereditata da M allora per il Teorema 9.6 si ha $\tilde{M}/\Gamma_\pi(\tilde{M}, M) = M$. In particolare ciò vale sempre per il rivestimento universale.

Pertanto, se $\tilde{M}$ è una varietà semplicemente connessa e Γ è un sottogruppo di $\mathsf{Diff}(\tilde{M})$ che agisce liberamente e in modo propriamente discontinuo su $\tilde{M}$ allora $M := \tilde{M}/\Gamma$ è una varietà e l'applicazione naturale $\pi : \tilde{M} \to M$ è un rivestimento di Galois. Più in generale il Teorema 11.5 permette di classificare tutti i rivestimenti di un dato spazio, enunciamo il risultato per le varietà:

TEOREMA 11.10. *Sia M una varietà e sia $\tilde{M}$ il suo rivestimento universale. Sia $H \subset \Pi_1(M)$. Allora $\tilde{M}/H$ è una varietà ed è un rivestimento di M. Tale rivestimento è di Galois se e solo se Γ è normale in $\Pi_1(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \tilde{M} \to M$ l'applicazione di rivestimento. Ricordiamo che $\Pi_1(M)$ si identifica con il gruppo delle trasformazioni del rivestimento $\Gamma := \Gamma_\pi(\tilde{M}, M)$ che agisce in modo libero e propriamente discontinuo su $\tilde{M}$ e che $M = \tilde{M}/\Gamma$. Essendo H un sottogruppo di Γ, anche H agisce in modo libero e propriamente discontinuo su $\tilde{M}$ e pertanto $\tilde{M}/H$ è una varietà e $\rho : \tilde{M} \to \tilde{M}/H$ è un rivestimento.

Si definisce ora una applicazione $\sigma : \tilde{M}/H \to M$ nel modo seguente: se $\rho(p) \in \tilde{M}/H$ allora $\sigma(\rho(p)) := \pi(p)$. Poiché H è contenuto in Γ, risulta che tale applicazione è ben definita (ovvero non dipende dal rappresentante $p \in M$ scelto per l'orbita di H). Inoltre per costruzione $\sigma \circ \rho = \pi$. Da qui si ottiene subito che $\tilde{M}/H$ è un rivestimento di M.

Per l'ultima osservazione, si noti che H è il gruppo delle trasformazioni di rivestimento di $\tilde{M} \to \tilde{M}/H$ e dunque $\Pi_1(\tilde{M}/H) = H$. Essendo

$$\sigma_* : H = \Pi_1(\tilde{M}/H) \to \Pi_1(M) = \Gamma$$

iniettiva, ne segue che $\tilde{M}/H$ è di Galois se e solo se H è normale in Γ. $\square$

CAPITOLO 2

Fibrati

1. Sommersioni, fibrazioni e fibrati

DEFINIZIONE 1.1. Siano E, M due varietà e sia $\pi : E \to M$ una mappa differenziabile. Diciamo che (E, M, π) è una *sommersione* se π è suriettiva e se $d\pi_p$ è suriettivo per ogni $p \in E$.

DEFINIZIONE 1.2. Sia F una varietà. Una *fibrazione* con fibra F è una sommersione (E, M, π) tale che per ogni $x \in M$ esistono un intorno U ed un diffeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ con la proprietà che, posto $E_x := \pi^{-1}(x)$, $\varphi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times F$ è un diffeomorfismo. La varietà E si dice lo *spazio totale* della fibrazione, M è la *base* e F è la *fibra*.

Non ogni sommersione è una fibrazione. Ad esempio, se $\pi : E \to M$ è una fibrazione e $p \in E$, allora $\pi : E \setminus p \to M$ è una sommersione che non è una fibrazione. Vale comunque il seguente risultato:

TEOREMA 1.3 (Ehresmann). *Siano M, N due varietà reali e sia $\pi : E \to N$ una sommersione (di classe almeno C^2). Se π è propria allora (E, M, π) è una fibrazione.*

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, [**7**, Thm. 1.2.38]. In particolare, se (E, M, π) è una sommersione e E è compatta, allora (E, M, π) è una fibrazione.

DEFINIZIONE 1.4. Sia G un gruppo di Lie. Una *fibrazione* (E, M, F, π) si dice un *fibrato* con *gruppo di struttura* G se

1. il gruppo G agisce effettivamente su F (ovvero $G \mapsto \mathsf{Diff}(F)$ è iniettiva),
2. esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M (detto *atlante trivializzante* per E) tale che per ogni α esiste un diffeomorfismo $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ (detto di trivializzazione locale) con la proprietà che se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ esiste una mappa liscia $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ tale che
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, f) = (x, g_{\alpha\beta}(x) f)$$
per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $f \in F$.

Le funzioni $\{g_{\alpha\beta}\}$ si dicono *funzioni di transizione* locali del fibrato.

Dalla definizione di fibrato si verifica facilmente che le funzioni di transizione verificano le *identità di cociclo* seguenti:

1. $g_{\alpha\alpha} = \mathsf{id}_G$,
2. $g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} = \mathsf{id}_G$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,
3. $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = \mathsf{id}_G$ su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 1.5. Siano M, M' due varietà. Sia E un fibrato su M e E' un fibrato su M'. Un *morfismo di fibrati* è una coppia (f, φ) di mappe tali che $f : M \to M'$, $\varphi : E \to E'$ sono mappe C^∞ e $\pi_{E'} \circ \varphi = f \circ \pi_E$. Se le mappe f, φ sono diffeomorfismi i due fibrati si dicono *equivalenti*.

Se $M = M'$ diremo che due fibrati su M sono equivalenti se esiste una equivalenza di fibrati (f, φ) con $f = \mathsf{id}_M$.

OSSERVAZIONE 1.6. Osserviamo che per definizione, se due fibrati E, E' sono equivalenti, le loro fibre sono diffeomorfe (il diffeomorfismo essendo dato dalla restrizione alla fibra del diffeomorfismo tra E ed E').

DEFINIZIONE 1.7. Sia $U \subset M$ un aperto. Se E è un fibrato su M tale che $E|_U$ sia equivalente al fibrato banale $U \times F$, si dice che E è *banale* su U.

PROPOSIZIONE 1.8. *Sia M una varietà. Sia E un fibrato su M con fibra F e gruppo di struttura G. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^E\}$ un atlante trivializzante di E con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$. Sia E' un altro fibrato su M con atlante trivializzante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha^{E'}\}$, fibra F', gruppo di struttura G' e funzioni di transizione $\{h_{\alpha\beta}\}$. Una mappa $\psi : E \to E'$ è una equivalenza di fibrati se per ogni α, posto $\psi_\alpha := (\psi'_\alpha, \psi''_\alpha) := \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{E^{-1}} : U_\alpha \times F \to U_\alpha \times F'$, risulta $\psi'_\alpha = \mathsf{id}$ e per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha*

$$\psi''_\beta(x,t) = h_{\beta\alpha}(x)\psi''_\alpha(x, g_{\alpha\beta}(x)t). \tag{1.1}$$

Viceversa, se esiste una famiglia $\{\psi_\alpha = (\psi'_\alpha, \psi''_\alpha)\}$ di mappe liscie da $U_\alpha \times F \to U_\alpha \times F'$ tali che $\psi'_\alpha = \mathsf{id}$ e che soddisfa (1.1) *e tale che per ogni x fissato $\psi''_\alpha(x, \cdot)$ è un diffeomorfismo, allora esiste ψ equivalenza di fibrati tale che $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{E^{-1}}$ per ogni α.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(x,t) \in U_\alpha \times F$. Si consideri la composizione ψ_α definita da

$$U_\alpha \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha^{E^{-1}}} \pi_E^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\psi} \pi_{E'}^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{E'}} U_\alpha \times F'.$$

Le (1.1) seguono allora da

$$\psi_\beta = \varphi_\beta^{E'} \circ \psi \circ \varphi_\beta^{E^{-1}} = \varphi_\beta^{E'} \circ \varphi_\alpha^{E'^{-1}} \circ \varphi_\alpha^{E'} \circ \psi \circ \varphi_\alpha^{E^{-1}} \circ \varphi_\alpha^E \circ \varphi_\beta^{E^{-1}}.$$

Viceversa, le (1.1) sono condizioni di compatibilità che consentono di incollare le $\{\psi_\alpha\}$ ad una equivalenza di fibrati. □

Le funzioni di transizione determinano i fibrati a meno di equivalenze:

TEOREMA 1.9. *Siano M e F due varietà. Sia G un gruppo di Lie che agisce effettivamente su F. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M tale che se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ esistono mappe liscie $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ che verificano le identità di cociclo. Allora esiste un fibrato E con base M, fibra F e con gruppo di struttura G che ha $\{g_{\alpha\beta}\}$ come funzioni di transizione. Tale fibrato è unico a meno di equivalenze di fibrati.*

DIMOSTRAZIONE. A meno di raffinamenti del ricoprimento $\{U_\alpha\}$, possiamo supporre che $\{U_\alpha\}$ sia anche un atlante coordinato di M.

Poniamo $E := \bigsqcup(U_\alpha \times F)/\sim$. Dove $(x,f) \sim (y,f')$ se esistono α,β tali che $(x,f) \in U_\alpha \times F$, $(y,f') \in U_\beta \times F$, $x = y$ e $f = g_{\alpha\beta}(x)f'$.

Poiché $\{g_{\alpha\beta}\}$ soddisfano le identità di cociclo la relazione $\sim$ è di equivalenza. Si pone dunque su E la topologia quoziente determinata da $\bigsqcup(U_\alpha \times F)$. La mappa $\pi : E \to M$ definita da $[(x,f)] \mapsto x$ è continua. Si definisce poi $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ tramite $\varphi_\alpha[(x,f)] := (x,f)$ per $(x,f) \in U_\alpha \times F$ (si osservi che questa mappa è ben definita poiché ogni elemento in $\pi^{-1}(U_\alpha)$ ha un unico rappresentante in $U_\alpha \times F$ essendo $g_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}$). La mappa φ_α è biunivoca ed è l'inversa della mappa naturale $\rho : \bigsqcup(U_\alpha \times F) \to E$ ristretta a $U_\alpha \times F$. Si verifica facilmente che ρ è aperta e dunque φ_α è un omeomorfismo. L'atlante per E si ottiene allora componendo tale mappa con carte locali di M e di F nel modo seguente. Sia $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ un atlante di M, $\{W_j, \theta_j\}$ un atlante per F. Allora $\{[U_\alpha \times W_j], \widetilde{\varphi}_{\alpha,j})\}$ (dove $[\cdot]$ indica la classe di equivalenza in E) è un atlante per E, definendo $\widetilde{\varphi}_{\alpha,j} : [U_\alpha \times W_j] \to \psi_\alpha(U_\alpha) \times \theta_j(W_j)$ tramite

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha,j}([x,f]) := (\psi_\alpha \times \theta_j) \circ \varphi_\alpha([x,f]) = (\psi_\alpha(x), \theta_j(f)) \quad (x,f) \in U_\alpha \times W_j.$$

Con notazione ovvia, per $(p,t) \in \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \theta_k(W_j \cap W_k)$

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{\alpha,j} \circ \widetilde{\varphi}_{\beta,k}^{-1}(p,t) &= \widetilde{\varphi}_{\alpha,j}([\psi_\beta^{-1}(p), \theta_k^{-1}(t)]) = \widetilde{\varphi}_{\alpha,j}([\psi_\beta^{-1}(p), g_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1}(p))\theta_k^{-1}(t)]) \\ &= (\psi_\alpha(\psi_\beta^{-1}(p)), \theta_j(g_{\alpha\beta}(\psi_\beta^{-1}(p))\theta_k^{-1}(t)))\end{aligned}$$

provando che i cambiamenti di carta sono differenziabili. Si può poi verificare che E è Hausdorff e paracompatto E e dunque è effettivamente una varietà. Si vede facilmente ora che E è un fibrato con gruppo di struttura G, fibra F e base M.

L'unicità segue subito dalla Proposizione 1.8. $\square$

2. Fibrati vettoriali e fibrati principali

DEFINIZIONE 2.1. Una fibrazione (E, M, π) con fibra $\mathbb{R}^k$ e gruppo di struttura $GL(k,\mathbb{R})$ si dice un *fibrato vettoriale* di *rango* k se esiste un atlante trivializzante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ per E tale che per ogni $x \in U_\alpha$ la mappa $\varphi_\alpha|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ è un *isomorfismo di spazi vettoriali*. Ovvero, se $\varphi_\alpha(v) = (x, \varphi''_\alpha(x,v)) \in \{x\} \times \mathbb{R}^k$ per $v \in E_x$, risulta

$$\varphi''_\alpha(x, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi''_\alpha(x,v) + \mu \varphi''_\alpha(x,w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v, w \in E_x.$$

La definizione di fibrato vettoriale richiede alcuni commenti. Essendo la fibra uno spazio vettoriale, è naturale richiedere che le funzioni di trivializzazione preservino tale struttura. D'altra parte, si possono definire dei fibrati con fibra $\mathbb{R}^k$ e gruppo di struttura $GL(k,\mathbb{R})$ che, per l'atlante trivializzante dato, non hanno funzioni di transizione che sono lineari sulle fibre. Un semplice esempio è il seguente:

ESEMPIO 2.2. Sia M una varietà e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un diffeomorfismo non lineare. Sia $E := M \times \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{U} := \{M\}$. Allora $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di M che trivializza E con la mappa

$\varphi : E \to M \times \mathbb{R}$ data da $\varphi(x, v) := (x, f(v))$. E è un fibrato con fibra $\mathbb{R}$ e gruppo di struttura $GL(1, \mathbb{R})$, ma l'atlante trivializzante scelto non lo rende un fibrato vettoriale.

D'altra parte, se E è un fibrato su M con fibra $\mathbb{R}^k$ e gruppo di struttura $GL(k, \mathbb{R})$ e con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, la costruzione del Teorema 1.9 definisce un fibrato vettoriale E' equivalente (come fibrato) a E per cui le trivializzazioni locali φ_α sono *lineari* sulle fibre, ovvero:

LEMMA 2.3. *Sia M una varietà e sia E un fibrato su M con fibra $\mathbb{R}^k$ e gruppo di struttura $GL(k, \mathbb{R})$. Allora esiste un fibrato vettoriale E' su M che è equivalente a E come fibrato.*

Nel seguito supporremo sempre che se E è un fibrato vettoriale, le funzioni di trivializzazione locale $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ siano lineari sulle fibre. Come notazione, poniamo

$$\varphi_{\alpha,x} := \varphi''_\alpha|_{E_x} : E_x \to \mathbb{R}^n.$$

Avvertiamo il lettore che, con un usuale lieve abuso di notazione, talvolta $\varphi_{\alpha,x}$ denoterà anche $\varphi_\alpha|_{E_x}$.

DEFINIZIONE 2.4. Siano M, M' due varietà. Sia E un fibrato vettoriale su M e E' un fibrato vettoriale su M'. Un morfismo (f, φ) di fibrati tra E, E' si dice un *morfismo di fibrati vettoriali* se per ogni $x \in M$ la mappa $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to E'_{f(x)}$ è un morfismo di spazi vettoriali.

Se E è un fibrato vettoriale su una varietà M e se $U \subseteq M$ è un aperto tale che $E|_U := \pi^{-1}(U)$ è equivalente come fibrato vettoriale al fibrato vettoriale banale $U \times \mathbb{R}^k$, diremo che E è *banale* su U.

Definiamo adesso un'altra classe importante di fibrati. Premettiamo alcune osservazioni.

Si dice che un gruppo di Lie G *agisce a destra* su una varietà F se esiste un anti-omomorfismo di gruppi $R : G \to \mathsf{Diff}(F)$, ovvero se $R(e) = \mathsf{id}$, $R(g^{-1}) = R(g)^{-1}$ e $R(gh) = R_h \circ R_g$ (cioé l'ordine di composizione è invertito). Ad esempio se G agisce (nel senso usuale) su F tramite $L : G \to \mathsf{Diff}(F)$, allora $R_g := L_{g^{-1}}$ è una azione a destra.

Se E è un fibrato con fibra G e gruppo di struttura G stesso, allora esiste una ovvia azione a destra del gruppo di struttura G sulla fibra data dalla moltiplicazione a destra del gruppo su se stesso. Formalmente, se $\theta : F \to G$ è un diffeomorfismo, allora $R : G \times F \to F$ è definito tramite

$$R_g(f) := \theta^{-1}(\theta(f)g).$$

Nel seguito, salvo quando necessario specificare, indicheremo semplicemente con fg l'azione a destra $R_g(f)$.

Possiamo adesso definire i fibrati principali come segue:

DEFINIZIONE 2.5. Sia G un gruppo di Lie. Una fibrazione (P, M, π) con fibra G e gruppo di struttura G si dice un *fibrato principale* se esiste un atlante trivializzante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ per P tale che per ogni $x \in U_\alpha$ la mappa $\varphi_\alpha|_{E_x} : P_x \to \{x\} \times G$ è *G-equivariante*. Ovvero, se $\varphi_\alpha(v) = (x, \varphi''_\alpha(x, v)) \in \{x\} \times G$ per $v \in P_x$, risulta

$$\varphi''_\alpha(x, vg) = \varphi''_\alpha(x, v)g \quad \forall g \in G, v \in P_x.$$

Notiamo che l'azione a destra del gruppo di struttura G sulla fibra di un fibrato principale commuta con la naturale azione di G sulla fibra richiesta dalla Definizione 1.4.

Utilizzando l'azione a destra di un gruppo di Lie su se stesso si definisce la nozione di morfismo tra fibrati principali:

DEFINIZIONE 2.6. Siano M, M' due varietà. Sia P un fibrato principale su M con gruppo di struttura G e sia P' un fibrato principale su M' con gruppo di struttura G'. Sia $\rho : G \to G'$ un morfismo di gruppi di Lie. Un morfismo (f, φ) di fibrati tra P, P' si dice un *ρ-morfismo di fibrati principali* se per ogni $x \in M$ la mappa $\varphi_x := \varphi|_{P_x} : P_x \to P'_{f(x)}$ ha la proprietà che $\varphi_x(pg) = \varphi_x(p)\rho(g)$ per ogni $p \in P_x$ e $g \in G$.

Qualora in un ρ-morfismo di fibrati principali non sia necessario puntualizzare il morfismo ρ, lo chiameremo semplicemente *morfismo di fibrati principali*.

Nuovamente, dalla costruzione del Teorema 1.9 si ha che, dato un fibrato con fibra un gruppo di Lie G e gruppo di struttura G, esiste un fibrato principale equivalente le cui funzioni di trivializzazione locale sono morfismi di fibrati principali, ovvero:

LEMMA 2.7. *Sia M una varietà e sia P un fibrato su M con fibra un gruppo di Lie G e gruppo di struttura G. Allora esiste un fibrato principale P' su M che è equivalente a P come fibrato.*

Un caso particolare di morfismo tra fibrati principali è il seguente:

DEFINIZIONE 2.8. Sia G un gruppo di Lie e sia $G' \subset G$ un suo sottogruppo di Lie, con $\rho : H \hookrightarrow G$ l'immersione naturale. Sia P un fibrato principale con gruppo di struttura G su M e sia P' un fibrato principale con gruppo di struttura G' su M. Si dice che P' è una *riduzione* di P (o che P' è ottenuto da P tramite *riduzione del gruppo strutturale*) se esiste un ρ-morfismo di fibrati principali (id_M, h) con $h : P' \to P$ iniettivo.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia P un fibrato principale con gruppo strutturale G su M. Sia H un sottogruppo di Lie di G. Allora si può ridurre il gruppo di struttura di P ad H se e solo se esiste un atlante trivializzante per P con funzioni di transizione a valori in H.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\{h_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione locali per P a valori in H. Per il Teorema 1.9, si definisce univocamente un fibrato principale P' con gruppo strutturale H. Ricordiamo che dalla costruzione si ha $P' := \bigsqcup (U_\alpha \times H)/\sim$, dove $(x, g) \sim (y, g')$ se esistono α, β tali che $(x, g) \in U_\alpha \times H$, $(y, g') \in U_\beta \times H$, $x = y$ e $g = h_{\alpha\beta}(x)g'$. Similmente, a meno di equivalenze di fibrati, $P := \bigsqcup (U_\alpha \times G)/\sim$, dove $(x, g) \sim (y, g')$ se esistono α, β tali che $(x, g) \in U_\alpha \times G$, $(y, g') \in U_\beta \times G$, $x = y$ e $g = h_{\alpha\beta}(x)g'$. Pertanto l'applicazione $U_\alpha \times H \to U_\alpha \times G$ definita per ogni α tramite $(x, h) \mapsto (x, h)$ passa al quoziente e determina un morfismo iniettivo di fibrati principali da P' a P.

Viceversa, supponiamo che $h : P' \to P$ sia una riduzione di fibrati principali. Sia $\{U_\alpha\}$ un atlante trivializzante P e P', e siano $\varphi'_\alpha : P'|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times H$ le trivializzazioni locali di P' (che assumiamo, come lecito, essere morfismi di fibrati principali) date da

$$\varphi'_\alpha(p') = (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x, p')) = (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x, e)p') \in U_\alpha \times H \quad \forall p' \in P'_x \simeq H.$$

Se $p \in P_x$, con $x \in U_\alpha$, allora esistono (non unici) $g \in G$ e $p' \in P'_x$ tali che $p = h(p')g$. Si noti che se anche $p = h(p'_1)g_1$ con $g_1 \in G$ e $p'_1 \in P'_x$ allora

$$gg_1^{-1} = h(p')^{-1}h(p'_1) = h(p'^{-1}p'_1) \in H,$$

pertanto essendo h un morfismo di fibrati principali, risulta $h(p') = h(p'_1)g_1g^{-1} = h(p'_1g_1g^{-1})$ e dunque $p' = p'_1g_1g^{-1}$. Da qui si ha che

$$\widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p')g = \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p'_1g_1g^{-1})g = \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p'_1)g_1g^{-1}g = \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p'_1)g_1.$$

Pertanto la mappa

$$\psi_\alpha : P|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times G,$$

definita per $p \in P_x$, $x \in U_\alpha$ tramite $\psi_\alpha(p) = (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p')g)$ risulta essere ben definita e si verifica facilmente essere un morfismo di fibrati principali. Dunque, le $\{\psi_\alpha\}$ sono delle nuove funzioni di trivializzazione locale per P. Per calcolare le funzioni di transizione associate, siano $\{\varphi'_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di P' a valori in H. Si osservi che con la notazione precedente $\varphi'_{\alpha\beta}(x) = \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,e)(\widetilde{\varphi}'_\beta(x,e))^{-1}$. Sia $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e sia $p \in P_x$ dato da $p = h(p')g$ per $p' \in P'_x$, $g \in G$. Sia $t = \widetilde{\varphi}'_\beta(x,p')g = \widetilde{\varphi}'_\beta(x,e)p'g$. Allora

$$\begin{aligned}\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x,t) &= (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p')g) = (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,p')(\widetilde{\varphi}'_\beta(x,p'))^{-1}t) \\ &= (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,e)p'p'^{-1}(\widetilde{\varphi}'_\beta(x,e))^{-1}t) = (x, \widetilde{\varphi}'_\alpha(x,e)(\widetilde{\varphi}'_\beta(x,e))^{-1}t) \\ &= (x, \varphi'_{\alpha\beta}(x)et) = (x, \varphi'_{\alpha\beta}(x)t),\end{aligned}$$

che prova che le funzioni di transizione sono $\{\varphi'_{\alpha\beta}\}$ a valori in H. □

OSSERVAZIONE 2.10. Sia P un fibrato principale con gruppo di struttura G su M. Sia K un sottogruppo compatto massimale di G. Si può provare che P ammette sempre una riduzione del gruppo di struttura a K.

OSSERVAZIONE 2.11. Sia E un fibrato vettoriale su M con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$. Allora il Teorema 1.9 e il Lemma 2.7 determinano un unico (a meno di equivalenze) fibrato principale $P(E)$ con gruppo di struttura $GL(n,\mathbb{R})$ con le stesse funzioni di transizione. Tale fibrato si dice il fibrato principale associato a E. Viceversa, per il Teorema 1.9 e il Lemma 2.3 ogni fibrato $GL(n,\mathbb{R})$-principale ha un (unico a meno di equivalenze) fibrato vettoriale associato.

OSSERVAZIONE 2.12. Sia E un fibrato vettoriale di rango k su M. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante trivializzante tale che φ_α siano lineari sulle fibre. Siano $v_j^\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_j)$ per $x \in U_\alpha$ e $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base standard di $\mathbb{R}^k$. Allora se $v \in E_x$ risulta $v = \sum a_j^\alpha v_j^\alpha(x)$ e $\varphi_\alpha(v) = (x, (a_1^\alpha, \ldots, a_k^\alpha))$. Per definizione di funzioni di transizione, su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ risulta

$$\begin{pmatrix} a_1^\alpha \\ \vdots \\ a_k^\alpha \end{pmatrix} = g_{\alpha\beta}(x) \begin{pmatrix} a_1^\beta \\ \vdots \\ a_k^\beta \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} v_1^\alpha(x) \\ \vdots \\ v_k^\alpha(x) \end{pmatrix} =^t [g_{\alpha\beta}(x)]^{-1} \begin{pmatrix} v_1^\beta(x) \\ \vdots \\ v_k^\beta(x) \end{pmatrix}.$$

In altri termini, le funzioni di transizione sono le matrici di cambiamento di base dalla base $\{v_j^\alpha(x)\}$ alla base $\{v_j^\beta(x)\}$.

DEFINIZIONE 2.13. Se M è una varietà (reale o complessa) e E è un fibrato su M con fibra $\mathbb{C}^k$ e gruppo di struttura $GL(k, \mathbb{C})$, si dice che E è un *fibrato vettoriale complesso* con fibra di rango (complesso) k.

Se E è un fibrato complesso su una varietà complessa e la mappa di proiezione $\pi : E \to M$ è olomorfa, si dice che E è un *fibrato olomorfo*.

PROPOSIZIONE 2.14. *Siano L, L' due fibrati olomorfi di rango uno su una varietà complessa M. Supponiamo L abbia funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e L' abbia funzioni di transizione $\{g'_{\alpha\beta}\}$ rispettivamente. Allora esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali $f : L \to L'$ se e solo se per ogni α esistono $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ olomorfe tali che*

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha}|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \frac{g_{\alpha\beta}}{g'_{\alpha\beta}} \tag{2.1}$$

per ogni α, β. Le $f_\alpha : \varphi_\alpha^{-1}(L|_{U_\alpha}) \to \varphi'_\alpha(L|_{U_\alpha})$ sono date da $\varphi'_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$, essendo $\varphi_\alpha, \varphi'_\alpha$ le funzioni di trivializzazione locale di L, L'.

DIMOSTRAZIONE. Segue subito da (1.1). $\square$

2.1. Il fibrato tangente. Costruiamo adesso il fibrato tangente ad una varietà reale. Una analoga costruzione vale nel caso complesso.

DEFINIZIONE 2.15. Sia M una varietà reale. Poniamo

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

TM si dice il *fibrato tangente* a M.

PROPOSIZIONE 2.16. *Sia M una varietà reale di dimensione n. Allora TM ha una struttura naturale di fibrato vettoriale di rango n con proiezione $\pi : TM \to M$ data da $T_pM \ni v \mapsto p \in M$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante per M con $\varphi_\alpha(p) = (x_1^\alpha(p), \ldots, x_n^\alpha(p))$. Poniamo $TM|_{U_\alpha} := \pi^{-1}(U_\alpha)$. Definiamo

$$\psi_\alpha : TM|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

come segue. Sia $p \in U_\alpha$ e sia $v \in T_pM$. Allora $v = \sum a_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}(p)$. Definiamo

$$\psi_\alpha(v) := (p, (a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)).$$

ψ_α è bijettiva e $\pi = \pi_1 \circ \psi_\alpha$ (essendo $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ la proiezione sul primo fattore).

Dotiamo TM della topologia meno fine che rende ψ_α degli omeomorfismi. Si verifica facilmente che TM è di Hausdorff e paracompatto e π è continua.

Troviamo l'espressione di $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ per $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Denotiamo con $\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p := \frac{\partial}{\partial x_j^\beta}(p)(x_k^\alpha)$, ovvero la derivazione $\frac{\partial}{\partial x_j^\beta}(p)$ applicata alla funzione $\pi_k \circ \varphi_\alpha$, dove $\pi_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$. Abbiamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\beta}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}(p).$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, (a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta)) &= \psi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n a_j^\beta \frac{\partial}{\partial x_j^\beta}(p)\right) = \psi_\alpha\left(\sum_{j=1}^n a_j^\beta \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}(p)\right)\right) \\
&= \psi_\alpha\left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j^\beta \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p\right) \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha}(p)\right) \\
&= (p, \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_1^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p a_j^\beta, \ldots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_j^\beta}|_p a_j^\beta).
\end{aligned}$$

Definiamo $\tilde{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$ tramite $\tilde{\varphi}_\alpha := (\varphi_\alpha \times \mathsf{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha$, ovvero

$$\tilde{\varphi}_\alpha : (p, v) \mapsto (\varphi_\alpha(p), (a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)).$$

Essendo su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \tilde{\varphi}_\beta^{-1}(q, (a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta)) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(q), \left(\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right)|_q \cdot (a_1^\beta, \ldots, a_n^\beta)^t),$$

si vede che $\{\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha\}$ è un atlante per TM che lo rende una varietà di dimensione $2n$.

Inoltre per la costruzione fatta si verifica subito che TM è un fibrato vettoriale con funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}\right).$$

$\square$

ESERCIZIO 2.17. Si provi che TM è sempre orientabile.

2.2. Il fibrato dei riferimenti lineari. Sia M una varietà. Sia E un fibrato vettoriale reale di rango r su M (considerazioni simili valgono per i fibrati vettoriali complessi). Per $x \in M$ sia

$$L(E)_x := \{\text{basi ordinate di } E_p\}.$$

Definiamo
$$L(E) := \bigcup_{x\in M} L(E)_x$$
con proiezione $\pi : L(E) \to M$ data da $L(E)_x \ni v \mapsto x \in M$. Vediamo che $L(E)$ è un fibrato principale, che è detto *il fibrato dei riferimenti lineari* di E.

PROPOSIZIONE 2.18. *Sia M una varietà e sia E un fibrato vettoriale di rango r su M. Allora $L(E)$ ha una naturale struttura di fibrato principale con fibra $GL(r,\mathbb{R})$ ed è equivalente come fibrato principale al fibrato principale associato a E.*

DIMOSTRAZIONE. Il gruppo $GL(r,\mathbb{R})$ agisce liberamente a destra su $L(E)_x$ nel modo seguente. Sia $A \in GL(r,\mathbb{R})$ e sia $\underline{w} = \{w_1,\dots,w_r\}$ una base di E_x. Allora definiamo
$$R : (A,\underline{w}) \mapsto A^t\underline{w},$$
dove, se $A = (a_{ij})$, allora $A^t\underline{w}$ indica la base formata dai vettori $\{\sum a_{i1}w_i,\dots,\sum a_{ir}w_i\}$.

Sia $\{e_1,\dots,e_r\}$ la base standard di $\mathbb{R}^r$. Se (U,φ) è un aperto trivializzante di E, poniamo $v_j(x) := \varphi^{-1}(x,e_j)$. Allora $\underline{v} := \{v_1(x),\dots,v_r(x)\}$ è una base di E_x per ogni $x \in U$.

Pertanto, se $\underline{u} \in L(E)_x$, esiste una unica matrice $A \in GL(r,\mathbb{R})$ che rappresenta il cambiamento di base da $\underline{v}$ ad $\underline{u}$. Dunque $\pi^{-1}(x) \simeq GL(r,\mathbb{R})$. Definiamo ora
$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(r,\mathbb{R})$$
tramite $h(\underline{u}) = (\pi(\underline{u}),\psi(\underline{u}))$, dove $\psi(\underline{u}) \in GL(r,\mathbb{R})$ è tale che
$$\underline{u} = [\psi(\underline{u})]^t\underline{v}.$$
Si dota poi $L(E)$ della topologia meno fine che rende h degli omeomorfismi. Per esercizio si verifichi che $L(E)$ è effettivamente un fibrato principale. Per calcolare le funzioni di transizione, vediamo che se $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le funzioni di transizione di E, per l'Osservazione 2.12 si ha $\underline{v}_\beta = g^t_{\alpha\beta}\underline{v}_\alpha$. Dunque
$$[\psi_\alpha(\underline{u})]^t\underline{v}_\alpha = \underline{u} = [\psi_\beta(\underline{u})]^t\underline{v}_\beta = [\psi_\beta(\underline{u})]^t g^t_{\alpha\beta}\underline{v}_\alpha = [g_{\alpha\beta}\psi_\beta(\underline{u})]^t\underline{v}_\alpha,$$
da cui segue che
$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x,\psi_\alpha(\underline{u})) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\psi_\beta(\underline{u})),$$
che prova che le funzioni di transizione di $L(E)$ sono effettivamente $\{g_{\alpha\beta}\}$. Si osservi anche che
$$h_\alpha(R(A,\underline{u})) = h_\alpha(A^t\underline{u}) = h_\alpha(A^t[\psi_\alpha(\underline{u})]^t\underline{v}_\alpha) = h_\alpha([\psi_\alpha(\underline{u})A]^t\underline{v}_\alpha) = (x,\psi_\alpha(\underline{u})A),$$
e dunque le h_α sono anche morfismi di fibrati principali. □

Il fibrato dei riferimenti lineari di TM si denota con LM.

ESERCIZIO 2.19. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. allora il fibrato dei riferimenti lineari LM ha gruppo di struttura riducibile a $GL(n,\mathbb{R})^+ := \{A \in \mathsf{Mat}(n\times n,\mathbb{R}) : \det A > 0\}$ se e solo se M è orientabile.

2.3. Esempi di fibrati principali. Descriviamo brevemente alcuni esempi di fibrati principali.

2.3.1. *Rivestimenti di Galois.* Se M è una varietà e $\tilde{M}$ è un suo rivestimento di Galois con gruppo delle trasformazioni del rivestimento Γ, si può dare a Γ la struttura di gruppo di Lie zero-dimensionale e dunque $\tilde{M}$ è un fibrato principale su M con gruppo di struttura Γ con atlante di trivializzazione dato dagli intorni onesti.

2.3.2. $SO(n)$ *su* $\mathbb{S}^{n-1}$ *con fibra* $SO(n-1)$. Si può vedere $SO(n)$, $n > 1$ come fibrato principale con fibra $SO(n-1)$ su $\mathbb{S}^{n-1}$. Definiamo la proiezione $\pi : SO(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ nel modo seguente. Se $A \in SO(n)$, scriviamo $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$, essendo $\underline{a}_j$ la j-sima colonna di A. Poiché $A^t A = \mathrm{id}$, risulta $\langle \underline{a}_j, \underline{a}_k \rangle = \delta_{jk}$ per $j, k = 1, \ldots, n$. Definiamo allora $\pi : SO(n) \to \mathbb{S}^{n-1}$ come:

$$\pi(A) = \underline{a}_n.$$

Osserviamo poi che, essendo $\mathbb{S}^{n-1} = F^{-1}(0)$ con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) := \langle x, x \rangle - 1$ (essendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard), per la Proposizione 7.15 del Capitolo 1, risulta

$$T_p\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Pertanto, se $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \in SO(n)$ si ha che $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}\}$ è una base ortonormale di $T_{\underline{a}_n}\mathbb{S}^{n-1}$. Denotiamo con $\underline{u}(A)$ tale base. Diamo ora una orientazione a $\mathbb{S}^{n-1}$ in modo che la matrice identica in $SO(n)$ definisca una base positiva sullo spazio tangente di $\mathbb{S}^{n-1}$ in $(0, \ldots, 0, 1)$. Scegliamo un atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ di $\mathbb{S}^{n-1}$ che sia orientato secondo l'orientazione scelta. Presa la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}^\alpha}(p)\}$, si può applicare il procedimento di Gram-Schmidt per ottenere una base ortonormale (sempre con la stessa orientazione) per $T_p\mathbb{S}^{n-1}$ per $p \in U_\alpha$. Tale base, denotiamola $\underline{v}^\alpha(p)$, dipende in modo C^∞ da $p \in U_\alpha$. Data $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \in SO(n)$ esiste una unica $A_\alpha \in SO(n-1)$ tale che

$$\underline{u}(A) = A_\alpha^t v_\alpha(\underline{a}_n).$$

Questo prova che la fibra $\pi^{-1}(p)$ è $SO(n-1)$. Inoltre, $SO(n-1)$ agisce per moltiplicazione a destra sulla fibra nel modo seguente. Se $B \in SO(n-1)$ e se $A \in \pi^{-1}(p)$, allora si definisce $B \cdot A = B^t \underline{u}(A)$. Le funzioni di trivializzazione del fibrato sono date da $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times SO(n-1)$ definite tramite

$$\psi_\alpha(A) = (\pi(A), A_\alpha).$$

Si verifica facilmente che queste sono trivializzazioni locali di $SO(n)$ e che le funzioni di transizione associate (che sono le matrici di cambiamento di coordinate dalla base da $\underline{v}_\beta$ a $\underline{v}_\alpha$ sono matrici in $SO(n-1)$.

Con l'interpretazione data sopra, $SO(n)$ è un sottofibrato di $L\mathbb{S}^{n-1}$ formato dalle basi orientate e ortonormali rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$. In effetti $SO(n)$ si ottiene come riduzione di $L\mathbb{S}^{n-1}$ riducendo il gruppo di struttura a $SO(n)$. Vedremo in seguito che questo è un processo generale: dare un prodotto scalare definito positivo lungo le fibre di un fibrato di rango k equivale a ridurre a $O(k)$ il gruppo di struttura del corrispondente fibrato dei riferimenti lineari e la riduzione a $SO(k)$ corrisponde a sceglierne anche una orientazione come varietà.

2.3.3. *Fibrati di Hopf.* La restrizione della mappa naturale da $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ a $\mathbb{S}^{2n+1}$ induce una fibrazione principale da $\mathbb{S}^{2n+1}$ a $\mathbb{CP}^n$ con gruppo di struttura $\mathbb{S}^1$ che si chiama la *fibrazione di Hopf*. In particolare, per $n = 1$ si ha $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ con fibra $\mathbb{S}^1$. Si provi per esercizio quanto detto.

2.3.4. *Spazi omogenei.* Sia G un gruppo di Lie e sia H un suo sottogruppo chiuso. Allora $G \to G/H$ è un fibrato principale con gruppo di struttura H. La trivializzazione locale è costruita nel modo seguente. Si prende una sottovarietà V definita in un intorno di e e *trasversa alla fibra* di $\pi : G \to G/H$ (ad esempio utilizzando i teoremi del rango si può supporre che in un intorno di e il sottogruppo H sia dato in coordinate locali da $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \ldots = x_m = 0\}$ e la proiezione sia $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$; allora si può definire $V = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$). Pertanto per ogni $g \in G$, $\pi(gV)$ è un aperto contenente $[g] \in G/H$. Se $k \in \pi^{-1}(\pi(gV))$, allora esiste un unico $h \in H$ e un unico elemento $t \in V$ tali che $k = gth$. Si definisce allora un atlante trivializzante per G/H dato da $\{(\pi(gV), \Phi_{gV})\}_{g \in G}$ dove $\Phi_{gV}(k) := (\pi(k), h)$ per $k \in \pi^{-1}(\pi(gV))$. Si verifichi per esercizio che questo è effettivamente un atlante di trivializzazione con funzioni di transizione in H e le Φ_{gV} sono morfismi di fibrati principali.

3. Sezioni di fibrati

DEFINIZIONE 3.1. Sia M una varietà e sia E un fibrato su M con proiezione $\pi : E \to M$. Sia $U \subseteq M$ un aperto. Una sezione di E su U è una mappa liscia da U in E tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. L'insieme delle sezioni di E su U si denota $C^\infty(U; E)$ (oppure $\mathcal{O}(U; E)$ nel caso della categoria olomorfa, nel qual caso la sezione è olomorfa). Una sezione di E su M si dice anche una *sezione globale* di E.

OSSERVAZIONE 3.2. Si verifica facilmente che se E è un fibrato vettoriale su M allora per ogni aperto $U \subset M$ l'insieme $C^\infty(U; E)$ (o $\mathcal{O}(U; E)$ nel caso olomorfo) delle sezioni di E su U ha una naturale struttura di spazio vettoriale.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia E un fibrato su M con fibra F e gruppo di struttura G. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante di trivializzazione per E e siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizioni di E. Sia U un aperto di M. Se $s \in C^\infty(U; E)$ (rispettivamente $s \in \mathcal{O}(U; E)$), posto $s_\alpha := \pi_F \circ \varphi_\alpha \circ s$ (essendo $\pi_F : U_\alpha \times F \to F$ la proiezione su F) per ogni α, β tali che $U \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ risulta*

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta. \tag{3.1}$$

Viceversa, se $\{s_\alpha\}$ è una famiglia di funzioni $s_\alpha : U_\alpha \cap U \to F$ liscie (rispettivamente olomorfe) che soddisfano (3.1)*, allora esiste una unica sezione $s \in C^\infty(U; E)$ (rispettivamente $s \in \mathcal{O}(U; E)$) tale che $s_\alpha = \pi_F \circ \varphi_\alpha \circ s$ per ogni α.*

DIMOSTRAZIONE. Sia s una sezione. Per definizione di s_α, si ha

$$s(x) = \varphi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(x)), \quad x \in U \cap U_\alpha. \tag{3.2}$$

Da cui, su $U \cap U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$(x, s_\alpha(x)) = \varphi_\alpha \circ s = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, s_\beta(x)) = (x, g_{\alpha\beta}(x)s_\beta(x)),$$

e risulta $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$.

Viceversa, se la (3.1) è soddisfatta, la (3.2) definisce una sezione su U. Infatti, $x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta$, allora per la (3.2)

$$\varphi_\alpha^{-1}(x, s_\alpha(x)) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}s_\beta(x)))) = \varphi_\beta^{-1}(x, g_{\beta\alpha}g_{\alpha\beta}s_\beta(x) = \varphi_\beta^{-1}(x, s_\beta(x)),$$

e dunque s è ben definita su U. □

DEFINIZIONE 3.4. Sia E un fibrato su M. Se s è una sezione di un E su un aperto $U \subset M$, le $\{s_\alpha\}$ definite nella Proposizione 3.3 si chiamano i *dati locali* di s (nella trivializzazione $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ di E).

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia E un fibrato vettoriale di rango k su M. Sia $U \subseteq M$ un aperto. Allora E è banale su U se e solo se esistono k sezioni $s_1, \ldots, s_k \in C^\infty(U; E)$ tali che $\{s_1(x), \ldots, s_k(x)\}$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in U$.*

DIMOSTRAZIONE. Se esistono tali sezioni, allora per ogni $x \in U$ e per ogni $v \in E_x$, si può scrivere $v = \sum a_j s_j(x)$. La mappa $\Phi : E \to U \times \mathbb{R}^k$ data da $\Phi(x)v := (x; (a_1, \ldots, a_n))$ è l'isomorfismo di fibrati vettoriali cercato.

Viceversa, se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^k$ e se $\Phi : E_U \to U \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di fibrati vettoriali, allora $s_j(x) := \Phi^{-1}(x, e_j)$ sono le sezioni cercate. □

La proposizione precedente vale ovviamente anche nella categoria olomorfa.

OSSERVAZIONE 3.6. Sia E un fibrato vettoriale di rango k su M. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è una carta di trivializzazione locale per E (con $\varphi_{\alpha,p}$ lineare per ogni $p \in U$), e $v \in E_p$ con $p \in U$, allora $\varphi_{\alpha,p}(v) = (a_1^\alpha, \ldots a_k^\alpha) \in \mathbb{R}^k$ può essere pensato come il vettore delle coordinate di v nella base data da $\{\varphi_{\alpha,p}^{-1}(e_1), \ldots, \varphi_{\alpha,p}^{-1}(e_k)\}$, dove $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è la base standard di $\mathbb{R}^k$. Le funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}(p)\}$ possono allora essere pensate come le matrici di cambiamento delle coordinate dalla base $\{\varphi_{\alpha,p}^{-1}(e_1), \ldots, \varphi_{\alpha,p}^{-1}(e_k)\}$ alla base $\{\varphi_{\beta,p}^{-1}(e_1), \ldots, \varphi_{\beta,p}^{-1}(e_k)\}$.

DEFINIZIONE 3.7. Se E è un fibrato vettoriale di rango k e $\{e_1, \ldots, e_k\}$ sono k sezioni di E su U tali che $\{e_1(x), \ldots, e_k(x)\}$ è una base di E_x per ogni $x \in U$, si dice che $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è una *base locale di sezione di E su U*, o semplicemente una base locale di E su U.

OSSERVAZIONE 3.8. Un fibrato vettoriale E su una varietà M ammette sempre una sezione, detta *sezione zero*, definita tramite $x \mapsto (x, 0) \in E_x$.

PROPOSIZIONE 3.9. *Sia P un fibrato principale su M con gruppo di struttura G. Allora P ammette una sezione globale se e solo se P è equivalente come fibrato principale al fibrato banale $M \times G$.*

DIMOSTRAZIONE. Il fibrato banale $M \times G$ ammette la sezione globale $s(x) := (x, e)$, essendo $e \in G$ l'elemento neutro. Viceversa, se P ammette una sezione globale $s : M \to P$, allora per ogni $g \in P_x$ esiste un unico $h \in G$ tale che $s(x)h = g$. Definiamo $\Phi : P \to M \times G$ tramite $\Phi(g) := (x, h)$. Si verifica facilmente che Φ è l'equivalenza di fibrati principali cercata. □

COROLLARIO 3.10. *Sia P un fibrato principale su M. Allora P è equivalente come fibrato principale al fibrato banale $M \times G$ se e solo se il suo gruppo di struttura è riducibile all'elemento neutro $\{e\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Una direzione è ovvia. Per l'altra, se P è riducibile al fibrato $M \times \{e\}$, allora per definizione esiste un morfismo iniettivo di fibrati principali $h : M \times \{e\} \to P$. Dunque $s(x) := h(x, e)$ è una sezione globale di P che per la proposizione precedente è dunque banale. □

ESERCIZIO 3.11. Diciamo che una varietà reale M è *parallelizzabile* se TM è banale, ovvero $TM \simeq M \times \mathbb{R}^n$.

(1) Provare che se M è un gruppo di Lie allora è parallelizzabile.
(2) Provare che M è parallelizzabile se e solo se LM ammette una sezione globale ed è quindi banale.
(3) Provare che la sfera $\mathbb{S}^2$ (e più in generale la sfera $\mathbb{S}^{2n}$) non è parallelizzabile [*Sugg.*: utilizzare il teorema di Poincaré-Hopf.]

4. Operazioni sui fibrati vettoriali

Sia $\mathcal{P}$ una operazione lineare tra spazi vettoriali, ovvero, se V, W sono due spazi vettoriali di dimensione k e l, allora $\mathcal{P}(V, W)$ è uno spazio vettoriale di dimensione $r = r(k, l)$. Consideriamo operazioni lineari $\mathcal{P}$ tali che

(1) se V, W sono spazi vettoriali con basi rispettivamente $\mathcal{B}^V, \mathcal{B}^W$, lo spazio vettoriale $\mathcal{P}(V, W)$ ha una base naturale $\mathcal{P}(\mathcal{B}^V, \mathcal{B}^W)$,
(2) Se $\mathcal{B}'^V, \mathcal{B}'^W$ sono altre basi di V e W rispettivamente, e H^V, H^W sono le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}^V$ a $\mathcal{B}'^V$ e da $\mathcal{B}^W$ a $\mathcal{B}'^W$ rispettivamente, allora la matrice di cambiamento di base $\mathcal{P}(H^V, H^W)$ da $\mathcal{P}(\mathcal{B}^V, \mathcal{B}^W)$ a $\mathcal{P}(\mathcal{B}'^V, \mathcal{B}'^W)$ ha entrate che sono una combinazione lineare di prodotti dei coefficienti di H^V e H^W.

Esempi di operatori lineari $\mathcal{P}$ sono $\oplus, \otimes$, Hom, dualità.

In questa sezione M denota una varietà. Siano E, F due fibrati vettoriali su M di rango k e l rispettivamente. Descriviamo un metodo generale per definire un nuovo fibrato vettoriale $\mathcal{P}(E, F)$ su M. Sia

$$\mathcal{P}(E, F) := \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{P}(E_p, F_p).$$

Sia $\pi : \mathcal{P}(E, F) \to M$ la proiezione naturale che associa a $v \in \mathcal{P}(E_p, F_p)$ il punto $p \in M$.

Siano φ^E, φ^F funzioni di trivializzazione locale per E, F su un aperto $U \subset M$. Ricordiamo che $\varphi^E_p : E_p \to \mathbb{R}^k$ e $\varphi^F_p : F_p \to \mathbb{R}^l$ sono lineari e che posto $s^E_j(p) := (\varphi^E)^{-1}(p, e_j)$, $j = 1, \ldots, k$, allora $\mathcal{S}^E(p) := \{s^E_1(p), \ldots, s^E_k(p)\}$ è una base di E_p, essendo $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^k$. Similmente si definisce una base $\mathcal{S}^F(p) := \{s^F_1(p), \ldots, s^F_l(p)\}$ di F_p. Allora, se $v \in E_p$, il vettore $\varphi^E_p(v) \in \mathbb{R}^k$ può essere pensato come il vettore delle coordinate di v nella base $\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Definiamo

$$\psi : \pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p \in U} \mathcal{P}(E_p, F_p) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r,$$

tramite l'applicazione $\psi := \mathcal{P}(\varphi^E, \varphi^F)$ che ad ogni elemento di $\mathcal{P}(E_p, F_p)$ associa le sue coordinate nella base naturale $\mathcal{P}(\mathcal{S}^E(p), \mathcal{S}^F(p))$.

Se $\{U_\alpha, \rho_\alpha\}$ è un atlante di M, si può supporre a meno di passare a sottoraffinamenti che E ed F siano triviali su ciascun U_α, con trivalizzazioni locali $\{\varphi^E_\alpha\}$ per E e $\{\varphi^F_\alpha\}$ per F e funzioni di transizione $\{g^E_{\alpha\beta}\}$ e $\{g^F_{\alpha\beta}\}$. Definiamo $\psi^\alpha := \mathcal{P}(\varphi^E_\alpha, \varphi^F_\alpha)$ e $\tilde{\psi}_\alpha := (\rho_\alpha \times \mathsf{id}) \circ \psi_\alpha$.

Dotiamo ora $\mathcal{P}(E, F)$ della topologia meno fine tale che le ψ_α siano omeomorfismi locali. Si verifica subito che π è allora continua. E si prova facilmente che $\mathcal{P}(E, F)$ è di Hausdorff e paracompatto.

Il dato $\{\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\psi}_\alpha\}$ definisce un atlante per $\mathcal{P}(E, F)$. Infatti

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(p, (a^\beta_1, \ldots, a^\beta_r)) = (p, \mathcal{P}(g^E_{\alpha\beta}(p), g^F_{\alpha\beta}(p))(a^\beta_1, \ldots, a^\beta_r)),$$

e pertanto i cambiamenti di carta sono lisci. Inoltre $\mathcal{P}(E, F)$ risulta essere un fibrato vettoriale su M di rango r e con funzioni di transizione locali date da

$$\{\mathcal{P}(g^E_{\alpha\beta}(p), g^F_{\alpha\beta}(p))\}.$$

4.1. Somma diretta (o somma di Whitney). Qua $\mathcal{P} = \oplus$. Dunque semplicemente $E \oplus F$ ha funzioni di trivializzazione locale che sono la somma diretta $\varphi^E_\alpha \oplus \varphi^F_\alpha$. Le funzioni di transizione locale sono allora date da

$$g^{E\oplus F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^E_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^F_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

4.2. Tensore. Qua $\mathcal{P} = \otimes$. Richiamiamo brevemente la definizione e le principali proprietà del prodotto tensoriale di due spazi vettoriali V, W su un campo $\mathbb{K}$. Lo spazio $V \otimes W$ è lo spazio vettoriale i cui elementi sono forme bilineari su $(V^* \times W^*)$ (dove V^* indica il duale di V). Se $v \in V$ e $w \in W$, l'elemento semplice $v \otimes w \in V \otimes W$ è definito tramite $(v \otimes w)(a, b) := a(v)b(w)$ per $a \in V^*, b \in W^*$. Se $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base di V e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base di W, allora $\{v_1 \otimes w_1, \ldots, v_m \otimes w_n\}$ è una base di $V \otimes W$. Sia $\{v'_1, \ldots, v'_m\}$ un'altra base di V con $v_j = \sum_{k=1}^m a_{jk} v'_k$ e sia $\{w'_1, \ldots, w'_n\}$ un'altra base di W con $w_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} v'_k$. Allora

$$v_r \otimes w_s = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n (a_{rk} b_{sh}) v'_k \otimes w'_h,$$

ovvero la matrice di cambiamento di base in $V \otimes W$ è data dal *prodotto di Cauchy* della matrice di cambiamento di base in V per la matrice di cambiamento di base in W; dove, ricordiamo che se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{hk})$ sono matrici, il prodotto di Cauchy $A \otimes B$ è definito tramite

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$$

Possiamo adesso definire il prodotto tensore di due fibrati E di rango r ed F di rango s tramite $E \otimes F$. Questo ha funzioni di trivializzazione locale date da $\varphi_\alpha^E \otimes \varphi_\alpha^F$ che ad ogni elemento di $E_p \otimes F_p$ con $p \in U_\alpha$, associano le sue coordinate nella base $\{(\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_1) \otimes (\varphi_\alpha^F)^{-1}(e_1), \dots, (\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_r) \otimes (\varphi_\alpha^F)^{-1}(e_s)\}$. Le funzioni di transizione, sono dunque il prodotto di Cauchy delle matrici di transizione di E e F.

ESERCIZIO 4.1. Siano E, E', E'' fibrati vettoriali reali su M allora
(1) $E \otimes (E' \otimes E'') \simeq (E \otimes E') \otimes E''$.
(2) $E \otimes (E' \oplus E'') \simeq (E \otimes E') \oplus (E \otimes E'')$
(3) $E \otimes (M \times \mathbb{R}) \simeq E$ (dove $M \times \mathbb{R}$ è il fibrato banale su M)

Il prodotto tensoriale di un fibrato E con se stesso k volte si indica $E^{\otimes k}$.

4.3. Prodotto Esterno. Qua $\mathcal{P} = \bigwedge$. Ricordiamo brevemente come è definito il prodotto esterno o *wedge* di uno spazio vettoriale V di dimensione n. Sia $S(r)$ il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, r\}$ e per $\sigma \in S(r)$ si indichi con $\epsilon(\sigma)$ il suo segno. Si definisce l'alternatore $A \in \mathsf{End}(V^{\otimes k})$ sugli elementi semplici nel modo seguente:

$$A(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S(r)} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(r)},$$

e si estende per linearità a tutto lo spazio. Poiché $A^2 = A$, risulta $V^{\otimes k} = \mathsf{Ker}(A) \oplus \mathsf{Im}(A)$. Si osservi che se $k > n$ allora $\mathsf{Ker}(A) = V^{\otimes k}$. Si definisce il *$k$-simo prodotto esterno di V* tramite

$$\bigwedge^k V := A(V^{\otimes k}),$$

e si indica con $v_1 \wedge \dots \wedge v_k := A(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$. Gli elementi di $\bigwedge^k V$ possono essere pensati come k-forme multilineari alternanti su V^*. In particolare, con tale interpretazione si ha che k vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$. Inoltre, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una base di V e se $w_j = \sum a_{jl} v_l$ con $j = 1, \dots n$, allora

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_n = \det(a_{jl}) v_1 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, allora $\bigwedge^k V$ ha base data da $\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}\}$ con $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$. In particolare la dimensione di $\bigwedge^k V$ è $\binom{n}{k}$. Se A è una matrice $n \times n$ di cambiamento di base in V, allora la matrice di cambiamento di base nelle basi associate in $\bigwedge^k V$ è la matrice $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ che ha come entrate i determinanti dei minori $k \times k$ di A.

Se E è un fibrato vettoriale su M di rango r, si definisce il fibrato delle k-sime potenze esterne $\bigwedge^k E$. Questo ha funzioni di trivializzazione locale date da $(\varphi_\alpha)^{\wedge^k E}$ che ad ogni elemento di $\bigwedge^k(E_p)$ con $p \in U_\alpha$, associano le sue coordinate nella base $\{(\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (\varphi_\alpha^E)^{-1}(e_{i_k})\}$, con $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n$. Le funzioni di transizione sono matrici $\binom{r}{k} \times \binom{r}{k}$ le cui entrate sono date dai determinanti dei minori $k \times k$ delle funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ di E. A futura referenza esplicitiamo il caso di $\bigwedge^r E$.

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia E un fibrato vettoriale di rango r su M con funzioni di transizioni locali date dalle matrici $\{g_{\alpha\beta}\}$ rispetto ad un certo atlante di trivializzazione $\{U_\alpha\}$. Allora $\bigwedge^r E$ ha funzioni di transizioni locali $\{\det(g_{\alpha\beta})\}$ rispetto allo stesso atlante.*

Il fibrato di rango uno $\bigwedge^r E$ si dice il *fibrato determinante di* E e si denota talvolta con $\det(E)$. La ragione del nome è evidente dalla Proposizione precedente.

4.4. Hom. Qua $\mathcal{P} = \mathsf{Hom}$. Dunque $\mathsf{Hom}(E,F)$ ha funzioni di trivializzazione locali date da $\psi_\alpha := \mathsf{Hom}({\varphi_\alpha}^E, {\varphi_\alpha}^F)$. Esplicitiamo il significato di ψ_α. Supponiamo E, F banali su U e siano $\{v_1, \ldots, v_k\}$ delle sezioni locali di $E|_U$ linearmente indipendenti in ogni punto di U; siano $\{w_1, \ldots, w_l\}$ delle sezioni locali di $F|_U$ linearmente indipendenti in ogni punto di U. Definiamo $f_{ij} : E|_U \to F|_U$ tramite $f_{ij}(v_m) = \delta_i^m w_j$ ed estendiamole per linearità. Allora $\{f_{ij}\}$ per $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$ sono sezioni di $\mathsf{Hom}(E,F)$ su U linearmente indipendenti per ogni $x \in U$. Sono dunque una base di $\mathsf{Hom}(E,F)_x$ per ogni $x \in U$. Dunque se $f \in \mathsf{Hom}(E,F)_x$ risulta $f = \sum a_{ij} f_{ij}$ e $\psi_\alpha(f) = (x; (a_{11}, \ldots, a_{kl}))$.

Nelle applicazioni, invece di utilizzare la notazione vettoriale, conviene utilizzare la notazione matriciale. In altri termini, conviene descrivere le coordinate di $f \in \mathsf{Hom}(E,F)_x$ come la matrice $l \times k$, che denotiamo A_α, nelle basi $\{v_1^\alpha(x), \ldots, v_k^\alpha(x)\}$ di E_x e $\{w_1^\alpha(x), \ldots, w_l^\alpha(x)\}$ di F_x. Dall'usuale regole di cambiamento di coordinate si vede subito che

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta}^F A_\beta g_{\beta\alpha}^E. \tag{4.1}$$

4.5. Duale. Qua $\mathcal{P} = \mathsf{Hom}(\cdot, (M \times \mathbb{R}))$. Il fibrato duale al fibrato E, viene denotato E^*. Dato un atlante di trivializzazione $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ per E, poniamo come al solito $v_j^\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_j)$ per $x \in U_\alpha$ e $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base standard di $\mathbb{R}^k$. Sia $\{w_1^\alpha(x), \ldots, w_1^\alpha(x)\}$ la base duale di $\{v_1^\alpha(x), \ldots, v_1^\alpha(x)\}$. Dunque se $f \in E_x^*$, si ha $f = \sum a_j^\alpha w_j^\alpha(x)$ e dunque le trivializzazioni locali sono $\psi_\alpha(f) := (x, (a_1^\alpha, \ldots, a_k^\alpha))$. Si verifica facilmente con queste funzioni di trivializzazione che le funzioni di transizione sono

$$g_{\alpha\beta}^{E^*} =^t (g_{\alpha\beta}^E)^{-1}. \tag{4.2}$$

ESERCIZIO 4.3. Siano E, F due fibrati vettoriali su M. Provare che

$$\mathsf{Hom}(E,F) \simeq E^* \otimes F.$$

OSSERVAZIONE 4.4. Prendendo $(\mathbb{R}, \mathsf{id})$ come "carta" di $\mathbb{R}$, abbiamo una trivializzazione globale di $T\mathbb{R}$ data da $v \in T_s\mathbb{R}$, $v = a\frac{\partial}{\partial t} \mapsto (s, a) \in \mathbb{R}$. Sia ora M una varietà e $f \in C^\infty(M)$. Allora $df_x : T_xM \to T_{f(x)}\mathbb{R}$ è un morfismo lineare. Dato $v \in T_xM$, nella trivializzazione precedente di $T\mathbb{R}$, scriviamo $df_x(v) = (f(x), A_x(v))$. L'operatore $A_x : T_xM \to \mathbb{R}$ è un morfismo lineare, e dunque possiamo definire un elemento di $T_xM^* = \mathsf{Hom}(TM, (M \times \mathbb{R}))_x$ tramite

$$T_xM \ni v \mapsto (x, A_x(v)).$$

Tale elemento, con abuso di notazione, si denota ancora con df_x. Pertanto, con tale interpretazione, df definisce una sezione di TM^*.

Fissate coordinate locali $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ su M, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ sono una base locale di $TM|_U$. La base duale di $TM^*|_U$ si denota con $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$, ovvero $dx_j(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \delta_{jk}$. Poiché $df(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, ne segue che

$$df|_U = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \tag{4.3}$$

Si verifica allora facilmente che $df_x(v) = (x, v(f))$. Con un lieve abuso di notazione, scriveremo direttamente $df_x(v) = v(f)$. In particolare, gli elementi dx_j sono proprio i differenziali delle coordinate x_j.

4.6. Coniugato. Se E è un fibrato vettoriale complesso su M, si definisce il fibrato coniugato $\overline{E}$. Se le funzioni di trivializzazione di E sono definite da $\varphi_\alpha(v) = (x, \varphi'_\alpha(v)) \in U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ per $v \in E_x$, $x \in U_\alpha$, le funzioni di trivializzazione di $\overline{E}$ sono date da $\overline{\varphi}_\alpha(v) = (x, \overline{\varphi'_\alpha(v)})$ e le funzioni di transizione sono le coniugate delle funzioni di transizione di E.

5. Metriche lungo le fibre di un fibrato vettoriale

DEFINIZIONE 5.1. Sia E un fibrato vettoriale complesso su una varietà M. Una *metrica Hermitiana* h su E è una sezione del fibrato $E^* \otimes \overline{E}^* \simeq \mathsf{Hom}(E, \overline{E}^*)$ tale che per ogni $x \in M$, $h(x)$ sia un prodotto Hermitiano definito positivo. Ovvero, per ogni $v \in E_x, w \in E_x$, risulta $h(x)(v, \overline{w}) = \overline{h(x)(w, \overline{v})}$ e, se $v \neq 0$, $h(x)(v, \overline{v}) > 0$.

La coppia (E, h) si dice un *fibrato vettoriale Hermitiano* su M.

OSSERVAZIONE 5.2. Se E è un fibrato vettoriale *reale*, una metrica Hermitiana lungo le fibre di E è detta anche una metrica Riemanniana lungo le fibre di E (nel qual caso h è un prodotto scalare definito positivo sulle fibre di E).

Sia (E, h) un fibrato vettoriale Hermitiano di rango r su M. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ è un atlante di trivializzazione locale di E con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$. Sia $\{v_1^\alpha, \ldots, v_r^\alpha\}$ la base locale di E su U_α definita tramite $v_j^\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_j)$, essendo $\{e_1, \ldots, e_r\}$ la base standard di $\mathbb{C}^r$.

Possiamo associare ad h su U_α una matrice quadrata $r \times r$, denotata (h_{jk}^α), definita tramite

$$h_{jk}^\alpha(x) := h(x)(v_k^\alpha(x), \overline{v}_j^\alpha(x)), \quad j, k = 1, \ldots, r$$

e per cui vale

$$
\begin{aligned}
h(x)(\sum_{k=1}^{r} a_k v_k^\alpha(x), \overline{\sum_{j=1}^{r} b_j v_j^\alpha(x)}) &= \sum_{j,k=1}^{n} a_k \overline{b_j} h_{jk}(x) \\
&= (\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_r}) \begin{pmatrix} h_{11}^\alpha(x) & \ldots & h_{1r}^\alpha(x) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{r1}^\alpha(x) & \ldots & h_{rr}^\alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La funzione $(h_{jk}^\alpha) : U_\alpha \to \mathsf{Mat}(r \times r, \mathbb{C})$ è di classe C^∞ e la matrice $(h_{jk}^\alpha(x))$ è Hermitiana e definita positiva (tutti gli autovalori > 0) per ogni $x \in U_\alpha$, ovvero

$$
{}^t\overline{(h_{jk}^\alpha(x))} = (h_{jk}^\alpha(x)).
$$

Consideriamo h come sezione di $\mathsf{Hom}(E, \overline{E}^*)$, allora per le (4.1) e (4.2) risulta su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

$$
(h_{jk}^\beta) = {}^t\, \overline{g_{\beta\alpha}}^{-1} (h_{jk}^\alpha) g_{\alpha\beta} = {}^t\, \overline{g_{\alpha\beta}} (h_{jk}^\alpha) g_{\alpha\beta}.
$$

PROPOSIZIONE 5.3. *Sia E un fibrato vettoriale complesso di rango r su M e sia $L(E)$ il fibrato principale dei riferimenti lineari di E. Allora E ammette una metrica Hermitiana lungo le fibre se e solo se il gruppo di struttura di $L(E)$ è riducibile ad $U(r)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia h una metrica Hermitiana lungo le fibre di E. Sia (U, φ) una trivializzazione locale di E. Se $\{e_1, \ldots, e_r\}$ è la base standard di $\mathbb{C}^r$, sia $v_j(x) := \varphi^{-1}(x, e_j)$, $j = 1, \ldots, r$. Allora $\{v_1(x), \ldots, v_r(x)\}$ è una base di E_x per ogni $x \in U$. Utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, si definisce una nuova base locale per $E|_U$ $\{\tilde{v}_1(x), \ldots, \tilde{v}_r(x)\}$ che è $h(x)$-ortonormale per ogni $x \in U$. Definiamo delle nuove funzioni di trivializzazione locale $\widetilde{\varphi} : E|_U \to U \times \mathbb{C}^r$ tramite $\widetilde{\varphi}(\sum a_j \tilde{v}_j(x)) = (x, a_1, \ldots, a_r)$. Si verifica facilmente che le funzioni di transizione associate stanno in $U(r)$. Il fibrato dei riferimenti lineari di E, trivializzato localmente a partire da basi h-ortonormali, ha le stesse funzioni di transizione e dunque la tesi segue ora dalla Proposizione 2.9.

Viceversa, sia P una riduzione di $L(E)$ con gruppo strutturale $U(r)$. Sia U un aperto trivializzante per P e sia $\underline{u} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ una sezione di $P|_U$. Se $v, w \in E_x$, $x \in U$, allora $v = \sum a_j u_j(x)$, $w = \sum b_j u_j(x)$. Si definisce

$$
h(x)(v, w) := \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}. \tag{5.1}
$$

Se $\underline{u}'$ è un'altra sezione di P su U, allora esiste $A : U \to U(r)$ tale che $\underline{u}' = A\underline{u}$, e dunque (5.1) è ben definita e non dipende dalla sezione locale di P scelta. Si verifica poi facilmente che h è la metrica Hermitiana su E cercata. $\square$

PROPOSIZIONE 5.4. *Ogni fibrato vettoriale complesso su una varietà M ammette una metrica Hermitiana lungo le fibre.*

DIMOSTRAZIONE. Sia E un fibrato vettoriale complesso di rango r su M. Sia $\{U_\alpha\}$ un atlante trivializzante per E. Possiamo supporre che $\{U_\alpha\}$ sia localmente finito e ciascun U_α sia relativamente compatto in M. Su ciascun U_α, sia $\underline{u}_\alpha := \{u_1^\alpha, \ldots, u_r^\alpha\}$ una base locale di E su U_α. Definiamo una metrica Hermitiana h_α su $E|_{U_\alpha}$ dichiarando che $\underline{u}_\alpha$ è una base ortonormale.

Sia ora $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Definiamo

$$h(x) := \sum_\alpha \rho_\alpha(x) h_\alpha(x).$$

Si verifichi per esercizio che h è una metrica Hermitiana su E. $\square$

ESERCIZIO 5.5. Sia L un fibrato vettoriale reale di rango uno su una varietà M. Supponiamo esista un atlante di trivializzazione $\{U_\alpha\}$ per L per cui le funzioni di transizione locale sono $g_{\alpha\beta} > 0$. Provare che L è banale. [*Sugg.:* Dotare L di una metrica Riemanniana. Date $s_\alpha : U_\alpha \to L|_{U_\alpha}$ basi locali di sezioni di L, definire $\tilde{s}_\alpha := \frac{s_\alpha}{\|s_\alpha\|}$ e determinare le funzioni di transizione locale per tali basi di sezioni di L].

5.1. Il gradiente di una funzione. Sia M una varietà reale, e sia $f \in C^\infty(M)$. Supponiamo TM sia dotato di una metrica Riemanniana g. Allora $g(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ è una forma bilineare non-degenere. Pertanto definisce un isomorfismo naturale tra T_xM e T_xM^*. Poiché $df_x \in T_xM^*$ (si veda l'Osservazione 4.4), ne segue che esiste un unico vettore, che indichiamo con $\mathsf{grad}(f)_x \in T_xM$, detto *il gradiente di* f *in* x tale che per ogni $v \in T_xM$ vale

$$g(x)(v, \mathsf{grad}(f)_x) = df_x(v) = v(f).$$

Fissata una carta locale $(U, (x_1, \ldots, x_n)$ di M, sia $H = (h_{ij}) : U \to GL(n, \mathbb{R})$ la matrice simmetrica ad entrate funzioni C^∞ associata a g nella base locale $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ di TM su U. Scriviamo $\mathsf{grad}(f) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, per $a_j : U \to \mathbb{R}$ funzioni C^∞. Allora, dalla (4.3),

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = df(\frac{\partial}{\partial x_k}) = g(x)(\frac{\partial}{\partial x_k}, \mathsf{grad}(f)) = \sum_{j=1}^n a_j g(x)(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{j=1}^n a_j h_{kj}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

In particolare, se $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ è una base g-ortonormale, $H = \mathsf{id}$ e risulta

$$\mathsf{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Questo è ad esempio il caso in cui M sia un aperto di $\mathbb{R}^n$ e g sia definita su $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$ tramite $g(x)(v, w) = \langle v, w \rangle$ per $(x, v), (x, w) \in U \times \mathbb{R}^n \simeq TU$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare canonico sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$.

6. Fibrato pull-back

DEFINIZIONE 6.1. Siano M, N due varietà, $f : M \to N$ una funzione liscia. Sia $\pi : E \to N$ un fibrato su N con fibra F e gruppo di struttura G. Si definisce il *fibrato pull back* con fibra F e gruppo di struttura G:

$$f^*E := \{(m, e) \in M \times E : f(m) = \pi(e)\}.$$

PROPOSIZIONE 6.2. *Siano M, N due varietà, $f : M \to N$ una funzione liscia. Sia $\pi : E \to N$ un fibrato su N con fibra F, gruppo di struttura G e funzioni di transizione locale $\{g_{\alpha\beta}\}$. Il fibrato pull back f^*E è un fibrato su M con fibra F e gruppo di struttura G e funzioni di transizione locale $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. In particolare, se E è un fibrato vettoriale di rango r allora f^*E è un fibrato vettoriale di rango r.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo $\pi' : f^*E \to M$ tramite $\pi'(m, e) := m$. Sia ora $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ una trivializzazione locale del fibrato E. Definiamo $\psi_\alpha : \pi'^{-1}(f^{-1}(U_\alpha)) \to f^{-1}(U_\alpha) \times F$ tramite

$$\psi_\alpha(m, e) := (m, \pi_F \circ \varphi_\alpha(e)),$$

dove $\pi_F : U_\alpha \times F \to F$ è la proiezione canonica. Si verifica subito che $\{f^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha\}$ è un atlante trivializzante per f^*E che è dunque localmente diffeomorfo a $f^{-1}(U_\alpha) \times F$. Da qui segue l'enunciato. $\square$

ESEMPIO 6.3. Sia $x \in M$ e sia $\iota : \{x\} \hookrightarrow M$ l'immersione. Se E è un fibrato su M, allora $\iota^*(E) \simeq E_x$. Più in generale, se N è una sottovarietà di M e $\iota_N : N \hookrightarrow M$ è l'immersione canonica, allora $E|_N := \iota_N^*(E)$ si dice la *restrizione* di E a N.

Sia $f : M \to N$ una applicazione liscia e sia E un fibrato su N. Allora la mappa definita da $\tilde{f} : f^*E \to E$, $\tilde{f}(m, e) = e$, è un morfismo di fibrati (morfismo di fibrati vettoriali/fibrati principali se E è fibrato vettoriale/principale) e rende il seguente diagramma commutativo

(6.1)
$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

In più se f è un diffeomorfismo allora $(f, \tilde{f})$ è una equivalenza di fibrati.

Il pull back di un fibrato si può caratterizzare come l'unico fibrato che renda commutativo il diagramma (6.1).

PROPOSIZIONE 6.4. *Sia $f : N \to M$ una applicazione liscia tra due varietà e sia $\pi : E \to M$ un fibrato con fibra F e gruppo di struttura G. Sia $\rho : E' \to N$ un fibrato con fibra F e gruppo di struttura G e sia $(f, g) : E' \to E$ una equivalenza di fibrati tale che il seguente* *diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ \rho\big\downarrow & & \big\downarrow\pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Allora E' è equivalente come fibrato a f^*E.

DIMOSTRAZIONE. Si definisca un morfismo $\Phi : E' \to f^*E$ tramite

$$\Phi(\tilde{e}) := (\rho(\tilde{e}), g(\tilde{e})), \quad \tilde{e} \in E'.$$

Per la commutatività del diagramma $f(\rho(\tilde{e})) = \pi(g(\tilde{e}))$ e pertanto è un morfismo ben definito con immagine f^*E. □

7. Sottofibrati vettoriali

DEFINIZIONE 7.1. Siano E, F' due fibrati vettoriali su M. Se esiste un morfismo di fibrati vettoriali $\iota : F' \to E$ che è iniettivo sulle fibre si dice che $\iota(F')$ è un *sottofibrato* di E.

PROPOSIZIONE 7.2. *Sia M una varietà. Siano (E, M, π) un fibrato vettoriale di rango k su M e $\iota : F' \to E$, $F = \iota(F')$ un sottofibrato di E di rango l. Allora ι è una immersione regolare e F è una sottovarietà regolare di E. Inoltre, indicando con $\pi|_F$ la restrizione di π a F, risulta che $(F, M, \pi|_F)$ è un fibrato vettoriale su M. In più, esiste un atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ di trivializzazione per E con la proprietà che, denotata p_l la proiezione $(x; (v_1, \ldots, v_k)) \to (x; (v_1, \ldots, v_l))$ si ha che $\{U_\alpha, p_l \circ \varphi_\alpha\}$ è un atlante di trivializzazione per F. In particolare le funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ di E sono*

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & q_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

essendo $\{h_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di F.

DIMOSTRAZIONE. Sia V un aperto tale che $x \in V$ e che E e F' siano banali su V. Dunque esistono isomorfismi di fibrati vettoriali $\psi_E : E|_V \to V \times \mathbb{R}^k$ e $\psi_{F'} : F'|_V \to V \times \mathbb{R}^l$. Sia $\{e_1, \ldots, e_l\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^l$. Siano $v'_j(x) := \psi_{F'}^{-1}(x, e_j)$ per $x \in V$ e $j = 1, \ldots, l$. Allora $\{v'_1(x), \ldots, v'_l(x)\}$ è una base di F'_x per ogni $x \in V$. Siano poi $v_j(x) := \iota(x)(v'_j(x))$, per $j = 1, \ldots, l$. Poiché $\iota(x) : F'_x \to E_x$ è iniettiva, i vettori $\{v_1(x), \ldots, v_r(x)\}$ sono linearmente indipendenti per ogni $x \in V$.

Sia $(x, w_j(x)) := \psi_E(v_j(x))$ per $j = 1, \ldots, l$. Allora $\{w_1(x), \ldots, w_l(x)\}$ sono linearmente indipendenti. Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^k$. A meno di riordinare possiamo supporre che $\{w_1(x), \ldots, w_l(x), e_{l+1}, \ldots, e_k\}$ siano linearmente indipendenti (ovvero formano una base di $\mathbb{R}^k$) in x. Dunque lo sono anche in un intorno di x, che possiamo supporre essere V stesso. Poniamo $v_j(x) := \psi_E^{-1}(x, e_j)$ con $j = l + 1, \ldots, k$. Definiamo $\varphi : E|_V \to V \times \mathbb{R}^k$ nel modo seguente. Se $v \in E_x$ risulta $v = \sum a_j v_j(x)$. Dunque poniamo

$$\varphi(v) := (x, (a_1, \ldots, a_k)).$$

Per costruzione φ è un isomorfismo di fibrati vettoriali che fa corrispondere i vettori di F ai vettori con le ultime $k-l$ coordinate nulle e dunque $\varphi|_F : F|_V \to V \times (\mathbb{R}^l \times \{0\})$ è un isomorfismo lineare sulle fibre. Operando cosi per ogni aperto trivializzante si ottiene un atlante trivializzante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ per E della forma precedente le cui funzioni di transizione sono della forma (7.1).

Nelle trivializzazioni $\psi_{F'}|_{U_\alpha}$ di F' e φ_α la mappa ι è data da

$$\iota(x; a_1, \dots, a_l) = (x; a_1, \dots, a_l, 0, \dots, 0),$$

da cui segue subito che $d\iota_p$ è iniettivo per ogni $p \in F'$ e dunque ι è una immersione.

Poniamo ora $\varphi_\alpha(v) = (x, \varphi''_\alpha(x, v)) \in \{x\} \times \mathbb{R}^k$ per $v \in E_x$. A meno di passare a dei raffinamenti si può supporre che $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ sia un atlante di M. Allora la mappa

$$\eta_\alpha(v) := (\psi_\alpha(x), \varphi''_\alpha(x, v))$$

è una carta locale per E su $\pi^{-1}(U_\alpha)$. In tale atlante si ha

$$\eta_\alpha(F \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) = \{(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_k) \in \psi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k : v_{l+1} = \dots = v_k = 0\},$$

e per la Proposizione 8.5 del Capitolo 1 risulta che $\iota : F' \to E$ è una immersione regolare e, dal Teorema 8.4 del Capitolo 1, F è una sottovarietà regolare di E.

È ora facile vedere che $\{U_\alpha, p_l \circ \varphi_\alpha\}$ è un atlante di trivializzazione per F che rende $(F, M, \pi|_F)$ un fibrato vettoriale su M e le sue funzioni di transizione sono $\{h_{\alpha\beta}\}$. □

OSSERVAZIONE 7.3. Con le notazioni della Proposizione 7.2, poiché $\{g_{\alpha\beta}\}$ soddisfano le identità di cociclo, si vede facilmente che sia $\{h_{\alpha\beta}\}$ sia $\{q_{\alpha\beta}\}$ devono soddisfare le identità di cociclo. Per le $\{h_{\alpha\beta}\}$ questo segue dal fatto che sono le funzioni di transizione del fibrato F. Le $\{q_{\alpha\beta}\}$ sono invece le funzioni di un fibrato vettoriale per il Teorema 1.9. Tale fibrato vettoriale sarà il fibrato quoziente che definiremo in seguito.

ESEMPIO 7.4. Sia M una varietà (reale o complessa). Sia S una varietà e sia $\iota : S \hookrightarrow M$ una immersione. Il differenziale $d\iota$ definisce allora un naturale morfismo di spazi vettoriali che è iniettivo sulle fibre $d\iota : TS \to TM|_S := \iota^*(TM)$. Ovvero TS è un sottofibrato vettoriale di $TM|_S$ su S.

ESERCIZIO 7.5. Sia F un sottofibrato di un fibrato vettoriale E su una varietà M. Sia h una metrica Hermitiana su E. Per ogni $x \in M$ si definisca

$$F_x^\perp := \{v \in E_x : h(x)(v, w) = 0 \quad \forall w \in F_x\}.$$

Sia $F^\perp = \bigcup_{x \in M} F_x^\perp$. Si provi che $F^\perp$ è un sottofibrato di E e che $E \simeq F \oplus F^\perp$. [*Sugg:* provare che se U è un intorno trivializzante per E, allora esiste una base locale $\{v_1, \dots v_r\}$ di E su U che è $h(x)$-ortonormale per ogni $x \in M$ e tale che $\{v_1, \dots v_l\}$, con l il rango di F, è una base locale di F su U. Allora $\{v_{l+1}, \dots, v_r\}$ è una base locale di $F^\perp$ su U]

8. Fibrati quoziente

In questa sezione supponiamo che M sia una varietà e E un fibrato vettoriale di rango k su M. Sia $F \subset E$ un sottofibrato di rango l. Definiamo una relazione di equivalenza su E come segue: $e \sim e'$ se $e, e' \in E_x$ e se $e - e' \in F_x$. Denotiamo con $[e]$ la classe di equivalenza di e e

$$E/F := \{[e] : e \in E\},$$

PROPOSIZIONE 8.1. *Esiste una struttura di fibrato vettoriale su E/F per la quale la proiezione canonica $\rho : E \to E/F$ data da $\rho(e) := [e]$ è un morfismo di fibrati vettoriali. Inoltre per ogni $x \in M$ si ha $(E/F)_x = E_x/F_x$. Inoltre, se Q è un fibrato vettoriale su M con fibre E_x/F_x e tale che esista un morfismo di fibrati vettoriali $\rho' : E \to Q$ tale che $\rho'(x)(v) = [v]$ per ogni $v \in E_x$ e per ogni $x \in M$, allora Q è equivalente come fibrato vettoriale a E/F.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi' : E/F \to M$ definita tramite $\pi'([e]) = x$ se $e \in E_x$. Tale mappa non dipende dal rappresentante scelto di $[e]$.

Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante trivializzante per E e per F dato dalla Proposizione 7.2. Sia $p' : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to U_\alpha \times R^{k-l}$ data dalla proiezione $(x; (a_1, \ldots, a_k)) \to (x; (a_{l+1}, \ldots, a_k))$.

Dati $e, e' \in E_x$, risulta che $e \sim \tilde{e}$ se e solo se $p'(e) = p'(\tilde{e})$. Dunque, la mappa $\psi_\alpha : \pi'^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^{k-l}$ definita tramite $\psi_\alpha := p' \circ \varphi_\alpha$ è ben definita ed è biettiva.

Dotiamo E/F della topologia meno fine che rende le ψ_α degli omeomorfismi. Dalla (7.1) risulta che per ogni $v \in \mathbb{R}^{k-l}$ si ha

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x; v) = (x; q_{\alpha\beta}(x)v).$$

Pertanto, assumendo come lecito che $\{U_\alpha, \eta_\alpha\}$ sia un atlante di M, si verifica facilmente che $\{\pi'^{-1}(U_\alpha), (\eta_\alpha, \mathsf{id}_{\mathbb{R}^{l-k}}) \circ \psi_\alpha\}$ è un atlante di E/F che è dunque una varietà.

Inoltre, si vede facilmente che $\{U_\alpha, p' \circ \varphi_\alpha\}$ è un atlante di trivializzazione per E/F che è dunque un fibrato vettoriale con fibra E_x/F_x e ρ è un morfismo di fibrati vettoriali (verificarlo per esercizio). Le funzioni di transizione locali di E/F sono le $\{q_{\alpha\beta}\}$ definite dalla (7.1).

Se Q è un altro fibrato vettoriale con fibre E_x/F_x e $\rho' : E \to Q$ il morfismo proiezione naturale, definiamo un morfismo Φ di fibrati vettoriali tra E/F e Q nel modo seguente. Sia $[v] \in E/F$, allora poniamo $\Phi([v]) := \rho'(v) \in Q$. Si verifica immediatamente che è ben definito e che è un isomorfismo di fibrati vettoriali, da cui segue l'unicità. $\square$

DEFINIZIONE 8.2. Il fibrato vettoriale E/F di rango $k - l$ si chiama *fibrato quoziente*.

OSSERVAZIONE 8.3. Sia E un fibrato vettoriale e $F \subset E$ un sottofibrato. Se $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ è un atlante di trivializzazione di E dato dalla Proposizione 7.2, dalla dimostrazione della Proposizione 8.1 risulta che le funzioni di transizione di E/F sono $\{q_{\alpha\beta}\}$.

8.1. Fibrato normale ad una sottovarietà. Sia M una varietà (reale o complessa) e sia S una sottovarietà immersa (reale o complessa) di M. Allora come abbiamo visto TS è un sottofibrato di $TM|_S$ su S. Il fibrato quoziente $TM|_S/TS$ si denota N_S e si chiama il *fibrato normale* a S in M. È un fibrato (reale o complesso) su S di rango (reale o complesso) uguale alla codimensione (reale o complessa) di S in M.

Troviamo adesso le funzioni di transizione di N_S. Poiché una immersione è localmente regolare per la Proposizione 8.6 del Capitolo 1, possiamo ricondurci a costruire un atlante di trivializzazione per N_S fatto da aperti su cui l'immersione è regolare. Dunque, possiamo supporre che S sia una sottovarietà regolare di M.

Se S è una sottovarietà regolare di dimensione m e codimensione k di una varietà M di dimensione n ($n = m + k$), sia $\{U_\alpha\}$ un atlante adattato a S, ovvero, se $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) := \psi_\alpha(x) : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ sono coordinate locali, si ha

$$\psi_\alpha(S \cap U_\alpha) = \{(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) : x_{m+1}^\alpha = \dots = x_n^\alpha = 0\}.$$

In queste coordinate $x_j^\alpha = 0$ per $j = m+1, \dots, n$ se e solo se $x_j^\beta = 0$ per $j = m+1, \dots, n$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Questo significa che su $U_\alpha \cap U_\beta$ la funzione $x_j^\alpha = x_j^\alpha(x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$ per $j = m+1, \dots, n$ è tale che è identicamente 0 quando $x_j^\beta = 0$ per $j = m+1, \dots, n$ (ovvero su S). Pertanto $\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_l^\beta}|_S \equiv 0$ per $j = m+1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$.

Dunque, in queste coordinate TS è adattato a $TM|_S$ nel senso della Proposizione 7.2. Le funzioni di transizione di $TM|_S$ sono date da $(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S)$. Queste sono matrici $n \times n$ invertibili della forma

$$\left(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S\right)_{j,k=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S)_{j,k=1,\dots,m} & (\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S)_{j=1,\dots,m,k=m+1,\dots n} \\ 0 & (\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S)_{j,k=m+1,\dots,n} \end{pmatrix}$$

dove $\left(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S\right)_{j,k=1,\dots,m}$ sono le funzioni di transizione locale di TS e $(\frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta}|_S)_{j,k=m+1,\dots,n}$ sono le funzioni di transizione locale di N_S.

In particolare, se S ha codimensione 1, allora il fibrato N_S ha rango 1 e, nelle coordinate adattate di cui sopra, le sue funzioni di transizione locale sono $\{\frac{\partial x_n^\alpha}{\partial x_n^\beta}|_S\}$.

ESERCIZIO 8.4. Sia E un fibrato vettoriale su una varietà M con proiezione $\pi : E \to M$. Sia $M^0 \subset E$ l'immagine della sezione zero $s_0 : M \to E$ definita da $s_0(x) = (x, 0)$. Ovviamente s_0 è un diffeomorfismo (o biolomorfismo se tutto è olomorfo) da M a M^0 con inversa data da $\pi|_{M^0}$. Sia N_{M^0} il fibrato normale a M^0 in E, ovvero $N_{M^0} = TE|_{M^0}/TM^0$. Si provi che $s_0^*(N_{M^0}) \simeq E$.

ESERCIZIO 8.5. Sia M una varietà orientabile e sia S una sottovarietà immersa di M di codimensione reale uno. Provare che S è orientabile se e solo se N_S è equivalente come fibrato vettoriale al fibrato banale $S \times \mathbb{R}$. [*Sugg.:* Si utilizzi l'Esercizio 5.5]

8.2. Divisori di Cartier. Sia M una varietà complessa. Un *divisore (effettivo) di Cartier* D su M è il dato di un atlante $\{U_\alpha\}$ di M e funzioni olomorfe $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ non identicamente nulle tali che se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ risulti $f_{\alpha\beta} := f_\alpha / f_\beta : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ olomorfa e mai zero. Questo significa che f_α, f_β hanno su $U_\alpha \cap U_\beta$ gli stessi zeri con la stessa molteplicità. Si verifica facilmente (per esercizio) che $\{f_{\alpha\beta}\}$ verificano le identità di cociclo e dunque sono le funzioni di transizione di un fibrato vettoriale complesso di rango uno su M che indichiamo con $\mathcal{O}(D)$.

Si osservi anche che, per costruzione, le $\{f_\alpha\}$ sono i dati locali di una sezione olomorfa di $\mathcal{O}(D)$. Viceversa, dato un fibrato vettoriale olomorfo di rango uno su M munito di una sezione olomorfa globale non identicamente nulla, i dati locali di tale sezione determinano un divisore di Cartier.

Osserviamo che se S è una sottovarietà regolare complessa di codimensione uno di M allora S determina in modo naturale un divisore di Cartier su M, denotato $[S]$. Infatti, se $\{U_\alpha\}$ è un atlante adattato a S come definito poc'anzi, risulta $S \cap U_\alpha = \{(z_1^\alpha, \dots, z_n^\alpha) : z_n^\alpha = 0\}$. Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ risulta $z_n^\alpha = 0$ se e solo se $z_n^\beta = 0$ pertanto su $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha

$$z_n^\alpha(z_1^\beta, \dots, z_n^\beta) = (z_n^\beta)^k u(z_1^\beta, \dots, z_n^\beta),$$

per un certo $k \geq 1$ e $u \in \mathcal{O}_M(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Poiché le funzioni di cambiamento di carta sono biolomorfismi, ne risulta che per $p \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$\det \begin{pmatrix} (\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_l^\beta})_{j,l=1,\dots,n-1} & (\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_n^\beta})_{j=1,\dots,n-1} \\ (\frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_l^\beta})_{l=1,\dots,n-1} & \frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_n^\beta} \end{pmatrix} (p) \neq 0.$$

Per $p \in S$ come abbiamo già osservato in precedenza si ha $(\frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_l^\beta})_{l=1,\dots,n-1} \equiv 0$, pertanto deve essere necessariamente

$$\frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_n^\beta}(p) \neq 0 \quad \forall p \in S.$$

Ma

$$\frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_n^\beta} = k(z_n^\beta)^{k-1}u + (z_n^\beta)^k \frac{\partial u}{\partial z_n^\beta},$$

da cui segue che $k = 1$, $u \neq 0$ e che $\frac{z_n^\alpha}{z_n^\beta}$ è una funzione olomorfa mai nulla in $U_\alpha \cap U_\beta$.

Ponendo $f_\alpha := z_n^\alpha$ si ha allora che $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ determina un divisore di Cartier $[S]$ su M. Inoltre, per il calcolo precedente risulta

$$\frac{z_n^\alpha}{z_n^\beta}|_S = u|_S = \frac{\partial z_n^\alpha}{\partial z_n^\beta}|_S$$

da cui segue subito che

$$N_S = \mathcal{O}([S])|_S. \tag{8.1}$$

Si noti infine che la sezione olomorfa globale s di $\mathcal{O}([S])$ definita da $\{f_\alpha\}$ si annulla esattamente all'ordine uno su S.

9. Nucleo e Immagine di morfismi di fibrati vettoriali

Siano E, F due fibrati vettoriali su una varietà M. Un morfismo di fibrati vettoriali $\varphi : E \to F$ è per definizione una sezione di $\mathsf{Hom}(E, F)$ su M.

PROPOSIZIONE 9.1. *Siano E, F due fibrati vettoriali su una varietà M e sia $\varphi : E \to F$ un morfismo di fibrati vettoriali. Allora $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è un sottofibrato di E e $\mathsf{Im}(\varphi)$ è un sottofibrato di F se e solo se $\mathsf{rank}\varphi(x)$ è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Una implicazione è vera per definizione di (sotto)fibrato.

Viceversa, supponiamo che $k := \mathsf{rank}\varphi(x)$ sia costante e proviamo che $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è un sottofibrato di E. Sia m il rango di E e sia l il rango di F. Sia U un aperto di M su cui E, F siano banali. Passando a trivializzazioni locali per E e F su U il morfismo $\varphi : U \times \mathbb{R}^m \to U \times \mathbb{R}^l$ è definito tramite:

$$\varphi(x, \underline{a}) = (x, A(x)\underline{a}),$$

dove $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_m)^t$ rappresenta un vettore della fibra di E_x nella trivializzazione fissata. Fissiamo $x_0 \in U$. Il rango di $A(x_0)$ è k, e possiamo supporre che le prime k righe della matrice $A(x_0)$ siano linearmente indipendenti. Per continuità, le prime k righe di $A(x)$ sono allora linearmente indipendenti in un intorno di x_0 che possiamo supporre essere U stesso. Sia $B(x)$ la matrice $k \times m$ formata dalle prime k righe della matrice $A(x)$. Allora

$$\mathsf{Ker}(\varphi) = \{(x, \underline{a}) \in U \times \mathbb{R}^m : B(x)\underline{a} = 0\}.$$

Osserviamo subito che, definita $F : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tramite $F(x, \underline{a}) := B(x)\underline{a}$, si ha che la matrice Jacobiana di F è rappresentata da $(*, B(x))$ e pertanto ha rango massimo k. Per il Teorema 7.10 del Capitolo 1 risulta che $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è una sottovarietà regolare di E.

Inoltre, a meno di restringere U possiamo supporre che il minore $k \times k$ di $B(x)$ formato dalle prime k colonne, indicato con $B'(x)$, abbia determinante diverso da 0 per ogni $x \in U$. Scrivendo $B(x) = (B'(x)B''(x))$, e $\underline{a} = (\underline{a}', \underline{a}'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, il sistema lineare $B(x)\underline{a} = 0$ diventa $B'(x)\underline{a}' + B''(x)\underline{a}'' = 0$, da cui

$$\underline{a}' = -B'(x)^{-1}B''(x)\underline{a}''.$$

Pertanto, si ottengono $m - k$ soluzioni $\{\underline{a}_1(x), \ldots, \underline{a}_{m-k}(x)\}$ linearmente indipendenti che generano $\mathsf{Ker}(\varphi(x))$ per ogni $x \in U$ e che dipendono in modo liscio da x.

Sia $v_j(x) \in E_x$ l'immagine di $(x, \underline{a}_j(x))$ mediante la trivializzazione data su U, $j = 1, \ldots, m-k$. Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 7.2, si possono trovare $v_{m-k+1}(x), \ldots, v_m(x)$ sezioni liscie di E su U tali che $\{v_1(x), \ldots, v_m(x)\}$ siano una base locale di E su U. Trivializzando E su U rispetto a tale base locale (ovvero facendo corrispondere a $E_x \ni \sum b_j v_j(x) \mapsto (x, b_1, \ldots, b_m) \in U \times \mathbb{R}^m$), risulta che

$$\mathsf{Ker}(\varphi(x)) = \{(x, b_1, \ldots, b_m) \in U \times \mathbb{R}^m : b_{m-k+1} = \ldots = b_m = 0\}.$$

Pertanto si definisce la funzione di trivializzazione per $\mathsf{Ker}(\varphi)$ su U tramite

$$\mathsf{Ker}(\varphi)_x \ni \sum_{j=1}^{m-k} b_j v_j(x) \mapsto (x, b_1, \ldots, b_{m-k}) \in U \times \mathbb{R}^{m-k}.$$

Operando cosi su ogni aperto trivializzante si ottiene un atlante trivializzante di $\mathsf{Ker}(\varphi)$. Per esercizio si verifichi che effettivamente con tale atlante $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è un fibrato vettoriale su M di rango $m-k$ ed è un sottofibrato di E.

Proviamo infine che $\mathsf{Im}(\varphi)$ è un sottofibrato di F. Sia $Q = E/\mathsf{Ker}(\varphi)$ il fibrato quoziente. Allora il morfismo di fibrati vettoriali $\varphi : E \to F$ passa al quoziente e definisce un morfismo di fibrati vettoriali $\rho : Q \to F$ che è iniettivo sulle fibre (verificarlo per esercizio). Poiché evidentemente $\rho(Q) = \mathsf{Im}(\varphi)$, si ha la tesi. $\square$

10. Successioni esatte di fibrati vettoriali

Sia M una varietà. Siano E', E, E'' fibrati vettoriali su M. Siano $\alpha : E' \to E$ e $\beta : E \to E''$ dei morfismi di fibrati vettoriali. Se α è iniettivo, β è suriettivo e $\mathsf{Im}\alpha = \mathsf{Ker}\beta$ allora si dice che la successione

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$$

è una *successione esatta corta di fibrati vettoriali.*

OSSERVAZIONE 10.1. Se $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$ è una successione esatta di fibrati vettoriali, allora dall'unicità della struttura di fibrato quoziente (vedi Proposizione 8.1) segue che E'' è isomorfo a E/E'.

ESERCIZIO 10.2. Sia $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$ è una successione esatta di fibrati vettoriali su una varietà M. Allora $\mathsf{rank}E = \mathsf{rank}E' + \mathsf{rank}E''$.

PROPOSIZIONE 10.3. *Sia* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$ *è una successione esatta di fibrati vettoriali su una varietà* M. *Sia* F *un fibrato vettoriale su* M. *Allora le seguenti successioni corte di fibrati vettoriali sono esatte*

- $0 \longrightarrow E' \otimes F \xrightarrow{\alpha\otimes 1} E \otimes F \xrightarrow{\beta\otimes 1} E'' \otimes F \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}(F, E') \xrightarrow{\alpha\circ\cdot} \mathsf{Hom}(F, E) \xrightarrow{\beta\circ\cdot} \mathsf{Hom}(F, E'') \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow \mathsf{Hom}(E'', F) \xrightarrow{\cdot\circ\beta} \mathsf{Hom}(E, F) \xrightarrow{\cdot\circ\alpha} \mathsf{Hom}(E', F) \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow (E'')^* \xrightarrow{\beta^*} E^* \xrightarrow{\alpha^*} (E')^* \longrightarrow 0$

Inoltre, se $f : N \to M$ *è una mappa liscia, la seguente successione è esatta:*

- $0 \longrightarrow f^*(E') \xrightarrow{f^*(\alpha)} f^*(E) \xrightarrow{f^*(\beta)} f^*(E'') \longrightarrow 0$

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

TEOREMA 10.4 (Formula del Determinante). *Sia* $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E'' \longrightarrow 0$ *una successione esatta di fibrati vettoriali su una varietà* M. *Supponiamo che* E *abbia rango* k, E' *abbia rango* k' *e* E'' *abbia rango* k''. *Allora*

$$\bigwedge^k E \simeq \bigwedge^{k'} E' \otimes \bigwedge^{k''} E''.$$

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo un atlante adattato a E', E come in Proposizione 7.2. Poiché $E'' = E/E'$, le funzioni di transizione di E, E', E'' sono legate da

$$g^E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{E'}_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & g^{E''}_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Ma allora $\det(g^E_{\alpha\beta}) = \det(g^{E'}_{\alpha\beta})\det(g^{E''}_{\alpha\beta})$, ed essendo $\{\det(g^E_{\alpha\beta})\}$ le funzioni di transizione di $\bigwedge^k E$, $\{\det(g^{E'}_{\alpha\beta})\}$ le funzioni di transizione di $\bigwedge^{k'} E$ e $\{\det(g^{E''}_{\alpha\beta})\}$ le funzioni di transizione di $\bigwedge^k E''$, si ha la tesi. □

DEFINIZIONE 10.5. Se M è una varietà complessa di dimensione n, si denota con

$$K_M := \bigwedge^n TM^*$$

il fibrato complesso di rango uno e si chiama il *fibrato canonico* di M.

10.1. La formula di aggiunzione. Sia S una sottovarietà immersa complessa di codimensione k di una varietà complessa M. Dalla successione esatta corta

$$0 \to TS \to TM|_S \to N_S \to 0,$$

applicando la Proposizione 10.3 si ottiene la successione esatta corta di fibrati vettoriali

$$0 \to N^*_S \to TM^*|_S \to TS^* \to 0.$$

Il fibrato N^*_S si dice il *fibrato conormale* di S in M.

Dalla Formula del Determinante 10.4 si ottiene

$$K_M|_S = K_S \otimes \bigwedge^k N^*_S. \tag{10.1}$$

In particolare, se $k = 1$, ovvero se S è una ipersuperficie non singolare di M, si ottiene

$$K_M|_S = K_S \otimes N^*_S.$$

Se inoltre S è una sottovarietà regolare di M, dalla (8.1) si ha dunque

$$K_M|_S = K_S \otimes \mathcal{O}([S])^*|_S. \tag{10.2}$$

OSSERVAZIONE 10.6. Sia L un fibrato di rango uno. Poiché $L \otimes L^* = \mathsf{Hom}(L, L)$ e $\mathsf{Hom}(L, L)$ ammette una sezione globale non nulla (data da $x \mapsto \mathsf{id}_x$) e dunque è globalmente banale, risulta che $L \otimes L^*$ è globalmente banale. Dunque, se E, F sono altri due fibrati (qualunque rango) e se $E = F \otimes L$, allora risulta $E \otimes L^* \simeq F$.

Dall'Osservazione 10.6 e dalla (10.2) segue la cosidetta *formula di aggiunzione* per ipersuperfici (sottovarietà regolari di codimensione uno):

$$K_S = (K_M \otimes \mathcal{O}([S]))\,|_S. \tag{10.3}$$

11. Fibrati lineari e gruppo di Picard su varietà complesse

In questa sezione M è una varietà complessa di dimensione n.

DEFINIZIONE 11.1. Un fibrato olomorfo di rango complesso uno su M si dice un *fibrato lineare* su M. L'insieme dei fibrati lineari su M (modulo equivalenze di fibrati) si denota $\mathsf{Pic}(M)$ e si dice il *gruppo di Picard* di M.

OSSERVAZIONE 11.2. In taluni libri di geometria algebrica viene più o meno esplicitamente indicato con $\mathsf{Pic}(M)$ il gruppo dei cosidetti "fasci invertibili" (ovvero fasci di $\mathcal{O}_M$ moduli localmente liberi di rango uno—come definiti successivamente). Questo si ripercuote nella scelta delle funzioni di transizione o delle loro inverse (e dunque in segni $-$ che variano a seconda di tale scelta).

PROPOSIZIONE 11.3. *Il gruppo di Picard* $\mathsf{Pic}(M)$ *è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di prodotto tensoriale di fibrati, con elemento neutro il fibrato banale e inverso il fibrato duale.*

DIMOSTRAZIONE. Siano L, L' due fibrati lineari. Allora $L \otimes L' = L' \otimes L$. Inoltre, $(M \times \mathbb{C}) \otimes L = L$ e dall'Osservazione 10.6 segue che $L \otimes L^*$ è il fibrato banale. □

OSSERVAZIONE 11.4. Denotiamo con $\mathcal{T}(M)$ l'insieme dato da ricoprimenti $\{U_\alpha\}$ di M insieme alle funzioni $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$ olomorfe che soddisfano le identità di cociclo. Ogni elemento $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\} \in \mathcal{T}(M)$ definisce un fibrato lineare e viceversa ogni fibrato lineare definisce un tale elemento. Per la Proposizione 1.8, a meno di passare ad un raffinamento comune, un dato $\{g_{\alpha\beta}\}$ definisce un fibrato isomorfo ad un dato $\{h_{\alpha\beta}\}$ se e solo se esistono $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^*$ olomorfe tali che su $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha

$$f_\beta = h_{\beta\alpha} f_\alpha g_{\alpha\beta},$$

ovvero

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}}{h_{\alpha\beta}} \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{11.1}$$

Dunque, ponendo la relazione di equivalenza (11.1) su $\mathcal{T}(M)$, si può affermare che $\mathsf{Pic}(M) = \mathcal{T}(M)/\sim$. Questo ultimo gruppo vedremo successivamente essere $H^1(M; \mathcal{O}_M^*)$, il primo gruppo di coomologia di M con coefficienti nel fascio delle funzioni olomorfe mai nulle.

12. Fibrati tautologici sullo spazio proiettivo

DEFINIZIONE 12.1. Il *fibrato tautologico* su $\mathbb{CP}^n$ è definito da

$$\mathcal{O}(-1) := \{([p], v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in \mathbb{C}p\}.$$

Il fibrato tautologico è un fibrato lineare su $\mathbb{CP}^n$ (si chiama cosi perchè la fibra in un punto $[p]$ è la retta generata da p). Infatti, se $U_\alpha = \{[z_0 : \ldots : z_n] : z_\alpha \neq 0\}$, $\alpha = 0, \ldots, n$, le funzioni di trivializzazione di $\mathcal{O}(-1)|_{U_\alpha}$ sono date da

$$\mathcal{O}(-1)|_{U_\alpha} \ni ([z_0 : \ldots : z_n], (v_0, \ldots, v_n)) \xrightarrow{\varphi_\alpha} ([z_0 : \ldots : z_n], v_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbb{C}.$$

Se $p = (z_0, \ldots, z_n)$ allora $v \in \mathbb{C}p$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $v_j = \lambda z_j$ per $j = 0, \ldots, n$. Su U_α, poiché $z_\alpha \neq 0$, risulta $\lambda = v_\alpha / z_\alpha$. Pertanto la φ_α è invertibile con inversa:

$$U_\alpha \times \mathbb{C} \ni ([z_0 : \ldots : z_n], a_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} ([z_0 : \ldots : z_n], \frac{a_\alpha}{z_\alpha}(z_0, \ldots, z_n)) \in \mathcal{O}(-1)|_{U_\alpha}.$$

Le funzioni di transizione locali sono date su $U_\alpha \cap U_\beta$ da

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}([z_0 : \ldots : z_n], v_\beta) = \varphi_\alpha([z_0 : \ldots : z_n], \frac{v_\beta}{z_\beta}(z_0, \ldots, z_n)) = ([z_0 : \ldots : z_n], \frac{v_\beta}{z_\beta} z_\alpha)$$

dunque si ha su $U_\alpha \cap U_\beta$

$$g_{\alpha\beta}([z_0 : \ldots : z_n]) = \frac{z_\alpha}{z_\beta}.$$

Se dotiamo U_α di coordinate $(x_0^\alpha, \ldots, x_{\alpha-1}^\alpha, 1, x_{\alpha+1}^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ date da $x_j^\alpha = z_j / z_\alpha$ si ha

$$g_{\alpha\beta}(x_0^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) = \frac{1}{x_\beta^\alpha}. \tag{12.1}$$

DEFINIZIONE 12.2. Definiamo $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^*$ e, per $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}(k) := \begin{cases} \mathcal{O}(1)^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{O}(1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(1)}_{k} & k > 0, \\ \mathcal{O}(-1)^{\otimes -k} = \underbrace{\mathcal{O}(-1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{O}(-1)}_{-k} & k < 0 \end{cases}$$

con $\mathcal{O}(0) = \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}$.

OSSERVAZIONE 12.3. Dalla definizione si ha $\mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(k+m)$ per $k, m \in \mathbb{Z}$.

In particolare se $g_{\alpha\beta}$ sono le funzioni di transizione di $\mathcal{O}(-1)$ si ha che le funzioni di transizione di $\mathcal{O}(k)$ sono date da $g_{\alpha\beta}^k$. Dunque, nell'atlante canonico di $\mathbb{CP}^n$ dato da $\{U_j := \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : z_j \neq 0\}\}$ le funzioni di transizione di $\mathcal{O}(k)$ sono date da

$$g_{\alpha\beta}^{\mathcal{O}(k)}([([z_0 : \ldots : z_n]) = \left(\frac{z_\alpha}{z_\beta}\right)^{-k}.$$

OSSERVAZIONE 12.4. Sia H l'iperpiano proiettivo di $\mathbb{CP}^n$ definito tramite $\{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : a_1 z_1 + \ldots + a_{n+1} z_{n+1} = 0\}$ per un certo $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. L'iperpiano H determina un divisore di Cartier $[H]$ in $\mathbb{CP}^n$ le cui funzioni di definizione locale sull'aperto $U_j := \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : z_j \neq 0\}$ sono date da

$$f_j(\frac{z_1}{z_j}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}) := a_1 \frac{z_1}{z_j} + \ldots + a_{n+1} \frac{z_{n+1}}{z_j}.$$

Pertanto il fibrato lineare $\mathcal{O}([H])$ ha funzioni di transizione locali date da

$$g_{\alpha\beta}([z_1 : \ldots : z_{n+1}]) = \frac{f_\alpha}{f_\beta} = \frac{z_\beta}{z_\alpha}.$$

Abbiamo perciò

$$\mathcal{O}([H]) = \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^*.$$

Denotiamo con $\mathsf{Pol}_k(\mathbb{C})$ lo spazio dei polinomi omogenei di grado k in $n+1$ variabili con coefficienti in $\mathbb{C}$. Ovvero, $P(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathsf{Pol}_k(\mathbb{C})$ se $P(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1}) = \lambda^k P(z_1, \ldots, z_{n+1})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Possiamo allora descrivere le sezioni globali di $\mathcal{O}(k)$ nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 12.5. *Lo spazio delle sezioni (olomorfe) globali di $\mathcal{O}(k)$ è :*

(1) $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^n; \mathcal{O}(k)) = 0$ *se* $k < 0$,
(2) $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^n; \mathcal{O}(k)) = \mathsf{Pol}_k(\mathbb{C})$ *se* $k \geq 0$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_j := \{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : z_j \neq 0\}\}$ l'atlante canonico di $\mathbb{CP}^n$ con la triviliazzazione di $\mathcal{O}(k)$ descritta in precedenza. Sia $s \in \mathcal{O}(\mathbb{CP}^n; \mathcal{O}(k))$ e siano $\{s_\alpha\}$ i dati locali della sezione s rispetto a tale trivializzazione. Le s_α sono funzioni olomorfe da $U_\alpha \simeq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha

$$s_\alpha(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \hat{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}) = \left(\frac{z_\alpha}{z_\beta}\right)^{-k} s_\beta(\frac{z_1}{z_\beta}, \ldots, \hat{z_\beta}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\beta}),$$

dove come al solito, $\hat{z_\alpha}$ significa "omesso". Guardando le espressioni sopra come funzioni da $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ si ha

$$z_\alpha^k s_\alpha(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \hat{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}) = z_\beta^k s_\beta(\frac{z_1}{z_\beta}, \ldots, \hat{z_\beta}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\beta}). \tag{12.2}$$

Poiché il secondo membro della (12.2) è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_\beta = 0\}$, dal principio del prolungamento analitico segue che $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto z_\alpha^k s_\alpha(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \hat{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha})$ è olomorfa su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_\alpha = z_\beta = 0\}$ e dunque[1] è olomorfa su $\mathbb{C}^{n+1}$. Poniamo

$$P(z) := z_\alpha^k s_\alpha(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \hat{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha})$$

Dalla definizione di P segue che su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z_\alpha = z_\beta = 0\}$ si ha $P(\lambda z) = \lambda^k P(z)$. Per continuità dunque P è una funzione omogenea di grado k su tutto $\mathbb{C}^{n+1}$. Sviluppando in serie di potenze

[1] qua si utilizza il fatto—che non proviamo—che se f è una funzione olomorfa definita in un aperto meno una sottovarietà di codimensione almeno 2, allora f si estende in modo olomorfa su tale sottovarietà

in 0 l'equazione $\lambda^k P(z) = P(\lambda z)$ si ottiene allora che $k \geq 0$ e $P \in \mathsf{Pol}_k(\mathbb{C})$ rappresenta la sezione s.

Viceversa, dato un polinomio omogeneo $P(z_1, \dots, z_{n+1})$ di grado $k \geq 0$, si definisce su U_α

$$s_\alpha(\frac{z_1}{z_\alpha}, \dots, \hat{z_\alpha}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}) := P(\frac{z_1}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}).$$

Essendo P omogeneo di grado k, risulta verificata la (12.2) e dunque $\{s_\alpha\}$ sono i dati locali di una sezione olomorfa di $\mathcal{O}(k)$.

Si verifica infine facilmente che l'applicazione da $\mathcal{O}(\mathbb{CP}^n; \mathcal{O}(k)) \mapsto \mathsf{Pol}_k(\mathbb{C})$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. $\square$

In particolare

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\mathbb{CP}^n; \mathcal{O}(k)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathsf{Pol}_k(\mathbb{C}) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \binom{n+k}{n} & k \geq 0 \end{cases}$$

COROLLARIO 12.6. *Siano $k, m \in \mathbb{Z}$. Allora $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(m)$ se e solo se $k = m$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $k \neq m$. Se $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(k)$, allora

$$\mathcal{O}(m-k) = \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(0) = \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}.$$

Ma $\mathcal{O}(0)$ ammette una sezione globale mai nulla mentre, per la Proposizione 12.5 il fibrato $\mathcal{O}(m-k)$ per $m \neq k$ non ha sezioni globali mai nulle. Quindi è una contraddizione e il risultato è provato. $\square$

TEOREMA 12.7 (Successione esatta di Eulero). *Vale la seguente successione esatta di fibrati vettoriali su $\mathbb{CP}^n$:*

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{CP}^n \otimes \mathcal{O}(-1) \to 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ la proiezione naturale $\pi(v) = [v]$. Allora $d\pi_v : T_v(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{C}^{n+1} \to T_{[v]}\mathbb{CP}^n$ è suriettiva e

$$\ker d\pi_v = \mathbb{C}v \quad \forall v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Infatti, supponiamo $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ con $v_1 \neq 0$ (argomentazioni simili valgono per gli altri casi). Sia U_1 l'aperto coordinato di $\mathbb{CP}^n$ contenente vettori con la prima coordinata non nulla. Allora in coordinate locali su U_1 risulta $\pi(w) = (\frac{w_2}{w_1}, \dots, \frac{w_{n+1}}{w_1})$ per $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$, $w_1 \neq 0$. Pertanto la matrice associata a $d\pi_v$ in tali base risulta essere

$$\begin{pmatrix} -\frac{v_2}{v_1^2} & \frac{1}{v_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\frac{v_{n+1}}{v_1^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{v_1} \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

da cui segue subito che $d\pi_v$ è suriettivo e $d\pi_v(v) = 0$. Dalla (12.3) segue inoltre che $d\pi_{\lambda v} = \lambda^{-1} d\pi_v$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definiamo

$$R : (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}) \to T\mathbb{CP}^n \otimes \mathcal{O}(-1),$$

tramite
$$R([v])(a) := d\pi_v(a) \otimes ([v], v).$$
Benché $d\pi_v$ dipenda da v, l'applicazione R è ben definita e dipende solo da $[v]$, infatti
$$R([\lambda v])([a]) = \lambda^{-1} d\pi_v(a) \otimes ([v], \lambda v) = d\pi_v(a) \otimes ([v], v) = R([v])([a]).$$
Si verifichi per esercizio che R è un morfismo di fibrati vettoriali suriettivo.

Il nucleo di $R([v])$ su ciascuna fibra coincide con il nucleo di $d\pi_v$ che come abbiamo visto è $\mathbb{C}v \simeq \mathcal{O}(-1)_{[v]}$. Da cui segue la tesi. $\square$

Tensorizzando la successione esatta di Eulero con $\mathcal{O}(1)$ e dualizzando si ottiene la successione esatta
$$0 \to T^*\mathbb{CP}^n \longrightarrow (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C})^* \to 0.$$
Dalla formula del determinante si ottiene allora
$$K_{\mathbb{CP}^n} = \bigwedge^{n+1}((\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathcal{O}(-1)).$$

OSSERVAZIONE 12.8. Sia E un fibrato di rango k con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ (sono matrici $k \times k$ invertibili). Sia L è un fibrato lineare con funzioni di transizione $\{h_{\alpha\beta}\}$ (sono funzioni mai nulle). Allora $E \otimes L$ ha funzioni di transizione $h_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$. Il fibrato $\bigwedge^k(E \otimes L)$ ha funzioni di transizione date da $\det(h_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) = h^k_{\alpha\beta} \det(g_{\alpha\beta})$. Pertanto
$$\bigwedge^k(E \otimes L) = L^{\otimes k} \otimes \bigwedge^k E.$$

Dunque si ottiene
$$\bigwedge^{n+1}((\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1})^* \otimes \mathcal{O}(-1)) = \mathcal{O}(-n-1) \otimes \bigwedge^{n+1}(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1})^* = \mathcal{O}(-n-1),$$
da cui
$$K_{\mathbb{CP}^n} = \mathcal{O}(-n-1). \tag{12.4}$$

COROLLARIO 12.9. *Sia S una sottovarietà regolare complessa di $\mathbb{CP}^n$ di codimensione uno definita tramite $\{[z_0 : \ldots : z_n] : P(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$ per un certo polinomio omogeneo P di grado $k \geq 1$. Allora*
$$K_S = \mathcal{O}(k-n-1)|_S.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula di aggiunzione 10.3 e dalla (12.4) risulta
$$K_S = (\mathcal{O}((-n-1) \otimes \mathcal{O}([S]))|_S.$$
D'altra parte, poiché
$$P(\frac{z_1}{z_\alpha}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\alpha}) = \left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)^k P(\frac{z_1}{z_\beta}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_\beta})$$

risulta che il divisore di Cartier $[S]$ ha funzioni di transizione $(z_\beta/z_\alpha)^k$ e dunque $\mathcal{O}([S]) = \mathcal{O}(k)$. Da cui la formula. □

12.1. Scoppiamento di un punto in $\mathbb{C}^{n+1}$. Restringendo le proiezioni da $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ sul primo e sul secondo fattore a $\mathcal{O}(-1)$ abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{C}^{n+1} \\ {\scriptstyle \pi_1}\Big\downarrow & & \\ \mathbb{CP}^n & & \end{array}$$

Sia $E = \pi^{-1}(0)$ la sezione zero di $\mathcal{O}(-1)$, ovvero

$$E_{[p]} = ([p], 0).$$

Dunque $E \simeq \mathbb{CP}^n$.

La proiezione di $\mathcal{O}(-1)$ su $\mathbb{C}^{n+1}$ è tale che

$$\pi_2 : \mathcal{O}(-1) \setminus E \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

è un biolomorfismo. Questo può essere visto facilmente notando che

$$\mathcal{O}(-1) = \{([z_0 : \ldots : z_n], (v_0, \ldots, v_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} : z_j v_k - z_k v_j = 0 \forall j, k\}$$

e dunque se $v_j \neq 0$ per qualche j, esiste un unico $[p] \in \mathbb{CP}^n$ tale che $([p], v) \in \mathcal{O}(-1)$ e $\pi_2([p], v) = v$. Oppure, considerando la mappa

$$r : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathcal{O}(-1) \setminus E,$$

definita tramite $r(v) = ([v], v)$, si vede facilmente che r è olomorfa ed è l'inversa di $\pi_2|_{\mathcal{O}(-1)\setminus E}$.

Calcoliamo π_2 in coordinate locali. Consideriamo $U_0 = \{[z_0 : \ldots : z_n] : z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n$ (sugli altri aperti il ragionamento è simile). Dunque, $(\pi_1^{-1}(U_0), \widetilde{\varphi}_0)$ è una carta locale di $\mathcal{O}(-1)$ definendo $\widetilde{\varphi}_0 : \pi_1^{-1}(U_0) \to \mathbb{C}^{n+1}$ tramite

$$\widetilde{\varphi}_0([z_0 : \ldots : z_n], (v_0, \ldots, v_n)) := (\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}, v_\alpha).$$

L'inversa è data da

$$\widetilde{\varphi}_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = ([1 : x_1 : \ldots : x_n], \lambda(1, x_1, \ldots, x_n)).$$

Di conseguenza la proiezione $\pi_2 : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{C}^{n+1}$ nella carta locale $(\pi_1^{-1}(U_0), \widetilde{\varphi}_0)$ è data da

$$\pi_2 \circ \widetilde{\varphi}_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = (\lambda, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \tag{12.5}$$

Si noti che, in queste coordinate locali, risulta $\widetilde{\varphi}_0(E \cap \pi_1^{-1}(U_0)) = \{(x_1, \ldots, x_n, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} : \lambda = 0\}$.

DEFINIZIONE 12.10. La coppia $(\mathcal{O}(-1), \pi_2)$ si dice lo *scoppiamento* di $\mathbb{C}^{n+1}$ in 0 e la sezione nulla E si dice il *divisore eccezionale*.

Ovviamente, a meno di cambiamenti affini di coordinate, si può *scoppiare* ogni punto di $\mathbb{C}^{n+1}$. Più in generale, se M è una varietà complessa di dimensione n e $p \in M$, si definisce una nuova varietà complessa, $\tilde{M}$, detta *lo scoppiamento di M in p* nel modo seguente. $\tilde{M}$ è definito come insieme dall'unione disgiunta di $M \setminus \{p\}$ e $\mathbb{CP}^n$. Per dotarlo di struttura olomorfa, si considera un atlante $\{U_\alpha\}$ tale che esista una sola carta, diciamo U_0, che contiene $p \in U_0$. Se $\varphi_0 : U_0 \to V \subseteq \mathbb{C}^n$ è una carta locale tale che $\varphi_0(p) = 0$, si dota $U_0 \setminus \{p\} \cup \mathbb{CP}^n$ della struttura olomorfa ottenuta imponendo che la biiezione naturale

$$\widetilde{\varphi}_0 : U_0 \setminus \{p\} \cup \mathbb{CP}^n \to \pi_2^{-1}(V) \subset \mathcal{O}(-1),$$

definita da $\widetilde{\varphi}_0(z) = \pi_2^{-1}(\varphi_0(z)) = ([\varphi_0(z)], \varphi_0(z))$ per $z \neq p$ e $\widetilde{\varphi}_0([v]) = ([v], 0)$ per $[v] \in \mathbb{CP}^n$, sia un biolomorfismo. Il resto dell'atlante di $\tilde{M}$ è formato dalle altre carte $\{U_\alpha\}_{\alpha \neq 0}$. Poiché fuori dal divisore eccezionale si ha un biolomorfismo tra $\pi_2^{-1}(V) \setminus E$ e $V \setminus \{p\}$, è chiaro che i cambiamenti di carta dell'atlante $\{U_\alpha\}$ sono olomorfi e danno una struttura di varietà complessa a $\tilde{M}$.

Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un aperto contenente 0. Sia $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$. Sia $S = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}$. Allora S si dice una ipersuperficie (possibilmente singolare). Definiamo la *trasformata stretta* di S mediante scoppiamento nel punto O, indicata con $\tilde{S}$, come la chiusura topologica in $\mathcal{O}(-1)$ di $\pi_2^{-1}(S \setminus \{O\})$.

Si può dimostrare che se $n = 2$ e S è una curva con singolarità in O, allora con un numero finito di scoppiamenti si *desingolarizza* S. Ovvero la trasformata stretta di S dopo un numero finito di scoppiamenti è una curva non singolare che è biolomorfa alla curva S tranne un numero finito di punti.

ESEMPIO 12.11. A titolo di esempio calcoliamo la trasformata stretta della cuspide $S := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^3 - z_2^2 = 0\}$ tramite lo scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in $(0, 0)$. Per la (12.5), nella carta $(\pi_1^{-1}(U_0), \widetilde{\varphi}_0)$ la proiezione $\pi_2 : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{C}^2$ è definita da $\pi_2(x, \lambda) = (\lambda, \lambda x)$. Sia $f(z_1, z_2) = z_1^3 - z_2^2$. Poiché $p \in \mathcal{O}(-1)|_{\pi_1{}^{-1}(U_0)}$ appartiene a $\pi_2^{-1}(S)$ se e solo se $f(\pi_2(p)) = 0$, si ha $\widetilde{\varphi}_0(\pi_2^{-1}(S)) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{C}^2 : \lambda^2(\lambda - x^2) = 0\}$. Sappiamo che $\widetilde{\varphi}_0(E \cap \pi_1^{-1}(U_0)) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{C}^2 : \lambda = 0\}$, dunque, $\widetilde{\varphi}_0(p) = (\lambda, x) \in \widetilde{\varphi}_0(\pi_2^{-1}(S \setminus \{(0, 0)\}))$ se e solo se $\lambda - x^2 = 0$. Pertanto, essendo la funzione $(\lambda, x) \mapsto \lambda - x^2$ olomorfa, risulta

$$\widetilde{\varphi}_0(\tilde{S} \cap \pi_1^{-1}(U_0)) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{C}^2 : \lambda - x^2 = 0\}.$$

In particolare si noti che tale curva è regolare e $\widetilde{\varphi}_0(\tilde{S} \cap E) = \{(0, 0)\}$.

Ragionando in modo simile per l'altra carta di $\mathcal{O}(-1)$ data da $(\widetilde{\varphi}_1, \pi_1^{-1}(U_1))$ dove la proiezione è definita da $\pi_2(\lambda, x) = (\lambda x, \lambda)$, si ottiene $\widetilde{\varphi}_0(\tilde{S} \cap \pi_1^{-1}(U_1)) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{C}^2 : \lambda x - 1 = 0\}$. In particolare $\tilde{S} \cap E \cap \pi_1^{-1}(U_1) = \emptyset$, e dunque $\tilde{S}$ è non singolare.

ESERCIZIO 12.12. Trovare la trasformata stretta mediante lo scoppiamento di $\mathbb{C}^2$ in O delle curve

(1) $\{(z_1, z_2) : z_1 = a z_2^2\}$, $a \in \mathbb{C}$,
(2) $\{(z_1, z_2) : z_1^2 = z_2^3\}$,
(3) $\{(z_1, z_2) : z_1^2 = z_2^2\}$.

13. Strutture quasi complesse

Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n. Si può considerare $M^{\mathbb{R}}$ come una varietà (analitica) reale di dimensione reale $2n$ mediante la struttura reale soggiacente ottenuta identificando $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$. In termini di coordinate locali, se $\{(U_\alpha, z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)\}$ è un atlante olomorfo di M, si ottiene un atlante analitico reale di $M^{\mathbb{R}}$ tramite le carte definite da $\{(U_\alpha, \mathsf{Re}\, z_1^\alpha, \ldots, \mathsf{Re}\, z_n^\alpha, \mathsf{Im}\, z_1^\alpha, \ldots, \mathsf{Im}\, z_n^\alpha)\}$.

Per ogni $p \in U_\alpha$, l'insieme $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}(p), \frac{\partial}{\partial y_1^\alpha}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n^\alpha}(p)\}$ è una base di $T_pM^{\mathbb{R}}$, dove, abbiamo denotato con $x_j^\alpha := \mathsf{Re}\, z_j^\alpha$, $y_j^\alpha := \mathsf{Im}\, z_j^\alpha$.

Se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, denotiamo con $\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}$ la matrice $n \times n$ la cui entrata di posto (k, j) è $\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta}$, e similmente $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}$, etc.

Ricordando che, per le equazioni di Cauchy-Riemann, $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}$ e $\frac{\partial y^\alpha}{\partial y^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}$, le funzioni di transizione di $TM^{\mathbb{R}}$ sono quindi

$$g_{\alpha\beta}^{TM^{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial y^\alpha}{\partial y^\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \\ -\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

Allo stesso tempo, si può considerare l'insieme $(TM)^{\mathbb{R}}$ dato dall'unione disgiunta degli spazi vettoriali reali $(T_pM)^{\mathbb{R}}$, ottenuti restringendo a $\mathbb{R}$ la moltiplicazione per scalari complessi in T_pM, al variare di $p \in M$.

LEMMA 13.1. *Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n. Allora $(TM)^{\mathbb{R}}$ è un fibrato vettoriale reale di rango $2n$ su $M^{\mathbb{R}}$, isomorfo a $TM^{\mathbb{R}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo coordinate locali olomorfe $(z_1, \ldots, z_n)$ su un aperto coordinato U di M. Allora, per ogni $p \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p), i\frac{\partial}{\partial z_1}(p), \ldots, i\frac{\partial}{\partial z_n}(p)\}$ è una base su $\mathbb{R}$ di $(T_pM)^{\mathbb{R}}$. Questo permette di definire delle trivializzazioni locali di $(TM)^{\mathbb{R}}$, ottenute tramite

$$(T_pM)^{\mathbb{R}} \ni \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial z_j}(p) \mapsto (p; (\mathsf{Re}\,\lambda_1, \ldots, \mathsf{Re}\,\lambda_n, \mathsf{Im}\,\lambda_1, \ldots, \mathsf{Im}\,\lambda_n)) \in U \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Come al solito, si definisce su $(TM)^{\mathbb{R}}$ la topologia meno fine che rende tali mappe degli omeomorfismi.

Cambiando coordinate locali su M, scriviamo $z_j^\alpha = x_j^\alpha + i y_j^\alpha$ per la naturale decomposizione in parte reale e parte immaginaria, $j = 1, \ldots, n$, e similmente per z_j^β. Denotiamo con $\frac{\partial z^\alpha}{\partial z^\beta}$ la matrice $n \times n$ la cui entrata di posto (k, j) è $\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial z_j^\beta}$, e similmente $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}$, etc, denotano le rispettive matrici $n \times n$. Poniamo $\lambda^\alpha := (\lambda_1^\alpha, \ldots, \lambda_n^\alpha)^t$, $a^\alpha := \mathsf{Re}\,\lambda^\alpha, b^\alpha := \mathsf{Im}\,\lambda^\alpha$. Allora, abbiamo

$$\lambda^\alpha = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^\beta} \lambda^\beta. \tag{13.2}$$

Ricordando che, dalle equazioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial z_j^\beta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - i\frac{\partial z_k^\alpha}{\partial y_j^\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} + i\frac{\partial y_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - i\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial y_j^\beta} + \frac{\partial y_k^\alpha}{\partial y_j^\beta}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} + \frac{\partial y_k^\alpha}{\partial y_j^\beta} + i\left(\frac{\partial y_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial y_j^\beta}\right)\right) = \frac{\partial x_k^\alpha}{\partial x_j^\beta} - i\frac{\partial x_k^\alpha}{\partial y_j^\beta},\end{aligned}$$

risulta dalla (13.2),

$$a^\alpha + ib^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}a^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}b^\beta + i\left(-\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}a^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}b^\beta\right).$$

In altri termini,

$$\begin{pmatrix}\mathsf{Re}\,\lambda^\alpha\\ \mathsf{Im}\,\lambda^\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\\ -\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathsf{Re}\,\lambda^\beta\\ \mathsf{Im}\,\lambda^\beta\end{pmatrix}.$$

Da qui segue subito che le funzioni di transizione di $(TM)^\mathbb{R}$ sono date da $\begin{pmatrix}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\\ -\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\end{pmatrix}$. Pertanto $(TM)^\mathbb{R}$ è un fibrato vettoriale reale su $M^\mathbb{R}$ di rango $2n$ isomorfo a $TM^\mathbb{R}$ per le (13.1). □

OSSERVAZIONE 13.2. Dalla dimostrazione precedente segue che, fissate coordinate olomorfe $(z_1,\dots,z_n)$ in un intorno di $p\in M$, se $v=\sum_{j=1}^n[a_j\frac{\partial}{\partial z_j}(p)+b_ji\frac{\partial}{\partial z_j}(p)]\in(T_pM)^\mathbb{R}$, con $a_j,b_j\in\mathbb{R}$, l'isomorfismo tra $(TM)^\mathbb{R}$ e $TM^\mathbb{R}$, è dato da

$$(T_pM)^\mathbb{R}\ni v\mapsto v^\mathbb{R}=\sum_{j=1}^n[a_j\frac{\partial}{\partial x_j}(p)+b_j\frac{\partial}{\partial y_j}(p)]\in T_pM^\mathbb{R}. \tag{13.3}$$

La moltiplicazione per i su ogni spazio tangente T_pM definisce un endomorfismo $J_p:(T_pM)^\mathbb{R}\to(T_pM)^\mathbb{R}$ tale che $J_p^2=-\mathsf{id}$. Per il lemma precedente, questo definisce un endomorfismo (che chiamiamo ancora) $J_p:T_pM^\mathbb{R}\to T_pM^\mathbb{R}$ tale che $J_p^2=-\mathsf{id}$. Tale endomorfismo si dice una *struttura quasi-complessa* su $T_pM^\mathbb{R}$. Si verifica facilmente che

$$M\ni p\mapsto J_p\in\mathsf{Hom}_p(TM^\mathbb{R},TM^\mathbb{R})$$

è una sezione C^∞ globale J di $\mathsf{Hom}(TM^\mathbb{R},TM^\mathbb{R})$ [in effetti basta provare che è una sezione liscia di tale fibrato, si verifica direttamente in coordinate locali, farlo per esercizio].

OSSERVAZIONE 13.3. Se $(z_1,\dots,z_n)$ sono coordinate locali olomorfe in un intorno di p, dalla (13.3) segue subito che $J_p(\frac{\partial}{\partial x_j}(p))=\frac{\partial}{\partial y_j}(p)$ e $J_p(\frac{\partial}{\partial y_j}(p))=-\frac{\partial}{\partial x_j}(p)$, $j=1,\dots,n$.

Si consideri il fibrato banale $M\times\mathbb{C}$, visto come fibrato reale banale di rango due, e si definisca il prodotto tensoriale di fibrati vettoriali reali

$$TM^\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}:=TM^\mathbb{R}\otimes(M\times\mathbb{C}).$$

Si noti che $TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ è un fibrato vettoriale con fibra complessa di dimensione complessa $2n$.

La struttura quasi complessa J_p determina un endomorfismo naturale

$$J_p^{\mathbb{C}} : TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \to TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C},$$

definito sugli elementi semplici tramite

$$J_p^{\mathbb{C}}(v \otimes \alpha) := J_p(v) \otimes \alpha.$$

Dunque è determinato una sezione liscia $J^{\mathbb{C}} \in \mathsf{Hom}(TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}, TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C})$.

Poichè per ogni $p \in M$ si ha $(J_p^{\mathbb{C}})^2 + \mathsf{id} = 0$, il polinomio minimo di $J_p^{\mathbb{C}}$ è $x^2 + 1$, che si spezza in due fattori lineari, $(x - i)(x + i)$. Denotiamo $E_z(i)$ e $E_z(-i)$ gli autospazi di $J_p^{\mathbb{C}}$ in $TM_z^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ e denotiamo con $E(i) = \bigcup_{z \in M} E_z(i)$ e $E(-i) = \bigcup_{z \in M} E_z(-i)$.

Il fibrato vettoriale $TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ ammette un automorfismo naturale dato dal coniugio, definito sugli elementi semplici tramite $\overline{v \otimes \alpha} := v \otimes \overline{\alpha}$. Dunque, se $X = \sum v_j \otimes \alpha_j \in E(i)$ si ha

$$\sum J(v_j) \otimes \alpha_j = J^{\mathbb{C}}(X) = iX = \sum v_j \otimes i\alpha_j,$$

da cui coniugando

$$\sum J(v_j) \otimes \overline{\alpha_j} = J^{\mathbb{C}}(\overline{X}) = -i\overline{X} = \sum v_j \otimes -i\overline{\alpha_j}.$$

Da questo segue che $\overline{E(i)} = E(-i)$. Dunque $E(i)$ e $E(-i)$ hanno lo stesso rango (complesso) pari a n. Da cui segue che il rango di $J_p^{\mathbb{C}} \pm i\mathsf{id}$ è costante in p e pertanto $E(i)$ e $E(-i)$ sono dei sottofibrati vettoriali di $TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

Definiamo

$$TM^{1,0} := E(i), \quad TM^{0,1} := E(-i).$$

Dunque

$$TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1},$$

con $\overline{TM^{1,0}} = TM^{0,1}$.

LEMMA 13.4. *TM è isomorfo come fibrato vettoriale C^∞ con fibra complessa a $T^{1,0}M$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in TM_p$. Si definisce $\varphi : TM \to T^{1,0}M$ tramite

$$\varphi(p)(v) := \frac{1}{2}[v^{\mathbb{R}} \otimes 1 - (Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i],$$

dove abbiamo denotato con $v^{\mathbb{R}}$ l'immagine di v in $T_pM^{\mathbb{R}}$. Si verifica che φ è effettivamente una sezione liscia di $\mathsf{Hom}(TM, TM^{1,0})$ (in particolare è liscia ed è $\mathbb{C}$-lineare sulle fibre). Si ha

$$\begin{aligned} J^{\mathbb{C}}(\varphi(p)(v)) &= \frac{1}{2}[(Jv^{\mathbb{R}}) \otimes 1 - J(Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i] = \frac{1}{2}[(Jv^{\mathbb{R}}) \otimes 1 + v^{\mathbb{R}} \otimes i] \\ &= \frac{i}{2}[v^{\mathbb{R}} \otimes 1 - (Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i] = i\varphi(p)(v). \end{aligned}$$

Ora, supponiamo $\varphi(p)(v) = 0$. Pertanto $v^{\mathbb{R}} \otimes 1 = (Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i$. Ma allora

$$-(Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i = \overline{(Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i} = \overline{v^{\mathbb{R}} \otimes 1} = v^{\mathbb{R}} \otimes 1 = (Jv^{\mathbb{R}}) \otimes i$$

che implica $Jv^{\mathbb{R}} = 0$, ed essendo J un isomorfismo, si ha $v^{\mathbb{R}} = 0$, ovvero $v = 0$.

Dunque $\mathsf{Ker}\varphi(p) = 0$ per ogni p e φ è l'isomorfismo cercato. □

OSSERVAZIONE 13.5. Per costruzione, TM è un *fibrato olomorfo* di rango complesso n, mentre $TM^{1,0}$ e $TM^{0,1}$ sono fibrati complessi (cioé di classe C^∞) con fibra complessa e di rango complesso n.

OSSERVAZIONE 13.6. Se $(z_1, \ldots, z_n)$ sono coordinate locali olomorfe in un intorno di $p \in M$, dalla (13.3) si ha che $\left(\frac{\partial}{\partial z_j}(p)\right)^{\mathbb{R}} = \frac{\partial}{\partial x_j}(p)$. Pertanto, tenendo conto dell'Osservazione 13.3, il vettore $\frac{\partial}{\partial z_j}(p) \in T_pM$ corrisponde nell'isomorfismo dato dal lemma precedente al vettore

$$\varphi(p)(\frac{\partial}{\partial z_j}(p)) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \otimes 1 - \frac{\partial}{\partial y_j}(p) \otimes i) \in T_pM^{1,0}.$$

DEFINIZIONE 13.7. Sia N una varietà reale. Se esiste $J \in \mathsf{Hom}(TN, TN)$ tale che $J^2 = -\mathsf{id}$, si dice che (N, J) è una *varietà quasi complessa.*

Se $N = M^{\mathbb{R}}$ è la struttura di varietà analitica reale soggiacente ad una struttura di varietà complessa e J è la struttura quasi complessa naturale, si dice che J è una *struttura quasi complessa integrabile.*

OSSERVAZIONE 13.8. Se (N, J) è una varietà quasi complessa, allora $\dim_{\mathbb{R}} N = 2n$ e N è orientabile (provarlo per esercizio).

OSSERVAZIONE 13.9. Se (N, J) è una varietà quasi complessa si può ripetere la precedente costruzione e scrivere $TN \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}N \oplus T^{0,1}N$ con $T^{1,0}N = \overline{T^{0,1}N}$, essendo $T^{1,0}N$ e $T^{0,1}N$ i sottofibrati vettoriali di $TN \otimes \mathbb{C}$ con fibra complessa data dagli autospazi di $J^{\mathbb{C}}$.

DEFINIZIONE 13.10. Sia (N, J) una varietà quasi complessa. Si definiscono i fibrati vettoriali con fibra complessa

$$TN^{p,q} := \underbrace{TN^{1,0} \otimes \ldots \otimes TN^{1,0}}_{p} \otimes \underbrace{TN^{0,1} \otimes \ldots \otimes TN^{0,1}}_{q}$$

Risulta ovviamente

$$TN^{\otimes m} \otimes \mathbb{C} = (TN \otimes \mathbb{C})^{\otimes m} = \bigoplus_{p+q=m} TN^{p,q}.$$

Si possono poi definire i fibrati delle $(p, 0)$-forme e delle $(0, q)$-forme nel modo seguente:

$$\bigwedge^{p,0} N := \bigwedge^{p} (TN^{1,0})^*, \quad \bigwedge^{0,q} N := \bigwedge^{p} (TN^{0,1})^*.$$

Poiché $T^{1,0}N$ è un sottofibrato vettoriale di $TN \otimes \mathbb{C}$, si ha un naturale morfismo iniettivo di fibrati vettoriali $\bigwedge^{p,0} N \hookrightarrow \bigwedge^p (TN \otimes \mathbb{C})^*$. Similmente, si ha un naturale morfismo iniettivo $\bigwedge^{0,q} N \hookrightarrow \bigwedge^q (TN \otimes \mathbb{C})^*$. Pertanto si può definire il fibrato delle forme di *bigrado* (p, q) (o

(p,q)-*forme*) come il sottofibrato di $\bigwedge^{p+q}(TN\otimes\mathbb{C})^*$ generato da $\bigwedge^{p,0}N\wedge\bigwedge^{0,q}N$. In altri termini un elemento $\tau\in\bigwedge^{p,q}N$ è tale che $\tau(v)=0$ se $v\notin TN^{p,q}$.

Risulta

$$\bigwedge^m(TN^*)\otimes\mathbb{C}=\bigwedge^m(TN^*\otimes\mathbb{C})=\bigoplus_{p+q=m}\bigwedge^{p,q}N.$$

13.1. Espressioni in coordinate locali. Sia M una varietà complessa di dimensione n, U una carta locale con coordinate locali $(z_1,\dots,z_n)$. Allora $M^{\mathbb{R}}$ ha coordinate locali su U date da $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$, dove abbiamo posto $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ ponendo $z_j=x_j+iy_j$.

Su U una base locale di TM è data da $\{\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}\}$ mentre una base locale di $TM^{\mathbb{R}}$ su U è data da $\{\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n},\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\}$ e $T_pM^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ su U ha una base locale data da $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\otimes 1,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\otimes 1,\frac{\partial}{\partial y_1}\otimes 1,\dots,\frac{\partial}{\partial y_n}\otimes 1\}$.

Sia $p\in U$. Osserviamo che T_pM è lo spazio delle derivazioni dei germi di *funzioni olomorfe* in p, in particolare (per il momento) è ben definito $\frac{\partial}{\partial z_j}f$ *solamente* per funzioni olomorfe $f\in\mathcal{O}_{M,p}$.

Mentre $T_pM^{\mathbb{R}}$ è lo spazio delle derivazioni dei germi di *funzioni* C^∞ a *valori reali* in p, $C^\infty_{M,\mathbb{R},p}$.

Possiamo identificare $T_pM^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ con lo spazio delle derivazioni dei germi di *funzioni* C^∞ *a valori complessi* in p. Infatti, Se $f:U\to\mathbb{C}$ è una funzione C^∞, scriviamo $f=a+ib$. Allora per un elemento semplice $v\otimes\alpha\in T_pM^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ si definisce

$$(v\otimes\alpha)(f):=\alpha(v(a)+iv(b)).$$

D'altra parte se v è una derivazione di germi di funzioni C^∞ a valori complessi in p, si ha

$$v=\sum\alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}\otimes 1+\sum\beta_j\frac{\partial}{\partial y_j}\otimes 1$$

con $\alpha_j:=v(x_j)$ e $\beta_j:=v(y_j)$ numeri complessi.

Similmente, TM^* ha una base locale su U data da $\{dz_1,\dots,dz_n\}$, mentre $(TM^{\mathbb{R}})^*$ ha una base locale su U data da $\{dx_1,\dots,dx_n,dy_1,\dots,dy_n\}$ e $(TM^{\mathbb{R}})^*\otimes\mathbb{C}$ ha una base locale su U data da $\{dx_1\otimes 1,\dots,dx_n\otimes 1,dy_1\otimes 1,\dots,dy_n\otimes 1\}$.

Ora, se $f\in\mathcal{O}_{M,p}$, il suo differenziale $df:T_pM\to\mathbb{C}$, definito tramite $df(v):=v(f)(p)$ per $v\in T_pM$, è un elemento di TM^*. Utilizzando il fatto che $TM^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ è lo spazio delle derivazioni dei germi di funzioni C^∞ a valori complessi, possiamo dunque definire un operatore $\mathbb{C}$-lineare $(df)^{\mathbb{R}}\otimes 1\in(TM^{\mathbb{R}})^*\otimes\mathbb{C}$ tramite $((df)^{\mathbb{R}}\otimes 1)(v):=v(f)(p)$ per ogni $v\in TM^{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$. Pertanto

$$((dz_j)^{\mathbb{R}}\otimes 1)(\frac{\partial}{\partial x_k}\otimes 1)=(\frac{\partial}{\partial x_k})(z_j)=\frac{\partial z_j}{\partial x_k}=\delta_k^j$$

e

$$((dz_j)^{\mathbb{R}}\otimes 1)(\frac{\partial}{\partial y_k}\otimes 1)=(\frac{\partial}{\partial y_k})(z_j)=\frac{\partial z_j}{\partial y_k}=i\delta_k^j,$$

che implica

$$(dz_j)^{\mathbb{R}} \otimes 1 = (dx_j \otimes 1) + i(dy_j \otimes 1).$$

Dalla Osservazione 13.6, si ha che

$$dz_j \left(\varphi(p)(\frac{\partial}{\partial z_k}(p)) \right) = \delta_j^k.$$

In genere, con un leggero abuso di notazione, si omette di scrivere $\otimes 1$, e si scrive

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \varphi(p)(\frac{\partial}{\partial z_k}(p)) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}) \quad dz_j = dx_j + idy_j.$$

In tal modo, l'operatore $\frac{\partial}{\partial z_j}$ viene esteso ad una derivazione di funzioni a valori complesse ma non necessariamente olomorfe. Da ora in poi ometteremo di scrivere $\otimes 1$ quando non necessario.

Dal Lemma 13.4, segue che $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ sono una base di $TM^{1,0}$. Essendo $\overline{TM^{1,0}} = TM^{0,1}$, risulta quindi che, ponendo per $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \overline{\frac{\partial}{\partial z_j}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

$\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\}$ è una base di $TM^{0,1}$ e $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\}$ è una base di $TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

La base duale è $\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$, con $d\overline{z}_j := dx_j - idy_j$.

Dunque le sezioni C^∞ locali di $TM^{p,q}$ sono espresse su U da

$$\sum a_{j_1 \ldots j_{p+q}} \frac{\partial}{\partial z_{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial z_{j_p}} \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{j_{p+1}}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{j_{p+q}}}$$

dove $a_{j_1 \ldots j_{p+q}} : U \to \mathbb{C}$ sono funzioni C^∞. Similmente, le sezioni C^∞ locali di $\bigwedge^{p,q} M$ sono espresse su U da

$$\sum b_{j_1 \ldots j_{p+q}} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_{p+q}} \tag{13.4}$$

dove $b_{j_1 \ldots j_{p+q}} : U \to \mathbb{C}$ sono funzioni C^∞.

OSSERVAZIONE 13.11 (Equazioni di Cauchy-Riemann). Sia $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione C^∞. Si ha che f è olomorfa se e solo se df è $\mathbb{C}$-lineare. Ovvero $df_p : T_pM \to \mathbb{C}$ è tale che $df_p(iv) = idf_p(v)$ per ogni $v \in T_pM$. Vedendo df come elemento di $(TM^{\mathbb{R}})^* \otimes \mathbb{C}$, questo significa che f è olomorfa se e solo se

$$df \circ J^{\mathbb{C}} = idf. \tag{13.5}$$

Scrivendo $f = a + ib$, nelle coordinate locali scelte, risulta

$$df = da + idb = \sum \left[\frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial a}{\partial y_j} dy_j + i(\frac{\partial b}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial b}{\partial y_j} dy_j) \right],$$

e dalla (13.4)

$$df \circ J^{\mathbb{C}} = \sum \left[-\frac{\partial a}{\partial y_j} dx_j + \frac{\partial a}{\partial x_j} dy_j + i(-\frac{\partial b}{\partial y_j} dx_j + \frac{\partial b}{\partial x_j} dy_j) \right].$$

Dunque (13.6) si ha che f è olomorfa se e solo se

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial x_j} & = \frac{\partial a}{\partial y_j} \\ \frac{\partial b}{\partial y_j} & = -\frac{\partial a}{\partial x_j} \end{cases}$$

CAPITOLO 3

Campi di vettori, foliazioni e forme differenziali

1. Campi di vettori e parentesi di Lie

DEFINIZIONE 1.1. Sia M una varietà. Sia $U \subset M$ un aperto. Un sezione $v \in C^\infty(U; TM)$ si dice un *campo di vettori* su U.

OSSERVAZIONE 1.2. Lo spazio vettoriale $C^\infty(U; TM)$ è un modulo su $C^\infty_M(U)$. Ovvero, se $f \in C^\infty_M(U)$ e $v \in C^\infty(U; TM)$, allora $fv \in C^\infty(U; TM)$ e soddisfa tutti gli assiomi di modulo su un anello.

Se v è un campo di vettori su U e $f \in C^\infty_M(U)$, allora si può definire una nuova funzione di classe C^∞ data da $v(f) := v(x)(f) \in C^\infty_M(U)$. In particolare, se $f \in C^\infty_{M,p}$ e v è un campo di vettori definito in un intorno di p, risulta ben definito il germe $v(f) \in C^\infty_{M,p}$. Pertanto, se w è un altro campo di vettori definito in un intorno di p, si può definire lo scalare $w(p)(v(f))$ (ovvero la derivazione in p del germe $v(f)$ tramite il vettore $w(p)$).

Se $v, w \in C^\infty(U; TM)$ si definisce allora un nuovo campo di vettori $[v, w] \in C^\infty(U; TM)$ tramite la formula

$$[v, w](p)(f) := v(p)(w(f)) - w(p)(v(f)) \quad \forall f \in C^\infty_{M,p}.$$

DEFINIZIONE 1.3. Se $v, w \in C^\infty(U; TM)$, il campo di vettori $[v, w] \in C^\infty(U; TM)$ si dice la *parentesi di Lie* di v, w.

Dalla definizione segue immediatamente che la parentesi di Lie soddisfa alle seguenti proprietà:

(1) $[v, w] = -[w, v]$ per ogni $v, w \in C^\infty(U; TM)$,
(2) $[\lambda v + \mu v', w] = \lambda[v, w] + \mu[v', w]$ per ogni $v, v', w \in C^\infty(U; TM)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
(3) (*identità di Jacobi*) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ per ogni $u, v, w \in C^\infty(U; TM)$.

DEFINIZIONE 1.4. Uno spazio vettoriale V munito di una forma bilineare antisimmetrica che soddisfa l'identità di Jacobi si dice una *algebra di Lie*.

OSSERVAZIONE 1.5. $C^\infty(U; TM)$ è dunque un'algebra di Lie.

Notiamo che se $f \in C^\infty_M(U)$ e se v, w sono campi di vettori su U, allora per $p \in U$ risulta

$$[fv, w](p) = f(p)[v, w](p) - df_p(w(p))v(p). \tag{1.1}$$

Infatti, presa una funzione $h \in C^\infty(U)$, risulta

$$\begin{aligned}[fv, w](p)(h) &= (f(p)v(p)(w(h)) - w(p)(f \cdot v(h)) \\ &= f(p)v(p)(w(h)) - f(p)w(p)(v(h)) - w(p)(f) \cdot v(p)h.\end{aligned}$$

Se U è una carta locale di M con coordinate $\{x_1, \ldots, x_n\}$ allora $v(p) = \sum a_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}(p)$ e $w(p) = \sum b_j(p)\frac{\partial}{\partial x_j}(p)$. Notiamo che

$$[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0 \quad \forall j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Pertanto dalla (1.1) e dalla (1.2):

$$\begin{aligned}[v, w] &= [\sum a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum b_k \frac{\partial}{\partial x_k}] = \sum_{j,k} [a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, b_k \frac{\partial}{\partial x_k}] \\ &= \sum_{j,k} \left(a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \left[\sum_k \left(a_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k} - b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.6. Si noti che $[v, v] = 0$ per ogni campo di vettori v.

1.1. Flusso di un campo di vettori. Sul fibrato tangente $T\mathbb{R}$ di $\mathbb{R}$ consideriamo come base di sezioni globali la sezione $\mathbb{R} \ni s \mapsto \frac{\partial}{\partial t}(s)$, data da $\frac{\partial}{\partial t}(s)f = \frac{\partial f(t)}{dt}|_{t=s}$ per ogni funzione f di classe C^∞ vicino a s.

TEOREMA 1.7 (flow-box). *Sia X un campo di vettori su una varietà M. Per ogni $p \in M$ esistono $\epsilon > 0$ e $U \subset M$ un aperto contenente p e una funzione di classe C^∞*

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M,$$

tale che $\Phi(0, q) = q$ e, per ogni $q \in U$ fissato,

$$d\Phi(\cdot, q))_s(\frac{\partial}{\partial t}(s)) = X(\Phi(s, q)), \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon), \tag{1.3}$$

e $\Phi(s, \cdot) : U \to \Phi(s, U)$ è un diffeomorfismo per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Inoltre, Φ è unico nel senso seguente: se V è un intorno aperto di p, $\epsilon' > 0$ e $\tilde{\Phi} : (-\epsilon', \epsilon') \times V \to M$ è una funzione C^∞ tale che $\tilde{\Phi}(0, q) = q$, per ogni $q \in V$ fissato, soddisfa la (1.3) *e $\tilde{\Phi}(s, \cdot) : V \to \tilde{\Phi}(s, V)$ è un diffeomorfismo per ogni $s \in (-\epsilon', \epsilon')$, allora $\Phi = \tilde{\Phi}$ su $(-\min\{\epsilon, \epsilon'\}, \min\{\epsilon, \epsilon'\}) \times U \cap V$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $P \in M$. Date coordinate locali (V, φ) in M, $p \in U$ e posto $\varphi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q))$ per $q \in U$, risulta

$$X(q) = \sum_{j=1}^n a_j(q) \frac{\partial}{\partial x^j}(q),$$

per opportune funzioni $a_j \in C^\infty(V)$. Supponiamo che la funzione Φ esista. In tali coordinate locali, scriviamo $\Phi(s,q) = (x_1(s),\ldots,x_n(s)) = x(s)$. Dunque, la (1.3) diventa

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j(t)}{\partial t}|_{t=s}\frac{\partial}{\partial x^j}(x(s)) = d\Phi(\cdot,q))_s(\frac{\partial}{\partial t}(s)) = X(x(s)) = \sum_{j=1}^n a_j(x(s))\frac{\partial}{\partial x^j}(x(s)),$$

con $x(0) = 0$. Questo corrisponde al problema di Cauchy dato da

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j(s)}{\partial s} = a_j(x(s)), \quad j = 1,\ldots,n \\ x(0) = \varphi(q). \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy con dipendenza dai dati iniziali, esistono $\epsilon > 0$, un aperto $\tilde{U}$ in $\mathbb{R}^n$ contenente $\varphi(p)$ e una funzione $\tilde{\Phi} : (-\epsilon,\epsilon)\times\tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $x(s) = \tilde{\Phi}(s,\varphi(q))$ è l'unica soluzione del precedente problema di Cauchy e verifica tutte le proprietà richieste.

Posto $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$ e $\Phi(s,q) = \varphi^{-1}(\tilde{\Phi}(s,\varphi(q)))$, il teorema è dimostrato. $\square$

Per una discussione del teorema flow-box su spazi di Banach complessi si veda [**1**, Cap. 4].

DEFINIZIONE 1.8. Sia M una varietà. Dato X un campo di vettori su M e $p \in M$, la funzione $\Phi : (-\epsilon,\epsilon)\times U \to M$ definita dal Teorema 1.7, si dice il *flusso locale* di X in p.

Si noti che, per l'unicità del flusso locale, vale, dove ha senso

$$\Phi(t+s,q) = \Phi(t,\Phi(s,q)). \tag{1.4}$$

PROPOSIZIONE 1.9. *Sia M una varietà. Sia X un campo di vettori su M e $p \in M$ tale che $X(p) \neq 0$. Allora esistono coordinate locali $(U,(z_1,\ldots,z_n))$ con $p \in U$ tali che $X(q) = \frac{\partial}{\partial z_1}(q)$ per ogni $q \in U$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (U,φ) una carta locale di M, $p \in U$, con coordinate locali $\varphi(q) = (x_1(q),\ldots,x_n(q))$. Poiché $X(p) \neq 0$, a meno di restringere U e cambiare l'ordine delle coordinate, si può supporre che $\{X(q), \frac{\partial}{\partial x_2}(q),\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}(q)\}$ siano linearmente indipendenti su U.

Fissiamo $p \in U$. A meno di traslazioni possiamo supporre $\varphi(p) = (0,\ldots,0)$. Sia $T := \{(q \in U : x_1(q) = x_1(p) = 0\}$. Si noti che T è una sottovarietà regolare di U di codimensione 1. Inoltre, per costruzione, $p \in T$ e, per ogni $q \in T$ risulta $\varphi(q) = (0,x_2(q),\ldots,x_n(q))$.

A meno di restringere U, possiamo supporre che il flusso locale Φ di X sia definito su $(-\epsilon,\epsilon)\times U$. Poiché $\Phi(0,\cdot) = \mathrm{id}$, esistono $\epsilon' > 0$ e un aperto $U' \subset U$ tali che $p \in U'$ e $\Phi(t,U') \subset U$ per ogni $t \in (-\epsilon',\epsilon')$. Sia $T' = T\cap U'$ e sia $V = \varphi(T')$. L'insieme V è un aperto in $\varphi(U')\cap\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$, e quindi può essere pensato come un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$.

Definiamo $\eta : (-\epsilon',\epsilon')\times V \to M$ tramite

$$\eta(t,y_1,\ldots,y_{n-1}) := \Phi(t,\varphi^{-1}(0,y_1,\ldots,y_{n-1})).$$

Poiché

$$d\eta_0(\frac{\partial}{\partial t}) = d\Phi(\cdot, \varphi^{-1}(0,\dots,0))_0(\frac{\partial}{\partial t}) = X(p)$$

e per $j = 1, \dots, n-1$

$$d\eta_0(\frac{\partial}{\partial y_j}) = d\Phi(0, \varphi^{-1}(0, y_1, \dots, y_{n-1}))_0(\frac{\partial}{\partial y_j}) = (d\varphi^{-1})_0(\frac{\partial}{\partial y_j}) = \frac{\partial}{\partial x_{j+1}},$$

ne segue che $d\eta_0$ è un isomorfismo. Pertanto, a meno di restringere V e prendere ϵ' più piccolo, per il teorema della funzione inversa, η è un diffeomorfismo sull'immagine. Dunque, $W := \eta((-\epsilon', \epsilon') \times V)$ è un aperto di M e (W, η^{-1}) è una carta locale di M.

Si noti che, per costruzione, se $q = \eta(t, y_1, \dots, y_n) \in W$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}(q) &= d\eta_{\eta^{-1}(q)}(\frac{\partial}{\partial t}) = d\Phi(\cdot, \varphi^{-1}(0, y_1, \dots, y_{n-1}))_t(\frac{\partial}{\partial t}) \\ &= X(\Phi(t, \varphi^{-1}(0, y_1, \dots, y_{n-1})) = X(q),\end{aligned}$$

e il risultato è provato. $\square$

PROPOSIZIONE 1.10. *Sia M una varietà e sia X un campo di vettori su M e sia $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ il suo flusso locale in un punto $p \in M$. Allora per ogni $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $q \in U$ risulta*

$$d\Phi(s, \cdot)_q(X(q)) = X(\Phi(s, q)).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia f una funzione C^∞ vicino a $\Phi(t, q)$. Allora

$$\begin{aligned}d\Phi(s,\cdot)_q(X(q))f &= X(q)(f \circ \Phi(s, \cdot)) \overset{(1.3)}{=} d\Phi(\cdot, q)_0(\frac{\partial}{\partial t}(0))(f \circ \Phi(s, \cdot)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi(s, \Phi(t, q)))|_{t=0} \overset{(1.4)}{=} \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi(s+t, q))|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi(t, q))|_{t=s} = d\Phi(\cdot, q)_s(\frac{\partial}{\partial t}(s))f = X(\Phi(s, q))f,\end{aligned}$$

e la proposizione è dimostrata. $\square$

2. Foliazioni e il teorema di Frobenius

DEFINIZIONE 2.1. Sia M una varietà di dimensione n. Una *foliazione* (non singolare) $\mathcal{F}$ e dimensione $m < n$ è il dato di un atlante $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di M tale che le carte locali $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ verificano la seguente proprietà. Per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, siano $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Il cambiamento di carta $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ è del tipo

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y) = (h_{\alpha\beta}(x, y), g_{\alpha\beta}(y)), \tag{2.1}$$

dove $(x, y) \mapsto h_{\alpha\beta}(x, y) \in \mathbb{R}^m$ è di classe C^∞ e $(x, y) \mapsto g_{\alpha\beta}(y) \in \mathbb{R}^{n-m}$ è di classe C^∞ e dipende solo dalle variabili y.

L'atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ si dice un *atlante foliato* di $\mathcal{F}$.

Cambiando C^∞ con C^k o olomorfo si ottiene la nozione di foliazione di classe C^k o foliazione olomorfa. Nella seguente trattazione considereremo solo foliazioni di classe C^∞.

Definiamo adesso le "foglie" di una foliazione:

DEFINIZIONE 2.2. Sia M una varietà di dimensione n. Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di dimensione m, e sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante foliato. Sia $y_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Sia

$$P_\alpha(y_0) := \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{y_0\} \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$$

e supponiamolo non vuoto. Le componenti connesse per archi $\{P_\alpha^j(y_0)\}$ di $P_\alpha(y_0)$ si chiamano *placche* di $\mathcal{F}$.

Si osservi che le placche di $\mathcal{F}$ sono sottovarietà regolari di M (si veda la Sezione 7 del Capitolo 1).

Si noti che ogni $p \in U_\alpha$ appartiene ad esattamente una placca $P_\alpha^j(y_0)$. Inoltre, se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) sono carte dell'atlante foliato di $\mathcal{F}$ tali che $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $p \in P_\alpha^j(y_0)$, $p \in P_\beta^k(y_0')$ allora per la (2.1) risulta $y_0 = g_{\alpha\beta}(y_0')$ e

$$P_\alpha^j(y_0) \cap U_\beta = P_\beta^k(y_0') \cap U_\alpha.$$

È dunque ben definita la seguente relazione di equivalenza su M: $x \sim y$ se esistono k placche $P_1, \ldots, P_k$ tali che $x \in P_1$, $y \in P_k$ e $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$ per $j = 1, \ldots, k-1$.

DEFINIZIONE 2.3. Sia M una varietà e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Dato $p \in M$ si definisce la *foglia* di $\mathcal{F}$ per p tramite

$$F_p := \{q \in M : p \sim q\}.$$

Nonostante le placche di $\mathcal{F}$ siano sottovarietà regolari di M, le foglie di $\mathcal{F}$ non sono in generale sottovarietà regolari di M (potrebbero infatti essere dense in M). Però sono sempre sottovarietà immerse, infatti vale

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia M una varietà di dimensione n e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di dimensione m. Sia F una foglia di $\mathcal{F}$. Allora esiste una varietà $\hat{F}$ di dimensione m e una immersione $f : \hat{F} \to M$ tale che $f(\hat{F}) = F$. In particolare, ogni foglia di $\mathcal{F}$ è una sottovarietà immersa di M.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\hat{F} := F$ come insieme.

Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante foliato di $\mathcal{F}$. Sia α tale che $F \cap U_\alpha \neq \emptyset$. Sia $P \subset U_\alpha$ una placca appartenente a F. Scriviamo $\varphi_\alpha(p) = (x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Risulta dunque per definizione che $\varphi_\alpha(P)$ è una componente connessa di $\{(x_\alpha, y_\alpha) : y_\alpha = y_0\}$ per qualche $y_0 \in \mathbb{R}^{n-m}$. Dunque $x_\alpha : P \to \mathbb{R}^m$ è una biiezione sulla immagine, che è un aperto di $\mathbb{R}^n \cap \{y_\alpha = y_0\}$, quindi identificabile con un aperto di $\mathbb{R}^m$. Dotiamo $\hat{F}$ della topologia meno fine che rende le $\{x_\alpha|_P\}$ degli omeomorfismi. In particolare, le placche sono degli aperti di $\hat{F}$. Si noti che $\hat{F}$ è Haudorff e a base numerabile.

Dotiamo $\hat{F}$ dell'atlante definito da $\{P_\gamma, \eta_\gamma\}$, dove le P_γ sono le placche di F e, se $P_\gamma \subset U_\alpha$, denotiamo con η_γ la restrizione di x_α a P_γ. Per le (2.1), i cambi di carta in tale atlante sono di classe C^k, e dunque $\hat{F}$ è una varietà di dimensione m.

Sia poi $f : \hat{F} \to M$ la funzione che ad ogni punto $p \in \hat{F}$ associa il corrispondente punto $p \in F$. Tale funzione è chiaramente iniettiva. Sia $p \in \hat{F}$. Siano (P, η) coordinate locali su $\hat{F}$ come sopra, con $p \in P$, e sia α tale che $P \subset U_\alpha$ (qua stiamo identificando come insiemi F e $\hat{F}$). Allora, se P è la placca corrispondente ad una componente connessa di $\{(x_\alpha, y_\alpha) : y_\alpha = y_0\}$, si ha

$$\varphi_\alpha(f(\eta^{-1}(x))) = (x, y_0).$$

Il che prova che f è di classe C^∞ e il suo differenziale è iniettivo. Pertanto f è una immersione e F è una sottovarietà immersa in M. $\square$

PROPOSIZIONE 2.5. *$f : M \to N$ una sommersione tra due varietà. Sia n la dimensione di M e k la dimensione di N. Allora f determina una foliazione di dimensione $n-k$ su M le cui foglie sono date da $\{f = const\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per ogni $p \in M$ il differenziale df_p ha rango costante, utilizzando il Lemma 7.7 del Capitolo 1, si costruisce un atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ di M e un atlante $\{V_\alpha, \eta_\alpha\}$ di N tale che

$$\eta_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k).$$

Pertanto, risulta che $\{U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ soddisfa la (2.1), ponendo $x = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ e $y = (x_1, \ldots, x_m)$ (verificarlo per esercizio). $\square$

In particolare, ogni fibrato (E, M, π) determina una foliazione su E data dalla sommersione $\pi : E \to M$.

DEFINIZIONE 2.6. Sia M una varietà. Una *distribuzione* V su M di rango r è un sottofibrato di TM di rango r.

In altri termini, una distribuzione V su M di rango r è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e di r campi di vettori $v_1^\alpha, \ldots, v_r^\alpha$ su U_α tale che, per ogni $p \in U_\alpha$, $\{v_1^\alpha(p), \ldots, v_r^\alpha(p)\}$ è una base di V_p.

PROPOSIZIONE 2.7. *Sia M una varietà e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di dimensione m. Allora esiste una unica distribuzione V su M di rango m tale che per ogni $p \in M$, posto F la foglia di $\mathcal{F}$ passante per p, risulta $T_pF = V_p$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante foliato di $\mathcal{F}$. Dato $p \in U_\alpha$, si definisce V_p come il sottospazio vettoriale di T_pM generato da $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m^\alpha}(p)\}$ (ovvero, V_p è lo spazio tangente alla placca di $\mathcal{F}$ in U_α contenente p). Per le (2.1), lo spazio V_p non dipende da α. $\square$

Se $\mathcal{F}$ è una foliazione su M, l'unica distribuzione V data dalla Proposizione 2.7 si denota con $T\mathcal{F}$ e si dice il *fibrato tangente* alla foliazione $\mathcal{F}$.

DEFINIZIONE 2.8. Sia M una varietà. Una distribuzione V su M si dice *integrabile* se esiste una foliazione $\mathcal{F}$ su M tale che $V = T\mathcal{F}$.

Le distribuzioni integrabili si caratterizzano tramite il teorema di Frobenius. Prima di vedere tale teorema, diamo un'altra definizione.

DEFINIZIONE 2.9. Sia M una varietà. Una distribuzione V su M si dice *involutiva* se $[V,V] \subset V$. Ovvero, per ogni coppia di sezioni v, w di V, risulta che $[v,w]$ è ancora una sezione di V.

In particolare, dall'Osservazione 1.6 segue subito che ogni distribuzione di rango 1 è involutiva.

TEOREMA 2.10 (Frobenius). *Sia V una distribuzione di rango r su una varietà M. Allora V è integrabile se e solo se è involutiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se V è integrabile, esiste una unica foliazione $\mathcal{F}$ tale che $V = T\mathcal{F}$. In particolare, utilizzando un atlante foliato $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ per $\mathcal{F}$, risulta che V è generato su U_α dai vettori $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m^\alpha}(p)\}$. Dunque ogni coppia di sezioni v, w di V su U_α è una combinazione lineare di $\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m^\alpha}$ con coefficienti funzioni C^∞. Dalla (1.2) segue subito che $[v,w] \in C^\infty(U_\alpha, V)$ e dunque V è involutiva.

Viceversa, supponiamo che V sia involutiva. Proviamo il teorema per induzione sul rango di V.

V di rango 1. Supponiamo V abbia rango 1. Per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno aperto U di p e un campo di vettori v su U tale che V_p è generato da $v(p)$ per ogni $p \in U$. Per la Proposizione 1.9, possiamo dunque definire un atlante $\{W_\gamma, (z_\gamma^1, \ldots, z_\gamma^n)\}$ di M tale che, se $q \in W_\gamma$, V_q è generato da $\frac{\partial}{\partial z_\gamma^1}(q)$.

In particolare, le sottovarietà regolari di dimensione 1 formate dai $q \in W_\gamma$ tali che $z_\gamma^j(q) =$ costante per $j = 2, \ldots, n$, se non vuote, hanno spazio tangente dato da V_q. Sia $W_\gamma \cap W_\beta \neq \emptyset$. Se $p \in W_\gamma \cap W_\beta$, lo spazio tangente a $\{q \in W_\gamma : z_\gamma^j(q) = z_\gamma^j(p), j = 2, \ldots, n\}$ in p è dato da $\cap_{j=2}^n \ker(dz_\gamma^j)_p$, e coincide con V_p. Pertanto, poiché $\frac{\partial}{\partial z_\beta^1}(p) \in V_p$, ne segue che $(dz_\gamma^j)_p(\frac{\partial}{\partial z_\beta^1}(p)) = 0$ per $j = 2, \ldots, n$, ovvero, $\frac{\partial z_\gamma^j}{\partial z_\beta^1}|_p = 0$ per $j = 2, \ldots, n$. Dunque, $z_\gamma^j = z_\gamma^j(z_\beta^2, \ldots, z_\beta^n)$ per $j = 2, \ldots, n$ (ovvero le ultime $n-1$ coordinate non dipendono dalla prima). Ne segue che $\{W_\gamma, z_\gamma\}$ è un atlante foliato che determina una foliazione $\mathcal{F}$ le cui foglie sono tangenti a V.

Pertanto il teorema è vero per distribuzioni di rango 1.

V di rango $r \geq 1$. Supponiamo adesso V abbia rango r e, per induzione, il teorema sia vero per distribuzioni di rango $r-1$. Sia $p \in M$. Allora esistono un intorno U di p e r campi di vettori $v_1, \ldots, v_r$ che generano V su U. Per la Proposizione 1.9, a meno di restringere U, possiamo scegliere coordinate locali (U, φ) con $\varphi(q) = (y_1(q), \ldots, y_n(q))$ tali che $\varphi(p) = 0$ e che $v_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$.

Definiamo $f_j = v_j(y_1)$ per $j = 2, \ldots, r$ e poniamo $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} = v_1$ e $Y_j = v_j - f_j v_1$ per $j = 2, \ldots, r$. I campi di vettori $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ sono linearmente indipendenti in ogni punto e generano V su U. Inoltre, per costruzione, su U,

$$Y_j(y_1) = v_j(y_1) - f_j v_1(y_1) = f_j - f_j \frac{\partial}{\partial y_1}(y_1) = f_j - f_j \equiv 0, \quad j = 2, \ldots, r. \tag{2.2}$$

Sia $W = \{q \in U : y_1(q) = 0\}$. Si noti che W è una sottovarietà regolare di U di codimensione 1. Inoltre, $T_qW = \{v \in T_qM : (dy_1)_q(v) = v(y_1)|_q = 0\}$. Pertanto, dalla (2.2) segue che $Y_2(q), \ldots, Y_r(q) \in T_qW$ per ogni $q \in W$. Poiché T_qW è generato da $\{\frac{\partial}{\partial y_2}(q), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}(q)\}$, ne segue che esistono $a_2^j, \ldots, a_n^j$ funzioni C^∞ in un intorno di q tali che $Y_j = \sum_{l=2}^n a_l^j \frac{\partial}{\partial y_l}$ in un intorno di q, $j = 2, \ldots, r$.

Siano $Z_j := Y_j|_W$, $j = 2, \ldots, n$. Calcoliamo $[Z_i, Z_j]$, $i, j = 2, \ldots, r$. Osserviamo preliminarmente che, poiché W è data da $y_1 = 0$, se $A = \sum_{l=2}^n q_l \frac{\partial}{\partial y_l}$ e $B = \sum_{l=2}^n p_l \frac{\partial}{\partial y_l}$, con le q_l, p_l funzioni C^∞ in un intorno di q, allora $[A|_W, B|_W] = [A, B]|_W$. Pertanto,

$$[Z_i, Z_j] = [Y_i, Y_j]|_W.$$

Poiché $[Y_i, Y_j] \in V$ per ipotesi, e $[Y_i, Y_j]$ appartiene allo spazio generato da $\{\frac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$, ne segue che $[Y_i, Y_j]$ appartiene allo spazio generato da $\{Y_2, \ldots, Y_r\}$ per ogni $i, j = 2, \ldots, r$. Dunque, $[Z_i, Z_j]$ appartiene allo spazio generato da $\{Z_2, \ldots, Z_r\}$ per ogni $i, j = 2, \ldots, r$.

In altri termini, la distribuzione V' generata da $\{Z_2, \ldots, Z_r\}$ su W è involutiva. Per induzione, $V' = T\mathcal{F}'$ per una foliazione $\mathcal{F}'$ di W. Ovvero, esistono coordinate locali $\{w_2, \ldots, w_n\}$ su W in un intorno di p, che possiamo supporre essere U stesso, tali che $\mathcal{F}'$ sia data da $\{w_{r+1} = \ldots = w_n = \text{costante}\}$ e V' sia dunque generato da $\{\frac{\partial}{\partial w_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_r}\}$. In particolare, visto che Z_j, $j = 2, \ldots, r$ sono tangenti a V' e lo spazio tangente a V' è dato da $\cap_{j=1}^{n-r} \ker dw_{r+j}$, risulta $Z_j w_{r+i} \equiv 0$ per $j = 2, \ldots, r$ e $i = 1, \ldots n - r$.

Definiamo adesso una mappa $\chi : U \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente. Se $q \in U$, sia $q' := \varphi^{-1}(0, y_2(q), \ldots, y_n(q))$. Tale q' è ben definito in un intorno di p, che supponiamo nuovamente essere U stesso. Poniamo allora

$$\chi(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q)) := (y_1(q), w_2(q'), \ldots, w_n(q')).$$

Poiché

$$\chi \circ \varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, w_2(\varphi^{-1}(0, y_2, \ldots, y_n)), \ldots, w_n(\varphi^{-1}(0, y_2, \ldots, y_n))),$$

e sia $\{y_2, \ldots, y_n\}$ che $\{w_2, \ldots, w_n\}$ sono coordinate locali di W, ne segue subito che $d\chi_p$ è invertibile e χ un diffeomorfismo vicino a p, e possiamo nuovamente supporre che sia un diffeomorfismo su tutto U. Pertanto, (U, χ) è una carta locale di M.

Per costruzione, $\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1$ e $\frac{\partial x_j}{\partial y_1} \equiv 0$ per $j = 2, \ldots, n$, e pertanto $Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

Inoltre, $Y_1 x_{r+j} = \frac{\partial}{\partial y_1} w_{r+j}(y_2, \ldots, y_n) \equiv 0$ per $j = 1, \ldots, n-r$. Dunque, per $i = 2, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, n-r$, posto $[Y_1, Y_i] = \sum_{l=1}^r C_{1i}^l Y_l$ (usando l'ipotesi di involutività di V), si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i x_{r+j}) &= Y_1(Y_i x_{r+j}) - 0 = Y_1(Y_i x_{r+j}) - Y_i(Y_1 x_{r+j}) \\ &= [Y_1, Y_i](x_{r+j}) = \sum_{l=1}^r C_{1i}^l (Y_l x_{r+j}) = \sum_{l=2}^r C_{1i}^l (Y_l x_{r+j}).\end{aligned}$$

Sia $g_i := Y_i x_{r+j}$, $i = 2, \ldots, r$. Allora, le g_i sono funzioni C^∞ che risolvono il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie nella variabile x_1 (tenendo fisse le altre variabili):

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_1} = \sum_{l=2}^r C_{1i}^l g_l.$$

Per $x_1 = 0$, $Y_i x_{r+j} = Z_i w_{r+j} \equiv 0$, ovvero $g_i(0) = 0$. Per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, ne segue che $g_i \equiv 0$ per $i = 2, \ldots, r$. Ovvero,

$$Y_i x_{r+j} \equiv 0, \quad i = 2, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, n-r.$$

Questo significa che Y_i non ha componenti lungo $\frac{\partial}{\partial x_{r+j}}$ per $i = 2, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, n-r$. Ovvero, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\}$ generano V su U. Pertanto V è tangente alla foliazione definita da $\{x_{r+1} = \ldots = x_n = \text{costante}\}$.

Si può cosi definire un atlante $\{U_\alpha, \chi_\alpha\}$ tale che, su ciascun U_α, poste $\{x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha\}$ le coordinate locali definite da χ_α, risulta che $V|_U$ è tangente a $\{x_{r+1}^\alpha = \ldots = x_n^\alpha = \text{costante}\}$ ed è generato da $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r^\alpha}\}$. Pertanto, ragionando come nel caso V di rango 1, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, si verifica che $\frac{\partial x_{r+j}^\beta}{\partial x_i^\alpha} \equiv 0$ per $j = 1, \ldots, n-r$ e $i = 1, \ldots, r$, e dunque x_{r+j}^β, per $j = 1, \ldots, n-r$, non dipende da $\{x_1^\alpha, \ldots, x_r^\alpha\}$. Ne segue che $\{U_\alpha, \chi_\alpha\}$ è un atlante foliato per una foliazione $\mathcal{F}$ tale che $T\mathcal{F} = V$. $\square$

3. L'operatore differenziale esterno

Denotiamo con $\bigwedge^p M := \bigwedge^p(TM^*)$ il fibrato delle p-forme differenziali su M. Le sezioni globali di tale fibrato le denotiamo con Ω_M^p, ovvero $\Omega_M^p := C^\infty(M; \bigwedge^p M)$.

In una carta locale U di M con coordinate $\{x_1, \ldots, x_n\}$ si ha che $TM|_U$ ha una base locale data da $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1}\}$. La base di $TM^*|_U$ è allora data da $dx_1, \ldots, dx_n$ dove

$$dx_j(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \delta_{jk}.$$

Ricordiamo che, per $f \in C^\infty(U)$, il differenziale df definisce in modo naturale una sezione di TM^* su U (si veda l'Osservazione 4.4 del Capitolo 2).

In particolare, se $v \in T_pM$ con $p \in U$, allora

$$dx_j(v) = v(x_j).$$

Ricordiamo infine che, per definizione di prodotto esterno di un fibrato vettoriale, una base locale di Ω^p_M su U è data da $\{dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}\}_{1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n}$.

TEOREMA 3.1. *Sia M una varietà. Esiste uno ed un solo operatore $\mathbb{R}$-lineare*

$$d : \Omega^p_M \to \Omega^{p+1}_M$$

tale che

(1) *per ogni $f \in C^\infty(M) = \Omega^0_M$ si ha $df(v) = v(f)$ per ogni $v \in C^\infty(M; TM)$,*
(2) *per ogni $\omega \in \Omega^p_M$ e $\omega' \in \Omega^q_M$ si ha $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega'$*
(3) *$d^2 := d \circ d = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa proviamo che d se esiste è un *operatore locale*, ovvero, se $\omega, \omega' \in \Omega^p_M$ e se U è un aperto in M tale che $\omega|_U = \omega'|_U$ allora $(d\omega)|_U = (d\omega')|_U$.

Sia V un aperto relativamente compatto in U. Sia η una funzione C^∞, $\eta : M \to \mathbb{R}$ tale che $\eta \geq 0$, $\eta(x) = 1$ per ogni $x \in \overline{V}$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subset\subset U$ data dal Lemma 4.1 del Capitolo 1. Allora $\eta(\omega - \omega') \equiv 0$ su M. Dunque

$$0 = d(\eta(\omega - \omega')) = d\eta \wedge (\omega - \omega') + \eta d(\omega - \omega').$$

Su V risulta $d\eta \equiv 0$ e dunque $(d\omega)|_V = (d\omega')|_V$ come si voleva. Per l'arbitrarietà di V risulta $(d\omega)|_U = (d\omega')|_U$, che prova che d, se esiste, è un operatore locale.

Sia ora U una carta locale con coordinate $x_1, \ldots, x_n$. Se $\omega \in \Omega^p_M$ risulta $\omega|_U = \sum a_{j_1 \ldots j_p} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}$. Sostituendo ω con $\eta\omega$ (con η come sopra) e utilizzando il fatto che d è un operatore locale, si può supporre che $\omega = 0$ fuori da U. Dunque, se d esiste, dalla (1), (2) e (3) risulta

$$d\omega = \sum da_{j_1 \ldots j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}. \tag{3.1}$$

Poiché l'espressione a destra di (3.1) non dipende dalla definizione di d, risulta che se d esiste, è univocamente determinato.

Possiamo adesso utilizzare (3.1) per definire d. Sia $\omega \in \Omega^p_M$. Sia $\{U_\alpha\}$ un atlante di M con coordinate locali $\{x^\alpha_1, \ldots, x^\alpha_n\}$. Allora

$$\omega|_{U_\alpha} = \sum a^\alpha_{j_1 \ldots j_p} dx^\alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^\alpha_{j_p}.$$

definiamo $d\omega|_{U_\alpha}$ utilizzando (3.1). Occorre allora provare che $\{d\omega|_{U_\alpha}\}$ si incollano bene per formare una sezione globale di $\bigwedge^p M$. Poiché $\omega|_{U_\alpha} = \omega|_{U_\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta$ risulta

$$\begin{aligned} \omega|_{U_\alpha} &= \sum a^\alpha_{j_1 \ldots j_p} dx^\alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^\alpha_{j_p} = \sum a^\alpha_{j_1 \ldots j_p} \frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}} dx^\beta_{l_1} \wedge \ldots \wedge dx^\beta_{l_p} \\ &= \sum a^\beta_{l_1 \ldots l_p} dx^\beta_{l_1} \wedge \ldots \wedge dx^\beta_{l_p} \end{aligned}$$

e dunque su $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha

$$a^\beta_{l_1 \ldots l_p} = \sum a^\alpha_{j_1 \ldots j_p} \frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}. \tag{3.2}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
d\omega|_{U_\beta} &= \sum da^\beta_{l_1\dots l_p} \wedge dx^\beta_{l_1} \wedge \dots \wedge dx^\beta_{l_p} \\
&\overset{(3.2)}{=} \sum d\left(\sum a^\alpha_{j_1\dots j_p} \frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}\right) dx^\beta_{l_1} \wedge \dots \wedge dx^\beta_{l_p} \\
&= \sum \left(\frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}\right) da^\alpha_{j_1\dots j_p} \wedge dx^\beta_{l_1} \wedge \dots \wedge dx^\beta_{l_p} \\
&+ \sum a^\alpha_{j_1\dots j_p} d\left(\frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}\right) \wedge dx^\beta_{l_1} \wedge \dots \wedge dx^\beta_{l_p} \\
&= \sum da^\alpha_{j_1\dots j_p} \wedge dx^\alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge dx^\alpha_{j_p} \\
&+ \sum a^\alpha_{j_1\dots j_p} \left(\frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial^2 x^\alpha_{j_k}}{\partial x^\beta_{l_k} \partial x^\beta_h} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}\right) dx^\beta_h \wedge dx^\beta_{l_1} \wedge \dots \wedge dx^\beta_{l_p} \\
&= \sum da^\alpha_{j_1\dots j_p} \wedge dx^\alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge dx^\alpha_{j_p} = d\omega|_{U_\alpha},
\end{aligned}
$$

dove si è utilizzato il fatto che $\frac{\partial x^\alpha_{j_1}}{\partial x^\beta_{l_1}} \cdots \frac{\partial^2 x^\alpha_{j_k}}{\partial x^\beta_{l_k} \partial x^\beta_h} \cdots \frac{\partial x^\alpha_{j_p}}{\partial x^\beta_{l_p}}$ è simmetrico in l_k, h mentre $dx^\beta_h \wedge dx^\beta_{l_k}$ è antisimmetrico in l_k, h, pertanto sommando su tutti gli indici si ottiene zero.

Dunque d è ben definito. Resta da provare che l'operatore soddisfa (1), (2) , (3). La proprietà (1) è ovvia per costruzione. Proviamo che d soddisfa la (2).

Siano $\omega \in \Omega^p_M$ e $\omega' \in \Omega^q_M$. Per la definizione di d, occorre e basta provare la proprietà (2) su una carta locale U con coordinate $(x_1, \dots, x_n)$. Siano $\omega|_U = \sum a_{j_1\dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$ e $\omega'|_U = \sum b_{l_1\dots l_q} dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q}$. Allora

$$
\begin{aligned}
d(\omega \wedge \omega')|_U &= \sum d(a_{j_1\dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots dx_{j_p} \wedge b_{l_1\dots l_q} dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q}) \\
&= \sum b_{l_1\dots l_q} da_{j_1\dots j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \wedge dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q} \\
&+ \sum a_{j_1\dots j_p} db_{l_1\dots l_q} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \wedge dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q} \\
&= \sum b_{l_1\dots l_q} da_{j_1\dots j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \wedge dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q} \\
&+ (-1)^p \sum a_{j_1\dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \wedge db_{l_1\dots l_q} \wedge dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_q} \\
&= d\omega|_U \wedge (-1)^p d\omega'|_U.
\end{aligned}
$$

Per provare (3), con le notazioni precedenti, abbiamo

$$\begin{aligned}
d(d\omega|_U) &= d\sum da_{j_1\ldots j_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p} = d\sum \frac{\partial a_{j_1\ldots j_p}}{\partial x_l}dx_l\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}\\
&= \sum \frac{\partial^2 a_{j_1\ldots j_p}}{\partial x_l\partial x_k}dx_k\wedge dx_l\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p} = 0,
\end{aligned}$$

poiché $\frac{\partial^2 a_{j_1\ldots j_p}}{\partial x_l\partial x_k}$ è simmetrico in l,k mentre $dx_k\wedge dx_l$ è antisimmetrico in l,k, pertanto sommando su tutti gli indici si ottiene zero. □

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia M una varietà. Sia $\omega\in\Omega^p_M$ e siano $v_1,\ldots,v_{p+1}$ campi di vettori su M. Allora*

$$\begin{aligned}
(p+1)!(d\omega)(v_1,\ldots,v_{p+1}) &= \sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l+1}v_l\cdot\omega(v_1,\ldots,\hat{v}_l,\ldots,v_{p+1})\\
&\quad+\sum_{j<k=2}^{p+1}(-1)^{j+k+1}\omega([v_j,v_k],v_1,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_k,\ldots,v_{p+1}).
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE PER $p=1$. Dobbiamo provare che $d\omega(v_1,v_2)=v_1\cdot\omega(v_2)-v_2\cdot\omega(v_1)-\omega([v_1,v_2])$. Poiché d è $\mathbb{R}$-lineare e locale, si può supporre $\omega=fdg$ per qualche funzione f,g. Dunque

$$\begin{aligned}
d\omega(v_1,v_2) &= df\wedge dg(v_1,v_2) = A(df\otimes dg)(v_1,v_2) = \frac{1}{2}[df(v_1)dg(v_2)-df(v_2)dg(v_1)]\\
&= \frac{1}{2}[v_1(f)v_2(g)-v_2(f)v_1(g)] = \frac{1}{2}[v_1(f)v_2(g)-v_2(f)v_1(g)\\
&+ fv_1(v_2(g))-fv_1(v_2(g))+fv_2(v_1(g))-fv_2(v_1(g))]\\
&= \frac{1}{2}[v_1(fdg(v_2))-v_2(fdg(v_1))-fdg([v_1,v_2])].
\end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 3.3. Siano M,N varietà e sia $f:M\to N$ una funzione C^∞. Si definisce un operatore $\mathbb{R}$-lineare

$$f^*:\Omega^p_N\to\Omega^p_M,$$

dato da

$$f^*(\omega)(x)(v_1,\ldots,v_p):=\omega(f(x))(df_x(v_1),\ldots,df_x(v_p)),$$

per ogni $\omega\in\Omega^p_N$, $x\in M$ e $v_1,\ldots,v_p\in T_xM$,

LEMMA 3.4. *Sia $f:M\to N$ C^∞. Allora*

(1) $f^*(\omega\wedge\omega')=f^*(\omega)\wedge f^*(\omega')$ *per ogni* $\omega\in\Omega^p_N$ *e* $\omega'\in\Omega^q_N$.
(2) $f^*(d\omega)=d(f^*\omega)$ *per ogni* $\omega\in\Omega^p_N$.

DIMOSTRAZIONE. (1) segue subito dalla definizione.
(2) Si osserva che per $\omega \in \Omega^p_N, \omega' \in \Omega^q_N$ si ha

$$f^*(d(\omega \wedge \omega')) = f^*(d\omega) \wedge f^*(\omega') + (-1)^p f^*(\omega) \wedge f^*(d\omega').$$

Dunque, essendo d un operatore locale e le forme localmente definite da prodotti wedge di 1-forme, basta provare che $f^* d(hdg) = d(f^* hdg)$ per h, g funzioni lisce. Osserviamo preliminarmente che

$$f^*(hdg) = (h \circ f) d(g \circ f). \tag{3.3}$$

Infatti, se v è un campo vettoriale su M, si ha

$$f^*(hdg)_x(v) := (h(f(x)) dg_{f(x)}(df_x(v)) = (h \circ f) d(g \circ f)_x(v).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f^*(d(hdg)) = f^*(dh \wedge dg) &= f^*(dh) \wedge f^*(dg) = d(h \circ f) \wedge d(g \circ f) \\ &= d((h \circ f) d(g \circ f)) = d(f^*(hdg)). \end{aligned}$$

□

4. Integrazione su varietà

Denotiamo con $|dx_1 \dots dx_n|$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ nelle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$. Supponiamo Q un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) : Q \to \Phi(Q)$ un diffeomorfismo. Sia $y = (y_1, \dots, y_n) := (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$. Allora per ogni funzione $f : \Phi(Q) \to \mathbb{R}$ liscia e sommabile si ha

$$\int_{\Phi(Q)} f(y) |dy_1 \dots dy_n| = \int_Q (f \circ \Phi)(x) \left| \det \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right) \right| |dx_1 \dots dx_n|. \tag{4.1}$$

OSSERVAZIONE 4.1. Sia $\omega \in \Omega^n_{\mathbb{R}^n}$. Siano $(x_1, \dots, x_n)$ coordinate locali su $\mathbb{R}^n$. Poiché $\bigwedge^n \mathbb{R}^n$ ha dimensione 1 e $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ è una base di $\Omega^n_{\mathbb{R}^n}$, allora esiste $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liscia tale che $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

DEFINIZIONE 4.2. Sia $\omega \in \Omega^n_{\mathbb{R}^n}$. Se $\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ha supporto relativamente compatto in $\mathbb{R}^n$, si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) |dx_1 \dots dx_n|.$$

OSSERVAZIONE 4.3. In $\mathbb{R}^2$ con coordinate (x_1, x_2) sia $\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e sia $\omega = f(x) dx_1 \wedge dx_2$. Per (4.1) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) |dy_1 dy_2| = \int_{\mathbb{R}^2} f(\Phi(x)) |dx_1 dx_2| = -\int_{\mathbb{R}^2} \Phi^* \omega.$$

Pertanto la definizione di integrazione di forme dipende dalle coordinate scelte. Più correttamente, l'integrale è ben definito se si consentono solo cambiamenti di coordinate che preservano l'orientazione, ovvero si ammettono solo diffeomorfismi $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tali che la matrice jacobiana ha determinante positivo.

LEMMA 4.4. *Sia $\omega \in \Omega^n_{\mathbb{R}^n}$ tale che* $\mathsf{supp}(\omega) \subset\subset \mathbb{R}^n$. *Sia $\omega = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo che preserva l'orientazione. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^* \omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, posto $y = \Phi(x)$, si ha

$$\Phi^*(\omega) = (f \circ \Phi) \det \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \right) dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n,$$

e dunque essendo $\det\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right) = \left|\det\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}\right)\right|$ per ipotesi, si ha $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi^* \omega$ per la (4.1). □

Per definire l'integrazione di una n-forma su una varietà M dobbiamo richiedere che M sia orientabile e scegliere un *atlante orientato* (ovvero con cambiamenti di carta con determinante dello jacobiano positivo).

DEFINIZIONE 4.5. Sia M una varietà reale di dimensione n, orientata, e sia $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ un atlante orientato per cui $\{U_\alpha\}$ sia localmente finito e ciascun U_α sia relativamente compatto in M. Sia $\{\eta_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Sia $\omega \in \Omega^n_M$ tale che $\mathsf{supp}(\omega) \subset\subset M$. Si definisce

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^* (\eta_\alpha \omega).$$

Osserviamo che per il Lemma 4.4 l'integrale è ben definito, essendo l'atlante orientato. Utilizzando la (4.1) si vede facilmente che $\int_M \omega$ non dipende dall'atlante orientato scelto né dalla partizione dell'unità scelta.

Denotiamo con $\Omega^n_{M,c}$ lo spazio delle n-forme su M a supporto compatto.

OSSERVAZIONE 4.6. L'operatore $\int_M : \Omega^n_{M,c} \to \mathbb{R}$ è un operatore $\mathbb{R}$-lineare.

Sia ora M una varietà con bordo. Sia $i : \partial M \to M$ l'immersione. Se M è orientata, allora ∂M ha una orientazione naturale indotta da M.

TEOREMA 4.7 (Teorema di Stokes). *Sia M una varietà orientata di dimensione n con bordo ∂M orientato in modo naturale. Sia $\omega \in \Omega^{n-1}_{M,c}$. Allora*

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega.$$

DIMOSTRAZIONE. usando le carte locali e la linearità dell'integrale ci si riconduce al classico teorema di Stokes in $\mathbb{R}^n$ (che segue dal teorema fondamentale del calcolo e dal teorema di Fubini-Tonelli). □

COROLLARIO 4.8. *Sia M una varietà compatta orientata di dimensione n senza bordo. Allora per ogni $\omega \in \Omega_M^{n-1}$ risulta*

$$\int_M d\omega = 0.$$

ESERCIZIO 4.9. Sia M una varietà di dimensione n. Provare che M è orientabile se e solo se esiste $\omega \in \Omega_M^n$ tale che $\omega(x) \neq 0$ per ogni $x \in M$. Una tale forma si dice una *forma volume* su M.

OSSERVAZIONE 4.10. Sia M una varietà reale di dimensione n. Allora esiste una sezione globale mai nulla di $\bigwedge^n M$ se e solo se $\bigwedge^n M \simeq M \times \mathbb{R}$. Dunque per l'Esercizio 4.9, M è orientabile se e solo se $\bigwedge^n M$ è banale.

5. Coomologia di de Rham

5.1. Richiami di algebra (co)omologica.

DEFINIZIONE 5.1. Sia $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una famiglia di gruppi abeliani (più in generale le considerazioni che seguono valgono per moduli su un anello commutativo). Supponiamo che per ogni j esista un morfismo $\alpha_j : V_j \to V_{j+1}$ di gruppi. La successione

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\alpha_1} V_2 \xrightarrow{\alpha_2} V_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots$$

si dice un *complesso coomologico* se $\alpha_{j+1} \circ \alpha_j = 0$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Un complesso coomologico si dice *esatto* (la successione corrispondente si dice una *successione esatta*) se $\mathsf{Ker}\alpha_{j+1} = \mathsf{Im}\alpha_j$ per ogni j.

Una successione esatta tale che $V_j = \{0\}$ per ogni $j \geq 4$, ovvero $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$, si dice una *successione esatta corta*.

OSSERVAZIONE 5.2. Se $0 \to V_1 \xrightarrow{\alpha_1} V_2 \xrightarrow{\alpha_2} V_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots$ è una successione esatta α_1 è iniettiva.

Se esiste un j_0 tale che $V_j = 0$ per ogni $j > j_0$ allora l'esattezza della successione implica α_{j_0-1} suriettiva.

ESERCIZIO 5.3. Sia $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione esatta di gruppi abeliani. Se $V_{j-1} = \{0\}$ e $V_{j+2} = \{0\}$ allora $V_j \simeq V_{j+1}$.

DEFINIZIONE 5.4. Sia $\{V^\bullet, \alpha^\bullet\}$ il complesso coomologico

$$V_1 \xrightarrow{\alpha_1} V_2 \xrightarrow{\alpha_2} V_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots$$

Allora si definisce la coomologia di $\{V^\bullet, \alpha^\bullet\}$, e si indica $H^\bullet(\{V^\bullet, \alpha^\bullet\})$ nel modo seguente:

$$H^0(\{V^\bullet, \alpha^\bullet\}) := \mathsf{Ker}(\alpha_1)$$
$$H^p(\{V^\bullet, \alpha^\bullet\}) := \mathsf{Ker}\alpha_{\mathsf{p+1}}/\mathsf{Im}\alpha_{\mathsf{p}}, \quad p > 0.$$

Si noti che poiché per definizione di complesso coomologico $\alpha_p \circ \alpha_{p-1} = 0$, risulta $\mathsf{Im}\alpha_{\mathsf{p-1}} \subseteq \mathsf{Ker}\alpha_{\mathsf{p}}$ e dunque la coomologia è ben definita.

ESERCIZIO 5.5. Un complesso di coomologia è esatto se e solo se la sua coomologia è zero per ogni $p > 0$.

DEFINIZIONE 5.6. Siano $\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}$, $\{B^\bullet, \beta^\bullet\}$ due complessi coomologici. Un *morfismo* di complessi coomologici è una famiglia $\{\varphi^\bullet\}$ di morfismi di gruppi tali che per ogni j il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\varphi_j} & B_j \\ {\scriptstyle\alpha_j}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta_j} \\ A_{j+1} & \xrightarrow{\varphi_{j+1}} & B_{j+1} \end{array}$$

sia commutativo.

OSSERVAZIONE 5.7. Sia $\{\varphi^\bullet\}$ un morfismo tra due complessi coomologici $\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}$, $\{B^\bullet, \beta^\bullet\}$. Poiché $\varphi_{j+1} \circ \alpha_j = \beta_j \circ \varphi_j$ risulta che $\{\varphi^\bullet\}$ induce per ogni $p \geq 0$ un morfismo in coomologia

$$\varphi^p : H^p(\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}) \to H^p(\{B^\bullet, \alpha^\bullet\}).$$

DEFINIZIONE 5.8. Una successione

$$0 \to \{A^\bullet, \alpha^\bullet\} \xrightarrow{\varphi^\bullet} \{B^\bullet, \beta^\bullet\} \xrightarrow{\psi^\bullet} \{C^\bullet, \gamma^\bullet\} \to 0$$

di complessi coomologici si dice *esatta* se per ogni j la successione

$$0 \to A_j \xrightarrow{\varphi_j} B_j \xrightarrow{\psi_j} C_j \to 0$$

è esatta.

TEOREMA 5.9 (Lemma del Serpente). *Sia*

$$0 \to \{A^\bullet, \alpha^\bullet\} \xrightarrow{\varphi^\bullet} \{B^\bullet, \beta^\bullet\} \xrightarrow{\psi^\bullet} \{C^\bullet, \gamma^\bullet\} \to 0$$

una successione esatta di complessi coomologici. Allora esiste una successione esatta lunga in coomologia

$$\ldots \longrightarrow H^p(\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}) \xrightarrow{\varphi^p} H^p(\{B^\bullet, \beta^\bullet\}) \xrightarrow{\psi^p} H^p(\{C^\bullet, \gamma^\bullet\}) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}) \longrightarrow \ldots$$

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio provare che la successione

$$H^p(\{A^\bullet, \alpha^\bullet\}) \xrightarrow{\varphi^p} H^p(\{B^\bullet, \beta^\bullet\}) \xrightarrow{\psi^p} H^p(\{C^\bullet, \gamma^\bullet\})$$

è esatta. Dobbiamo poi definire δ^p. Per ipotesi abbiamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_{p-1} & \xrightarrow{\varphi_{p-1}} & B_{p-1} & \xrightarrow{\psi_{p-1}} & C_{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_{p-1}}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_{p-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_{p-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{\varphi_p} & B_p & \xrightarrow{\psi_p} & C_p & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_p}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_p} & & \\
0 & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{\varphi_{p+1}} & B_{p+1} & \xrightarrow{\psi_{p+1}} & C_{p+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Sia $c_p \in C_p$ tale che $\gamma_p(c_p) = 0$ (cosi che $[c_p] \in H^p(\{C^\bullet, \gamma^\bullet\})$). Poiché ψ_p è suriettiva esiste $b_p \in B_p$ tale che $\psi_p(b_p) = c_p$. Sia $b_{p+1} := \beta_p(b_p)$. Poiché

$$\psi_{p+1}(b_{p+1}) = \psi_{p+1}(\beta_p(b_p)) = \gamma_p(\psi_p(b_p)) = \gamma_p(c_p) = 0,$$

per esattezza delle righe del diagramma, esiste (unico) $a^{c_p}_{p+1}$ tale che $\varphi_{p+1}(a^{c_p}_{p+1}) = b_{p+1}$. Si definisce allora

$$\delta^p([c_p]) := [a^{c_p}_{p+1}].$$

Occorre provare che δ^p è ben definito. Per prima cosa notiamo che se $b_p, b'_p \in B_p$ sono tali che $\psi_p(b_p) = \psi_p(b'_p) = c_p$, allora $\psi_p(b_p - b'_p) = 0$, dunque per l'esattezza delle righe esiste $a_p \in A_p$ tale che $\varphi_p(a_p) = b_p - b'_p$. Pertanto, se $a_{p+1}, a'_{p+1} \in A_{p+1}$ sono tali che $\varphi_{p+1}(a_{p+1}) = \beta_p(b_p)$ e $\varphi_{p+1}(a'_{p+1}) = \beta_p(b'_p)$, per la commutatività del diagramma e l'iniettività di φ_{p+1}, risulta $a_{p+1} - a'_{p+1} = \alpha_p(a_p)$, dunque $[a_{p+1}] = [a'_{p+1}]$. Pertanto $\delta^p([c_p])$ non dipende dalla scelta di b_p. Verifichiamo adesso che non dipende nemmeno dal rappresentante scelto per rappresentare $[c_p]$. Siano c_p, c'_p tali che $[c_p] = [c'_p]$. Allora esiste $c_{p-1} \in C_{p-1}$ tale che $\gamma_{p-1}(c_{p-1}) = c_p - c'_p$. Per esattezza delle righe, esiste allora $b_{p-1} \in B_{p-1}$ tale che $\psi_{p-1}(b_{p-1}) = c_{p-1}$. Sia $b_p := \beta_{p-1}(b_{p-1})$. Allora $b_{p+1} = \beta_p(b_p) = \beta_p(\beta_{p-1}(b_{p-1})) = 0$, da cui segue subito che δ^p è ben definito.

Continuando la "caccia sul diagramma" si dimostra che δ^p rende la successione esatta (farlo per esercizio). $\square$

5.2. Coomologia di de Rham. Sia M una varietà reale di dimensione n. Poiché $d^2 = 0$ la successione di spazi vettoriali

$$0 \to \Omega^0_M \xrightarrow{d} \Omega^1_M \xrightarrow{d} \Omega^2_M \xrightarrow{d} \dots$$

è un complesso coomologico che si chiama il *complesso di de Rham* di M. La sua coomologia si indica con $H^{\bullet}_{dR}(M)$.

Più esplicitamente

$$Z^p(M) := \{\omega \in \Omega^p_M : d\omega = 0\},$$
$$B^p(M) := \{\omega \in \Omega^p_M : \exists \omega' \in \Omega^{p-1}_M, d\omega' = \omega\}.$$

Un elemento di $Z^p(M)$ is dice una p-forma *chiusa* mentre un elemento di $B^p(M)$ si dice una p-forma *esatta*. E abbiamo

$$H^p_{dR}(M) := Z^p(M)/B^p(M).$$

Lo spazio vettoriale quoziente $H^p_{dR}(M)$ si dice p*-mo gruppo di coomologia di de Rham di* M.

Si noti che $H^p_{dR}(M)$ è uno spazio vettoriale.

OSSERVAZIONE 5.10. $H^0_{dR}(M) = Z^0(M)$ sono le 0-forme f (funzioni C^∞) tali che $df \equiv 0$, ovvero sono funzioni reali costanti sulle componenti connesse di M. Dunque

$$H^0_{dR}(M) = \bigoplus^m \mathbb{R}$$

dove m è il numero di componenti connesse di M. Inoltre, poiché $\bigwedge^p M = M \times \{0\}$ per $p > n$, risulta

$$H^p_{dR}(M) = 0, \quad p > n.$$

OSSERVAZIONE 5.11. Definiamo $H^*_{dR}(M) := \bigoplus_{p=0}^n H^p_{dR}(M)$. Allora $H^*_{dR}(M)$ ha una naturale struttura di algebra in cui il prodotto tra due classi è definito da

$$[\omega] \cdot [\omega'] := [\omega \wedge \omega'].$$

Si osservi che se $\tilde{\omega} := \omega + d\theta$, essendo $d\omega' = 0$, allora

$$\tilde{\omega} \wedge \omega' = \omega \wedge \omega' + d\theta \wedge \omega' = \omega \wedge \omega' + d(\theta \wedge \omega'),$$

e dunque $[\omega \wedge \omega'] = [\tilde{\omega} \wedge \omega']$ e il prodotto è ben definito.

Sia $f : M \to N$ una mappa C^∞. Poiché per il Lemma 3.4 si ha $d \circ f^* = f^* \circ d$, risulta $f^*(B^p(N)) \subset B^p(M)$ e $f^*(Z^p(N)) \subset Z^p(M)$, pertanto passando al quoziente f induce un morfismo di spazi vettoriali (ancora indicato f^*)

$$f^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M).$$

La mappa f^* è *funtoriale* nel senso che se f è un diffeomorfismo allora f^* è un isomorfismo di spazi vettoriali.

LEMMA 5.12 (Poincaré). *Sia* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto stellato rispetto ad un punto. Allora* $H^p_{dR}(U) = \{0\}$ *per ogni* $p > 0$.

DIMOSTRAZIONE. Definiremo un operatore $\kappa : \bigwedge^q U \to \bigwedge^{q-1} U$ tale che $d\circ\kappa+\kappa\circ d = \mathrm{id}$. Supponiamo di aver definito tale operatore. Se $\omega \in Z^q(U)$, $q > 0$, allora

$$\omega = d(\kappa\omega) + \kappa d\omega = d(\kappa\omega) + 0 = d(\kappa\omega),$$

il che prova che ω è esatta e pertanto $Z^q(U) = B^q(U)$ e $H^q_{dR}(U) = \{0\}$.

Per definire κ utilizziamo il fatto che U è stellato rispetto ad un punto che possiamo supporre O. Per $\omega = f(x)dx_1 \wedge \ldots dx_q \in \bigwedge^q U$ si pone

$$\kappa(f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_q) := F(x)\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j-1}x^j dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots dx_q,$$

con $F(x) := \int_0^1 t^{q-1}f(tx)dt$. Si osserva che $F(x)$ è ben definito poiché U è stellato rispetto a O e $d\circ\kappa+\kappa\circ d = \mathrm{id}$ per costruzione (verificarlo per esercizio). □

ESERCIZIO 5.13. Sia M una varietà e supponiamo che $M = A\cup B$ con A, B aperti. Provare che $\{\Omega^\bullet_A \oplus \Omega^\bullet_B, d \oplus d\}$ definito da $(\omega, \omega') \to (d\omega, d\omega')$ per $\omega \in \Omega^p_A$, $\omega' \in \Omega^p_B$, è un complesso coomologico.

TEOREMA 5.14 (Meyer-Vietoris). *Sia M una varietà e supponiamo che $M = A \cup B$ con A, B aperti. La successione*

$$0 \to \Omega^p_M \xrightarrow{\alpha_p} \Omega^p_A \oplus \Omega^p_B \xrightarrow{\beta_p} \Omega^p_{A\cap B} \to 0,$$

dove $\alpha(\omega) := (\omega|_A, \omega|_B)$, $\beta(\omega, \omega') := (\omega-\omega')|_{A\cap B}$ è esatta per ogni p e determina un morfismo esatto di complessi coomologici.

DIMOSTRAZIONE. L'unica cosa non ovvia è che β sia suriettiva. Siano $\{\mu_A, \mu_B\}$ una coppia di funzioni C^∞ tali che $\mu_A + \mu_B \equiv 1$, che μ_A abbia supporto (non compatto in genere) contenuto in A e μ_B abbia supporto contenuto in B. Data $\omega \in \Omega^p_{A\cap B}$ poniamo $\omega_A := \mu_B\omega$ e $\omega_B := -\mu_A\omega$. allora $\omega_A \in \Omega^p_A$, $\omega_B \in \Omega^p_B$ e $(\omega_A - \omega_B)|_{A\cap B} = \omega$. □

ESERCIZIO 5.15. Provare che per ogni p

$$H^p(\{\Omega^p_A \oplus \Omega^p_B, d \oplus d\}) \simeq H^p_{dR}(A) \oplus H^p_{dR}(B).$$

COROLLARIO 5.16 (Meyer-Vietoris in coomologia di de Rham). *Sia M una varietà tale che $M = A \cup B$ con A, B aperti. Allora esiste una successione esatta lunga in coomologia data da*

$$\ldots \to H^q_{dR}(A\cap B) \to H^{q+1}_{dR}(M) \to H^{q+1}_{dR}(A) \oplus H^{q+1}_{dR}(B) \to H^{q+1}_{dR}(A\cap B) \to \ldots$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal Teorema 5.14, dal Lemma del Serpente 5.9 e dall'Esercizio 5.15. □

DEFINIZIONE 5.17. Siano M, N due varietà. Due mappe $f, g : M \to N$ di classe C^∞ si dicono C^∞-*omotope* se esiste $F : M \times \mathbb{R} \to N$ di classe C^∞ (detta *omotopia* C^∞) tale che $F(x, t) = f(x)$ per $t \le 0$ and $F(x, t) = g(x)$ per $t \ge 1$.

PROPOSIZIONE 5.18. *Siano M, N due varietà e siano $f, g : M \to N$ due mappe C^∞-omotope. Allora, i morfismi lineari indotti $f^*, g^* : H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$ sono uguali per ogni $p \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia F l'omotopia C^∞ tra f e g. Definiamo $s_j : M \to M \times \mathbb{R}$ tramite $s_j(x) := (x, j)$, $j = 0, 1$. Risulta $f = F \circ s_0$ e $g = F \circ s_1$. Dunque, $f^* = s_0^* \circ F^*$ e $g^* = s_1^* \circ F^*$. Ora, $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ definisce un morfismo lineare $\pi^* : H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(M \times \mathbb{R})$. Poiché $\pi \circ s_j = \mathrm{id}_M$, ne segue che $s_j^* \circ \pi^* = \mathrm{id}$, $j = 0, 1$. Essendo π^*, s_0^*, s_1^* morfismi lineari, per l'unicità della inversa, ne segue che $s_0^* = s_1^*$. Pertanto $f^* = g^*$. $\square$

DEFINIZIONE 5.19. Sia S una sottovarietà regolare di M e sia $i : S \to M$ definita da $i(p) = p$. Diciamo che S è un *retratto di deformazione* C^∞ di M se esiste $f : M \to S$ di classe C^∞ tale che $f \circ i = \mathrm{id}_S$ e $i \circ f : M \to M$ è C^∞-omotopa a id_M.

COROLLARIO 5.20. *Sia M una varietà e sia S una sottovarietà regolare di M tale che S è un retratto di deformazione C^∞ di M. Allora $H^p_{dR}(M) = H^p_{dR}(S)$ per ogni $p \geq 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 5.18, $f^* \circ i^* = (i \circ f)^* = \mathrm{id}^*_M$ e ovviamente $i^* \circ f^* = (f \circ i)^* = \mathrm{id}^*_S$. Pertanto f^* è l'inversa di i^* che è dunque un isomorfismo. $\square$

ESEMPIO 5.21 (Coomologia di de Rham delle sfere). Sia $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$ la sfera m-dimensionale, $m \geq 1$. Allora $H^p_{dR}(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}$ per $p = 0$ e $H^p_{dR}(\mathbb{S}^m) = \{0\}$ per $0 < p < m$.

Siano $N = (1, 0, \ldots, 0)$ il polo nord e $S = (-1, 0, \ldots, 0)$ il polo sud di $\mathbb{S}^m$. Siano $U = \mathbb{S}^m \setminus \{N\}$ e $V = \mathbb{S}^m \setminus \{S\}$. Per il Teorema di Meyer-Vietoris 5.16 la successione

$$H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) \to H^p_{dR}(U \cap V) \to H^{p+1}_{dR}(\mathbb{S}^m) \to H^{p+1}_{dR}(U) \oplus H^{p+1}_{dR}(V)$$

è esatta. Tramite la proiezione stereografica risulta $U \simeq \mathbb{R}^m$ e $V \simeq \mathbb{R}^m$. Dunque per $p > 0$, $H^p_{dR}(U) = H^p_{dR}(V) = \{0\}$ per il Lemma di Poincaré 5.12. Pertanto per $p \geq 1$

$$H^p_{dR}(U \cap V) \simeq H^{p+1}_{dR}(\mathbb{S}^m). \tag{5.1}$$

Supponiamo $m = 1$. Allora $U \cap V$ è unione disgiunta di due aperti A, B diffeomorfi a $\mathbb{R}$ pertanto

$$0 \to H^0_{dR}(\mathbb{S}^1) \to H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \to H^0_{dR}(U \cap V) \to H^1_{dR}(\mathbb{S}^1) \to 0.$$

Si ha $H^0_{dR}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$, $H^0_{dR}(U) \simeq \mathbb{R}$, $H^0_{dR}(V) \simeq \mathbb{R}$. Dunque il morfismo lineare $H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \to H^0_{dR}(U \cap V)$ ha nucleo di dimensione 1 e immagine di dimensione uno. Essendo $H^0_{dR}(U \cap V) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ risulta $H^1_{dR}(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$. Per $p > 1$, dalla (5.1) e dal Lemma di Poincaré 5.12, risulta che $H^p_{dR}(\mathbb{S}^1) = 0$.

Supponiamo $m > 1$. Ragioniamo per induzione su m. Il lettore può verificare che $U \cap V$ si retrae per deformazione C^∞ sull'equatore di $\mathbb{S}^m$ tramite la mappa $U \cap V \ni (x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto (0, x_2, \ldots, x_n)/\|(0, x_2, \ldots, x_{m+1})\|$, e l'immagine è proprio $\mathbb{S}^{m-1}$ in $\mathbb{R}^{m+1} \cap \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) : x_1 = 0\}$. Pertanto per il Corollario 5.20 si ottiene $H^p_{dR}(U \cap V) \simeq H^p_{dR}(\mathbb{S}^{m-1})$ e dunque

$$H^{p+1}_{dR}(\mathbb{S}^m) \simeq H^p_{dR}(\mathbb{S}^{m-1}) \quad m > 1, p > 0,$$

e il risultato segue per induzione. Resta da provare il caso $m > 1, p = 0$. Per questa, dalla successione esatta in coomologia di Meyer-Vietoris si ha

$$0 \to H^0_{dR}(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R} \to H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to H^0_{dR}(\mathbb{S}^{m-1}) = \mathbb{R} \to H^1_{dR}(\mathbb{S}^m) \to 0,$$

da cui segue che $H^1_{dR}(\mathbb{S}^m) = \{0\}$ per $m > 1$.

PROPOSIZIONE 5.22. *Sia M una varietà compatta connessa. Allora $H^p_{dR}(M)$ è uno spazio vettoriale finito dimensionale per ogni $0 \leq p \leq n$.*

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE. Si può provare che esiste un ricoprimento finito di M fatto da carte locali $\{U_j\}_{j \in J}$ tali che per ogni insieme di indici $\{j_0, \ldots, j_k\} \subset J$ si ha che $U_{j_0} \cap \ldots \cap U_{j_k}$ è diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$. Si prova allora il risultato per induzione sul numero degli aperti utilizzando Meyer-Vietoris. $\square$

ESEMPIO 5.23. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{N} \times \{0\})$. M è una varietà reale connessa di dimensione due *non* compatta. Proviamo che $H^1_{dR}(M)$ è infinito dimensionale. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ siano $\{\rho_m, \theta_m\}$ coordinate polari centrate in $(m, 0)$. L'angolo θ_m è una funzione C^∞ in $M \setminus (-\infty, m]$, la forma $d\theta_m$ invece si prolunga come forma C^∞ chiusa ma non esatta su M. Proviamo che $\{[d\theta_1], \ldots, [d\theta_m], \ldots, \}$ sono linearmente indipendenti in $H^1_{dR}(M)$. Infatti, se C_m è il cerchio di raggio $1/2$ e centro $(m, 0)$, $i : C_m \to M$ l'immersione, risulta

$$\int_{C_m} i^* d\theta_l = 2\pi \delta_{lm},$$

da cui segue subito la lineare indipendenza.

5.3. Dualità di Poincaré per varietà compatte. Sia M una varietà *compatta* orientabile (senza bordo) di dimensione reale n. Allora $\int_M$ definisce un operatore lineare

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

dato da

$$\int_M [\omega] := \int_M \omega, \quad [\omega] \in H^n_{dR}(M).$$

OSSERVAZIONE 5.24. Poiché $\omega' \in [\omega]$ se e solo se esiste $\theta \in \Omega^{-1}_M(M)$ tale che $\omega - \omega' = d\theta$, risulta per il Teorema di Stokes

$$\int_M \omega = \int_M \omega' + \int_M d\theta = \int_M \omega' + \int_{\partial M} \theta = \int_M \omega',$$

e dunque $\int_M$ è ben definito.

Più in generale, per $0 \leq q \leq n$, si definisce

$$\int_M : H^q_{dR}(M) \times H^{n-q}_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

tramite

$$\int_M ([\omega],[\omega']) := \int_M \omega\wedge\omega'.$$

OSSERVAZIONE 5.25. Siano $[\omega]\in H^q_{dR}(M)$, $[\omega']\in H^{n-q}_{dR}(M)$. Se $\eta=\omega+d\theta$, ricordando che $d\omega'=0$, si ha $d(\theta\wedge\omega')=d\theta\wedge\omega'+(-1)^{q-1}\theta\wedge d\omega'=d\theta\wedge\omega'$, da cui per il Teorema di Stokes,

$$\begin{aligned}\int_M \eta\wedge\omega' &= \int_M \omega\wedge\omega' + \int_M d\theta\wedge\omega' = \int_M \omega\wedge\omega' + \int_M d(\theta\wedge\omega') \\ &= \int_M \omega\wedge\omega' + \int_{\partial M}\theta\wedge\omega' = \int_M \omega\wedge\omega'.\end{aligned}$$

Un argomento simile mostra che $\int_M([\omega],[\omega'])$ non dipende dal rappresentante di ω' scelto per definirlo, e dunque l'operatore $\int_M$ è ben definito.

Per una dimostrazione del seguente teorema si veda ad esempio [**2**, p.44].

TEOREMA 5.26 (Dualità di Poincaré). *Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione n. Sia $0\le q\le n$. Allora $\int_M : H^q_{dR}(M)\times H^{n-q}_{dR}(M)\to\mathbb{R}$ è una forma bilineare non-degenere, in particolare*

$$H^q_{dR}(M)\simeq (H^{n-q}_{dR}(M))^*.$$

ESERCIZIO 5.27. Provare che se M è una varietà compatta, orientabile e connessa di dimensione n allora $H^n_{dR}(M)\simeq\mathbb{R}$.

5.4. Classe duale di Poincaré di una sottovarietà orientata. Sia S una sottovarietà regolare compatta orientata di dimensione k di una varietà M compatta orientata di dimensione n. Sia $i: S\hookrightarrow M$ l'immersione. Allora

$$H^k_{dR}(M)\ni[\omega]\mapsto\int_S i^*\omega$$

è ben definito grazie al teorema di Stokes e definisce un funzionale lineare su $H^k_{dR}(M)$. In altri termini definisce un elemento di $(H^k_{dR}(M))^*$. Per la Dualità di Poincaré, esiste $[\eta_S]\in H^{n-k}_{dR}(M)$ tale che

$$\int_S i^*\omega = \int_M \omega\wedge\eta_S \quad \forall\,[\omega]\in H^k_{dR}(M).$$

La classe $[\eta_S]$ si chiama la *classe duale di Poincaré di* S.

6. Strutture quasi complesse integrabili

Sia M una varietà complessa. Ricordiamo che $\bigwedge^m M\otimes\mathbb{C}=\bigoplus_{m=p+q}\bigwedge^{p,q}M$. Definiamo allora

$$\pi_{p,q}:\bigwedge^m M\otimes\mathbb{C}\to\bigwedge^{p,q}M,$$

la proiezione naturale.

Si può estendere in modo ovvio l'operatore d alle sezioni di $\bigwedge^m M \otimes \mathbb{C}$ definendolo sugli elementi semplici tramite $d(\omega \otimes \alpha) := (d\omega) \otimes \alpha$.

Dalla espressione in coordinate locali (13.5) e dalla definizione di d, risulta che $d : \Omega^m_M \otimes \mathbb{C} \to \Omega^{m+1}_M \otimes \mathbb{C}$ si può decomporre come

$$d = \partial + \overline{\partial},$$

dove $\partial : C^\infty(M, \bigwedge^{p,q} M) \to C^\infty(M, \bigwedge^{p+1,q} M)$ e $\overline{\partial} : C^\infty(M, \bigwedge^{p,q} M) \to C^\infty(M, \bigwedge^{p,q+1} M)$ sono definiti tramite $\partial := \pi_{p+1,q} \circ d$ e $\overline{\partial} := \pi_{p,q+1} \circ d$ per $p + q = m$.

In particolare dalla $d \circ d = 0$ si ha $(\partial + \overline{\partial}) \circ (\partial + \overline{\partial}) = 0$, ovvero

$$(\partial \circ \partial) + (\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial) + (\overline{\partial} \circ \overline{\partial}) = 0.$$

Poichè forme di bigrado diverso sono linearmente indipendenti, da questo segue che

$$\begin{cases} \partial \circ \partial & = 0 \\ \partial \circ \overline{\partial} & = -\overline{\partial} \circ \partial \\ \overline{\partial} \circ \overline{\partial} & = 0. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 6.1. Se (N, J) è una varietà quasi complessa, l'operatore d si decompone come $d = \partial + \overline{\partial}$ se e solo se la struttura quasi complessa J è integrabile [la dimostrazione della sufficienza di tale condizione non è banale].

Il *complesso di Dolbeault* è definito dal complesso coomologico di gruppi abeliani

$$C^\infty(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(M, \bigwedge^{0,1} M) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(M, \bigwedge^{0,2} M) \dots$$

dove abbiamo denotato con $C^\infty(M, \mathbb{C})$ il gruppo delle funzioni C^∞ su M a valori complessi e con $C^\infty(M, \bigwedge^{0,q} M)$ il gruppo delle $(0, q)$-forme su M. La coomologia di tale complesso si chiama la *coomologia di Dolbeault di* M e si denota con $H^q_{\overline{\partial}}(M)$. Poichè le funzioni f di classe C^∞ a valori complessi tali che $\overline{\partial} f = 0$ sono esattamente le funzioni olomorfe, si ha

$$H^0_{\overline{\partial}}(M) = \mathcal{O}_M(M),$$

le funzioni olomorfe su M.

Vale il seguente lemma di Poincaré la cui dimostrazione omettiamo

LEMMA 6.2 (Grothendieck). *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto stellato rispetto ad un punto. Allora $H^q_{\overline{\partial}}(M) = \{0\}$ per ogni $q > 0$.*

CAPITOLO 4

Fasci e coomologia

1. Piccolo compendio di algebra commutativa

In questa sezione richiamiamo quelle nozioni di algebra commutativa che utilizzeremo nel seguito. Per dettagli e maggiori informazioni il lettore può consolare ad esempio [**4**].

In questa sezione R indica un anello commutativo con unità. Ricordiamo che un anello R si dice *Noetheriano* se ogni suo ideale è finitamente generato come R-modulo (o equivalentemente se ogni catena ascendente di ideali si stabilizza).

1.1. Moduli su un anello commutativo.

DEFINIZIONE 1.1. Un *modulo A su R* (o un R-modulo) è un gruppo abeliano rispetto alla somma munito di una operazione $R \times A \to A$ che soddisfa

(1) $r(sm) = (rs)m$ per ogni $s, r \in R$ e $m \in A$,
(2) $r(m+n) = rm + rn$ per ogni $r \in R$ e $m, n \in A$,
(3) $(r+s)m = rm + sm$ per ogni $r, s \in R$, $m \in A$
(4) $1m = m$ per ogni $m \in A$.

ESEMPIO 1.2. Un gruppo abeliano è uno $\mathbb{Z}$-modulo. Uno spazio vettoriale è un modulo su un campo. Un anello R è un R-modulo su se stesso. Se R è un anello e I è un ideale, allora I è un R-modulo.

Se A, B sono R-moduli, si può definire la loro somma diretta $A \oplus B := \{(m,n) \in A \times B\}$ che è un R-modulo tramite la moltiplicazione $r(m,n) = (rm, rn)$. Più in generale se $\{A_j\}$ è una famiglia di R-moduli si può definire il *prodotto diretto* $\prod_j A_j := \{(a_j) : a_j \in A_j\}$ e dotarlo di una struttura di R-modulo tramite $r(a_j) := (ra_j)$.

Un *morfismo di R-moduli* è un omomorfismo di gruppi $f : A \to B$ che soddisfa $f(rm) = rf(m)$ per ogni $r \in R$ e $m \in A$.

Un R-modulo A si dice *libero di rango k* se è isomorfo come R-modulo al modulo $R^{\oplus k}$, ovvero il modulo formato dalla somma diretta di k copie di R. In particolare, se A è un R-modulo libero di rango k, esistono k elementi $m_1, \ldots, m_k \in A$ tali che ogni $m \in A$ si scrive in modo *unico* come $m = \sum_{j=1}^k r_j m_j$ per opportuni $r_j \in R$.

ESEMPIO 1.3. Sia M è una varietà complessa e E un fibrato vettoriale olomorfo su M di rango k. Se U è un aperto, allora $\mathcal{O}_M(U)$ è un anello commutativo con unità e $\mathcal{O}_M(U; E)$ le sezioni olomorfe di E su U formano un $\mathcal{O}_M(U)$-modulo. Se U è un aperto trivializzante per E

allora $\mathcal{O}_M(U;E)$ è un $\mathcal{O}_M(U)$-modulo di rango k. Simili considerazioni valgono per i fibrati vettoriali reali.

Un R-sottomodulo di un modulo A è un sottogruppo di A che è chiuso rispetto alla moltiplicazione per R. Se $\{A_j\}_{j\in J}$ è una famiglia di R-moduli si definisce la *somma diretta* $\bigoplus A_j$ come il sottomodulo di $\prod_j A_j$ formato dagli elementi (a_j) tali che $a_j = 0$ tranne per un numero finito di $j \in J$.

Il nucleo e l'immagine di un morfismo $f : A \to B$ di R-moduli sono R-sottomoduli di A e di B rispettivamente. Se B è un R-sottomodulo di un R-modulo A, il gruppo quoziente A/B ha una naturale struttura di R-modulo definita tramite $r[m] := [rm]$ per $r \in R$, $m \in A$ (dove $[m]$ indica la classe in A/B).

Se A, B, C sono R-moduli e $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ sono morfismi di R-moduli, si dice che la successione

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

è *esatta* se $\ker\beta = \mathsf{Im}\,\alpha$. Una *successione esatta corta* di R-moduli

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0. \tag{1.1}$$

è una successione esatta di moduli in cui α è iniettivo e β è suriettivo.

Si dice che la successione esatta corta di R-moduli (1.1) *spezza* se esiste un morfismo di R-moduli $f : B \to A$ tale che $f \circ \alpha = \mathsf{id}_A$.

LEMMA 1.4. *Sono equivalenti:*

(1) *La successione* (1.1) *spezza.*
(2) *Esiste un morfismo di R-moduli $g : C \to B$ tale che $\beta \circ g = \mathsf{id}_C$.*
(3) *Esiste un isomorfismo di R-moduli $\varphi : B \to A \oplus C$ e il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathsf{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & A \oplus C & \xrightarrow{\pi} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dove $\iota : A \to A \oplus C$ è l'inclusione naturale e $\pi : A \oplus C \to C$ è la proiezione naturale.

DIMOSTRAZIONE. (3) implica (1) e (2) ovviamente.

(1) implica (2). Poniamo $f' := \mathsf{id}_B - \alpha \circ f : B \to B$. Allora

$$f' \circ \alpha = \alpha - \alpha \circ (f \circ \alpha) = \alpha - \alpha = 0.$$

Questo implica $\mathsf{Im}(\alpha) \subseteq \mathsf{Ker}(f')$. D'altra parte se $v \in \mathsf{Ker}(f')$ allora $f'(v) = 0$, ovvero $v = \alpha(f(v))$ e dunque $v \in \mathsf{Im}(\alpha)$. Pertanto $\mathsf{Im}(\alpha) = \mathsf{Ker}(f')$. Per l'esattezza della successione risulta $\mathsf{Ker}(f') = \mathsf{Im}(\alpha) = \mathsf{Ker}(\beta)$. Inoltre,

$$\beta \circ f' = \beta - (\beta \circ \alpha) \circ f = \beta,$$

da cui segue che β è iniettiva su $\mathsf{Im}(f')$ (provarlo per esercizio). Inoltre l'equazione precedente prova che $\beta|_{\mathsf{Im}(f')}$ è suriettiva. Pertanto $\beta : \mathsf{Im}(f') \to C$ è un isomorfismo. Posto $g := (\beta|_{\mathsf{Im}(f')})^{-1}$, la (2) risulta verificata.

Con un ragionamento analogo si prova che (2) implica (1) (esercizio).

Per concludere, se valgono (1) e (2), ponendo $\varphi := f \oplus \beta$ si ha (3). □

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano A, B, C degli R-moduli. Supponiamo che la successione di R-moduli* (1.1) *sia esatta. Se C è R-libero allora la successione spezza.*

DIMOSTRAZIONE. Se C è R-libero e $v_1, \ldots, v_k$ sono dei suoi generatori liberi, poiché β è suriettiva esistono $a_1, \ldots, a_k \in B$ tali che $\beta(a_j) = v_j$ per ogni j. Pertanto definendo $g : C \to B$ tramite $g(v_j) = a_j$ ed estendendo per R-linearità ad ogni elemento di C si ottiene un R-morfismo tale che $\beta \circ g = \mathsf{id}_C$ e per il Lemma 1.4 la successione spezza. □

OSSERVAZIONE 1.6. Sia R un anello locale (ovvero con un unico ideale massimale) Noetheriano. Se la successione (1.1) di R-moduli è esatta, spezza e B è R-libero si può provare che anche A e C sono R-liberi [infatti B essendo libero è un modulo proiettivo e poiché $B \simeq A \oplus C$ ne segue che A, C sono moduli proiettivi. Ma i moduli proiettivi su anelli locali Noetheriani sono liberi]. Dunque dalla proposizione precedente segue che se B, C sono R-liberi e la successione (1.1) spezza, allora anche A è R-libero.

Un R-modulo A si dice *finitamente generato* se esiste un morfismo suriettivo di R-moduli

$$R^{\oplus k} \xrightarrow{\varphi} A \to 0.$$

In altri termini, un R-modulo è finitamente generato se esistono k elementi $m_1, \ldots, m_k$ tali che ogni $m \in A$ si può scrivere come combinazione lineare $m = \sum_{j=1}^{k} r_j m_j$ per qualche $r_j \in R$. Il nucleo di tale morfismo φ è un R-sottomodulo di $R^{\oplus k}$, detto il *modulo delle relazioni*. Se il modulo delle relazioni è finitamente generato, si dice che A è R-*coerente*.

Se R è un anello Noetheriano, allora ogni R-modulo finitamente generato è R-coerente (di fatto ogni R-sottomodulo di un R-modulo finitamente generato è finitamente generato).

1.2. Morfismi di moduli. Se A, B sono due R-moduli, il gruppo abeliano dei morfismi di R-moduli tra A e B, denotato con $\mathsf{Hom}_R(A, B)$ è un R-modulo tramite l'operazione $(r\varphi)(m) := r(\varphi(m))$ per $r \in R, m \in A, \varphi \in \mathsf{Hom}_R(A, B)$.

Se $\alpha : A \to B$ è un morfismo di R-moduli e C è un altro R-modulo, allora si ha un naturale morfismo di R-moduli $\mathsf{Hom}_R(C, A) \ni f \mapsto \alpha \circ f \in \mathsf{Hom}_R(C, B)$ e $\mathsf{Hom}_R(B, C) \ni f \mapsto f \circ \alpha \in \mathsf{Hom}_R(A, C)$.

Valgono le seguenti proprietà (qua A, B, C, D sono R-moduli):

(1) $\mathsf{Hom}_R(R, A) \simeq A$ tramite la mappa $\varphi \mapsto \varphi(1)$,
(2) $\mathsf{Hom}_R(A \oplus B, C) \simeq \mathsf{Hom}_R(A, C) \oplus \mathsf{Hom}_R(B, C)$,
(3) $\mathsf{Hom}_R(A, B \oplus C) \simeq \mathsf{Hom}_R(A, B) \oplus \mathsf{Hom}_R(A, C)$,
(4) se $0 \to A \to B \to C$ è una successione esatta, allora

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(D, A) \to \mathsf{Hom}_R(D, B) \to \mathsf{Hom}_R(D, C)$$

è una successione esatta di R-moduli,

(5) se $A \to B \to C \to 0$ è una successione esatta, allora

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(C, D) \to \mathsf{Hom}_R(B, D) \to \mathsf{Hom}_R(A, D)$$

è una successione esatta di R-moduli.

Le proprietà (4) e (5) si condensano nella frase Hom_R è un *funtore esatto a sinistra.*

ESERCIZIO 1.7. Se D è un R-modulo libero allora $\mathsf{Hom}_R(D, \cdot)$ è un funtore esatto, ovvero trasforma successioni esatte corte in successioni esatte corte.

PROPOSIZIONE 1.8. *Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta di R-moduli, e supponiamo C sia R-libero. Allora per ogni R-modulo D la successione*

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(C, D) \to \mathsf{Hom}_R(B, D) \to \mathsf{Hom}_R(A, D) \to 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 1.5 la successione esatta spezza, e quindi possiamo supporre che sia $0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$ la successione esatta con il morfismo $\alpha : A \to A \oplus C$ dato da $a \mapsto (a, 0)$. Applicando $\mathsf{Hom}_R(\cdot, D)$ a tale successione esatta si ottiene la successione esatta

$$0 \to \mathsf{Hom}_R(C, D) \to \mathsf{Hom}_R(A \oplus C, D) \to \mathsf{Hom}_R(A, D),$$

dove l'ultimo morfismo è definito tramite $\mathsf{Hom}_R(A \oplus C, D) \ni f \mapsto f \circ \alpha \in \mathsf{Hom}_R(A, D)$. Verifichiamo che esso è suriettivo, provando che la successione è esatta. Se $g \in \mathsf{Hom}_R(A, D)$ allora si definisce $f \in \mathsf{Hom}_R(A \oplus C, D)$ tramite $f(a, c) := g(a)$. Si verifica subito che $f \circ \alpha = g$. □

OSSERVAZIONE 1.9. Di fatto la dimostrazione della proposizione precedente mostra che $\mathsf{Hom}_R(\cdot, D)$ trasforma successioni esatte che spezzano in successioni esatte.

In generale però Hom non trasforma successioni esatte di R-moduli in successioni esatte di R-moduli.

ESEMPIO 1.10. Sia $R = \mathbb{C}[z]$ l'anello dei polinomi, e si consideri la successione esatta di R-moduli

$$0 \to \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\cdot z} \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[z]/(\mathbb{C}[z] \cdot z) \to 0, \tag{1.2}$$

dove $\cdot z$ indica la moltiplicazione per z e π è il morfismo naturale sul quoziente (e $\mathbb{C}[z]$ è visto come modulo su se stesso). Applichiamo $\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}[z]}(\cdot, \mathbb{C}[z])$ a tale successione. Poiché $\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}[z]}(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z]) \simeq \mathbb{C}[z]$ si ottiene la successione esatta

$$0 \to \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}[z]}(\mathbb{C}[z]/(\mathbb{C}[z] \cdot z), \mathbb{C}[z]) \xrightarrow{a} \mathbb{C}[z] \xrightarrow{b} \mathbb{C}[z].$$

Il morfismo b non è suriettivo. Infatti, se $h(z) \in \mathbb{C}[z]$ allora $b(h(z)) = zh(z)$ e pertanto $1 \notin \mathsf{Im}\, b$. Si osservi anche che b è iniettivo, e pertanto, essendo a iniettivo, si ha $\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}[z]}(\mathbb{C}[z]/(\mathbb{C}[z] \cdot z), \mathbb{C}[z]) = 0$.

1.3. Prodotto tensore. Siano A, B due R-moduli. Sia C un altro R-modulo. Una mappa $f : A \oplus B \to C$ si dice R-bilineare se è un omomorfismo di gruppi abeliani tale che è R-lineare in ciascun fattore. Il gruppo delle applicazioni R-bilineari da $A \oplus B$ a C è un R-modulo che si denota con $\mathsf{Bil}_R(A \oplus B, C)$.

PROPOSIZIONE 1.11. *Siano A, B due R-moduli. Allora esiste una coppia $(A \otimes_R B, \theta)$ formata da un R-modulo $A \otimes_R B$ (detto* prodotto tensoriale di A, B su R*) e da un morfismo R-bilineare $\theta : A \oplus B \to A \otimes B$ tale che*

(1) *Per ogni R-modulo C e ogni applicazione R-bilineare $f : A \oplus B \to C$ esiste un unico morfismo di R-moduli $f' : A \otimes_R B \to C$ tale che $f = f' \circ \theta$. In particolare $\mathsf{Bil}_R(A \oplus B, C) \simeq \mathsf{Hom}_R(A \otimes B, C)$.*
(2) *La coppia $(A \otimes_R B, \theta)$ è unica a meno di isomorfismi, nel senso che se $(D, \tilde{\theta})$ è un'altra coppia che verifica la proprietà sopra, allora esiste un isomorfismo di R-moduli $i : A \otimes_R B \to D$ tale che $i \circ \theta = \tilde{\theta}$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Si consideri l'R-modulo libero T generato dagli elementi della forma (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Ovvero, gli elementi di T sono della forma $\sum_{j=1}^{k} r_j(a_j, b_j)$ con $r_j \in R$ e $(a_j, b_j) \in A \times B$. Sia Z il sottomodulo di T generato dagli elementi della forma

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b) \quad \forall a, a' \in A, b \in B$$
$$(a, b + b') - (a, b) - (a, b') \quad \forall a \in A, b, b' \in B$$
$$(ra, sb) - rs(a, b) \quad \forall r, s \in R, a \in A, b \in B.$$

Si pone $A \otimes B := T/Z$ e si denota con $a \otimes b$ la classe di (a, b). Il morfismo $\theta : A \oplus B \to A \otimes B$ è definito allora tramite $(a, b) \mapsto a \otimes b$ ed è R-bilineare. Se $f : A \oplus B \to C$ è una qualsiasi applicazione, si estende f per linearità ad un morfismo di R-moduli da T a C. Se in particolare f è R-bilineare, allora l'estensione di f si annulla su Z e dunque passa al quoziente e definisce il morfismo f' cercato.

(2) segue dalla (1), provarlo per esercizio.

□

OSSERVAZIONE 1.12. Se R è un campo e A, B sono spazi vettoriali finito dimensionali su R il prodotto tensore $A \otimes_R B$ coincide con l'usuale prodotto tensoriale di A, B come spazi vettoriali, ovvero $A \otimes_R B \simeq \mathsf{Bil}_R(A^* \times B^*, R)$.

Valgono le seguenti proprietà (qua A, B, C, D sono R-moduli):

(1) $A \otimes_R R \simeq A$ tramite la mappa $a \otimes r \mapsto ra$,
(2) $A \otimes_R B \simeq B \otimes_R A$ tramite la mappa $a \otimes b \mapsto b \otimes a$,
(3) $(A \otimes_R B) \otimes_R C \simeq A \otimes_R (B \otimes_R C) \simeq A \otimes_R B \otimes_R C$,
(4) $(A \oplus B) \otimes_R C \simeq A \otimes_R C \oplus B \otimes_R C$,

Differentemente dal caso di spazi vettoriali finito dimensionali su un campo, gli isomorfismi sopra devono essere ottenuti tramite la proprietà universale della Proposizione 1.11. A titolo di esempio vediamo come, dato $\alpha : A \to B$ un morfismo di R-moduli, sia possibile ottenere il morfismo di R-moduli $\alpha \otimes \mathsf{id} : A \otimes_R C \to B \otimes_R C$. Si considera il morfismo R-bilineare $f : A \oplus C \to B \otimes_R C$ definito da $f(a, c) = \alpha(a) \otimes c$. Per la proprietà universale del prodotto tensore, esiste un morfismo R-lineare $\alpha \otimes \mathsf{id} : A \otimes_R C \to B \otimes_R C$ che fattorizza f.

Sia $f \in \mathsf{Bil}_R(A \oplus B, C)$. Sia $b \in B$. Allora $A \ni a \mapsto f(a, \cdot) : B \to C$ è un morfismo di R-moduli, ovvero un elemento di $\mathsf{Hom}_R(B, C)$. Abbiamo dunque una corrispondenza $A \ni f \mapsto f(a, \cdot) \in \mathsf{Hom}_R(B, C)$, e, poiché $f(a, \cdot)$ è R-lineare in a, tale corrispondenza è un morfismo di R-moduli, ovvero f determina un elemento di $\mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_R(B, C))$. Viceversa ogni elemento $f \in \mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_R(B, C))$ determina una applicazione R-bilineare da $A \oplus B \to C$, tramite $(a, b) \mapsto f(a)(b)$. Dunque c'è un isomorfismo tra l'R-modulo $\mathsf{Bil}_R(A \oplus B, C)$ delle applicazioni R-bilineari da $A \oplus B$ a C e $\mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_R(B, C))$. Poiché $\mathsf{Bil}_R(A \oplus B, C) \simeq \mathsf{Hom}_R(A \otimes B, C)$ come R-moduli per la proprietà universale del prodotto tensoriale, si ha

$$\mathsf{Hom}_R(A \otimes B, C) \simeq \mathsf{Hom}_R(A, \mathsf{Hom}_R(B, C)). \tag{1.3}$$

Se $A \to B \to C \to 0$ è una successione esatta, allora

$$A \otimes_R D \to B \otimes_R D \to C \otimes_R D \to 0$$

è una successione esatta di R-moduli. Questa proprietà si condensa nella frase $\cdot \otimes_R D$ è un *funtore esatto a destra*. In generale, $\otimes_R$ non è un funtore esatto a sinistra:

ESEMPIO 1.13. Si consideri la successione esatta di $\mathbb{C}[z]$-moduli definita da (1.2). Tensorizzando con $\mathbb{C}[z]/(z \cdot \mathbb{C}[z])$ si ottiene la successione esatta

$$\mathbb{C}[z] \otimes_{\mathbb{C}[z]} \mathbb{C}[z]/(z \cdot \mathbb{C}[z]) \to \mathbb{C}[z] \otimes_{\mathbb{C}[z]} \mathbb{C}[z]/(z \cdot \mathbb{C}[z]) \to \mathbb{C}[z]/(\mathbb{C}[z] \cdot z) \otimes_{\mathbb{C}[z]} \mathbb{C}[z]/(z \cdot \mathbb{C}[z]) \to 0,$$

in cui il primo morfismo è

$$(p(z) \otimes [q]) \mapsto (zp(z) \otimes [q]) = (p(z) \otimes [zq]) = 0.$$

ESERCIZIO 1.14. Sia D un R-modulo libero. Provare che $\cdot \otimes_R D$ è un funtore esatto, ovvero trasforma successioni esatte corte in successioni esatte corte.

Se $f : R' \to R$ è un morfismo di anelli si può riguardare R come un R' modulo tramite $r' \cdot r := f(r') \cdot r$. Se A è un R'-modulo si può definire dunque $A \otimes_{R'} R$. Quest'ultimo ha allora una naturale struttura di R-modulo definita tramite $s(a \otimes r) := a \otimes (rs)$ per $a \in A, r, s \in R$.

1.4. Limiti diretti. Un *insieme parzialmente ordinato di indici* $(I, \leq)$ è un insieme I dotato di una relazione $\leq$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $i \leq i$ per ogni $i \in I$,
(2) se $i \leq j$ e $j \leq i$ allora $i = j$ per $i, j \in I$,
(3) se $i \leq j$ e $j \leq k$ allora $i \leq k$ per $i, j, k \in I$.

Un insieme parzialmente ordinato $(I, \leq)$ si dice *filtrante* se per ogni $i, j \in I$ esiste $k \in I$ tale che $i \leq k, j \leq k$.

Un *sistema diretto (o induttivo) di R-moduli* è una famiglia di R-moduli $\{A_j\}$ indicizzata da un insieme filtrante I tale che per ogni coppia $i,j \in I$ con $i \leq j$ esista un morfismo di R-moduli $f_{ij} : A_i \to A_j$ che verifichi le seguenti proprietà:

(1) $f_{ii} = \mathrm{id}$,
(2) se $i \leq j \leq k$ allora $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

PROPOSIZIONE 1.15. *Sia $\{A_j\}_{j\in I}$ un sistema diretto di R-moduli. Allora esistono un R-modulo, denotato con $\varinjlim A_j$, e una famiglia di morfismi di R-moduli $f_j : A_j \to \varinjlim A_j$ tali che $f_i = f_j \circ f_{ij}$ e tali che per ogni R-modulo B e ogni famiglia di morfismi di R-moduli $g_i : A_i \to B$ che soddisfi $g_i = g_j \circ f_{ij}$ per ogni $i \leq j$ esiste un morfismo di R-moduli $g : \varinjlim A_j \to B$ tale che $g_i = g \circ f_i$ per ogni $i \in I$.*

La coppia $(\varinjlim A_j, \{f_j\})$ si dice il limite diretto (o induttivo). Esso è unico a meno di isomorfismi.

DIMOSTRAZIONE. L'unicità segue subito dalla proprietà di universalità del limite diretto. Per l'esistenza, sia $T := \bigoplus_j A_j$, la somma diretta. Riguardiamo A_j come un sottomodulo di T. Sia Z il sottomodulo di T generato dagli elementi $(z_j)_{j\in I}$ tali che per $i \leq j$ fissati si ha $z_j = f_{ij}(z_i)$ e $z_k = 0$ per $k \neq i, j$. Si definisce allora

$$\varinjlim A_j := T/Z.$$

Se $\pi : T \to T/Z$ è la naturale proiezione, si definisce $f_i := \pi|_{A_i}$ per ogni $i \in I$. Si verifica subito che $f_j \circ f_{ij} = f_i$ se $i \leq j$. Sia ora $(B, \{g_i\})$ come nell'enunciato. Allora si definisce $g : \varinjlim A_j \to B$ estendendo per linearità la seguente applicazione:

$$g(\pi(a_j)) = g_j(a_j).$$

Si verifica facilmente che g è ben definita e che $g_i = g \circ f_i$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.16. Sia $\{A_j\}_{j\in J}$ un sistema diretto di R-moduli. Con le notazioni della dimostrazione della Proposizione 1.15, sia $\pi : T \to \varinjlim A_j$ la naturale proiezione. Allora per ogni $a \in \varinjlim A_j$ esiste $j \in J$ e $a_j \in A_j$ tale che $f_j(a_j) = \pi(a_j) = a$. Infatti $a = \pi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ per qualche $a_{j_l} \in A_{j_l}$. Poiché l'insieme di indici è filtrante, esiste $k \in J$ tale che $j_1 \leq k$ e $j_2 \leq k$. Dunque $f_{j_1k}(a_{j_1}), f_{j_2k}(a_{j_2}) \in A_k$ e per costruzione

$$\pi(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) = \pi(f_{j_1k}(a_{j_1}) + f_{j_2k}(a_{j_2}), a_{j_3}, \ldots, a_{j_m}).$$

L'asserzione segue allora per induzione su m.

Similmente si può provare che dati un numero finito di elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ di $\varinjlim A_j$ esistono $j \in J$ e $a_1, \ldots, a_m \in A_j$ tali che $f_j(a_k) = \alpha_k$ per $k = 1, \ldots, m$.

La precedente osservazione è di cruciale importanza per costruire limiti diretti di moduli su sistemi diretti di anelli (come nel caso dei fasci). Osserviamo preliminarmente che se A è un R-modulo, poiché R è un anello commutativo con unità, allora A ha una naturale struttura di

$\mathbb{Z}$-modulo indotta dal morfismo iniettivo di $\mathbb{Z}$-moduli $\mathbb{Z} \to A$ definito da $m \mapsto m \cdot 1$ (dove 1 indica l'unità di R). Cominciamo con la seguente:

PROPOSIZIONE 1.17. *Sia $\{R_j, \rho_{ij}\}$ un sistema diretto di anelli commutativi con unità (visti come $\mathbb{Z}$-moduli) tali che i morfismi $\rho_{ij} : R_i \to R_j$ siano morfismi di anelli con unità. Allora il limite diretto di $\mathbb{Z}$-moduli $R := \varinjlim R_j$ ha una naturale struttura di anello commutativo con unità per cui i morfismi $\rho_i : R_i \to R$ sono morfismi di anelli commutativi con unità.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $r, s \in R$. Per l'Osservazione 1.16 esistono $j \in J$, $r_j, s_j \in R_j$ tali che $\rho_j(r_j) = r$, $\rho_j(s_j) = s$. Si definisce allora

$$rs := \rho_j(r_j s_j).$$

Utilizzando le proprietà del limite diretto è facile verificare che tale prodotto è ben definito indipendentemente da j e dai rappresentanti r_j, s_j scelti. □

DEFINIZIONE 1.18. Sia $\{R_i, \rho_{ij}\}$ un sistema diretto di $\mathbb{Z}$-moduli tali che ciascun R_i è un anello commutativo con unità e i morfismi $\rho_{ij} : R_i \to R_j$, $i \leq j$ sono morfismi di anelli con unità. Un *sistema diretto di $\{R_i\}$-moduli* è un sistema diretto di $\mathbb{Z}$-moduli $\{A_i, f_{ij}\}$ tali che

(1) A_i è un R_i-modulo per ogni $i \in I$, e la sua struttura di $\mathbb{Z}$-modulo è indotta da questa,
(2) il morfismo $f_{ij} : A_i \to A_j$ è tale che $f_{ij}(r_i a_i) = \rho_{ij}(r_i) f_{ij}(a_i)$ per ogni $i \leq j$ e per ogni $r_i \in R_i$ e $a_i \in A_i$.

La dimostrazione della seguente proposizione è simile a quella della Proposizione 1.17 e la omettiamo:

PROPOSIZIONE 1.19. *Sia $\{A_i, f_{ij}\}$ un sistema diretto di $\{R_i\}$-moduli. Sia $R := \varinjlim R_j$ e sia $A := \varinjlim A_j$ (limiti diretti come $\mathbb{Z}$-moduli). Allora A è un R-modulo.*

DEFINIZIONE 1.20. Siano $\{A_i, f_{ij}\}$ e $\{B_i, g_{ij}\}$ due sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli. Un *morfismo di $\{R_i\}$-moduli* è una famiglia $\{\varphi_i\}$ tale che

(1) $\varphi_i : A_i \to B_i$ è un morfismo di R_i-moduli per ogni i,
(2) $g_{ij} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ f_{ij}$ per ogni $i \leq j$.

Il funtore limite diretto è esatto, ovvero:

PROPOSIZIONE 1.21. *Sia $\{\varphi_i\}$ un morfismo di $\{R_i\}$-moduli tra due sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli $\{A_i, f_{ij}\}$ e $\{B_i, g_{ij}\}$. Sia $R := \varinjlim R_j$, $A := \varinjlim A_j$ e $B := \varinjlim B_j$. Allora esiste un morfismo di R-moduli $\varphi : A \to B$ tale che $\varphi \circ f_i = g_i \circ \varphi_i$ per ogni i.*

Inoltre, se $\varphi_i : A_i \to B_i$ è iniettivo (rispettivamente suriettivo) per ogni i allora $\varphi : A \to B$ è iniettivo (rispettivamente suriettivo).

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in A$, allora esistono $i \in I$ e $a_i \in A_i$ tale che $f_i(a_i) = a$. Si definisce $\varphi(a) := g_i(\varphi_i(a_i))$. Utilizzando le proprietà di compatibilità tra i morfismi si verifica facilmente che φ è ben definito e soddisfa alla proprietà richiesta.

Supponiamo adesso che per ogni i sia φ_i iniettivo. Sia $a \in A$ tale che $\varphi(a) = 0$. Allora esistono $i \in I$ e $a_i \in A_i$ tale che $f_i(a_i) = a$ e $g_i(\varphi_i(a_i)) = 0$. Questo significa che esiste $i \leq j$ tale che $g_{ij}(\varphi_i(a_i)) = 0$ in B_j. Ma $g_{ij}(\varphi_i(a_i)) = v_j(f_{ij}(a_i))$ ed essendo φ_j iniettiva, si ha $f_{ij}(a_i) = 0$ in A_j, e dunque $a = f_j(f_{ij}(a_i)) = 0$ in A, provando che φ è iniettiva.

Se invece φ_i sono suriettivi per ogni $i \in I$, dato $b \in B$, esiste $b_i \in B_i$ tale che $g_i(b_i) = b$. Dunque esiste $a_i \in A_i$ tale che $\varphi_i(a_i) = b_i$ e per costruzione, $a := f_i(a_i)$ ha la proprietà che $\varphi(a) = b$, provando che φ è suriettiva. □

OSSERVAZIONE 1.22. Dalla dimostrazione della proposizione precedente si verifica facilmente che se $\{A_i\}, \{B_i\}$ sono anelli e $\varphi_i : A_i \to B_i$ sono morfismi di anelli, allora $\varphi : A \to B$ è un morfismo di anelli.

1.5. Limiti diretti e operazioni interne. Vediamo adesso come si comporta il limite diretto rispetto alle operazioni di somma diretta, prodotto tensore e Hom.

Se $\{A_i, f_{ij}\}$ è un sistema diretto di R-moduli e A è un R-modulo, allora si verifica facilmente che $\{\mathsf{Hom}_R(A, A_j)\}$ (con i morfismi indotti) è un sistema diretto di R-moduli.

OSSERVAZIONE 1.23. Se $\{A_i, f_{ij}\}$ e $\{B_i, g_{ij}\}$ sono due sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli, la famiglia $\{\mathsf{Hom}_{R_i}(A_i, B_i)\}$ *non* è in genere un sistema diretto di $\{R_i\}$-moduli perchè non esistono in genere dei morfismi naturali $\mathsf{Hom}_{R_i}(A_i, B_i) \to \mathsf{Hom}_{R_j}(A_j, B_j)$.

D'altra parte, se $\{A_i, f_{ij}\}$ è un sistema diretto di R-moduli e A è un R-modulo, allora $\{\mathsf{Hom}_R(A_j, A)\}$ *non* è un sistema diretto di R-moduli (poiché i morfismi naturali sono invertiti). È quello che si chiama un sistema *inverso* di R-moduli (una teoria duale a quella dei sistemi diretti può essere sviluppata analogamente a quanto fatto per i sistemi diretti).

Il limite induttivo non commuta con il funtore Hom_R in generale:

ESEMPIO 1.24. Sia $\mathsf{Pol}_\mathbb{C}^{\leq n}$ il $\mathbb{C}$-modulo formato dai polinomi di grado $\leq n$ e definiamo $f_{ij} = \mathsf{id}$ se $i \leq j$. Allora

$$\varinjlim \mathsf{Pol}_\mathbb{C}^{\leq n} = \mathbb{C}[z].$$

Pertanto

$$\mathsf{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[z], \mathbb{C}[z]) = \mathsf{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[z], \varinjlim \mathsf{Pol}_\mathbb{C}^{\leq n}) \neq \varinjlim \mathsf{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[z], \mathsf{Pol}_\mathbb{C}^{\leq n})$$

perché $\mathsf{id}_{\mathbb{C}[z]} \notin \varinjlim \mathsf{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[z], \mathsf{Pol}_\mathbb{C}^{\leq n})$.

Se $\{A_i, f_{ij}\}$ e $\{B_i, g_{ij}\}$ sono due sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli allora $\{A_i \oplus_{R_i} B_i, f_{ij} \oplus g_{ij}\}$, e $\{A_i \otimes_{R_i} B_i, f_{ij} \oplus g_{ij}\}$ sono sistemi diretti di R-moduli (con i morfismi naturali indotti).

ESERCIZIO 1.25. Siano $\{A_i, f_{ij}\}$ e $\{B_i, g_{ij}\}$ due sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli. Siano $R := \varinjlim R_i$, $A := \varinjlim A_i$ e $B := \varinjlim B_i$. Si provi che

$$\varinjlim (A_i \oplus_{R_i} B_i) \simeq A \oplus_R B.$$

PROPOSIZIONE 1.26. *Siano* $\{A_i, f_{ij}\}$ *e* $\{B_i, g_{ij}\}$ *due sistemi diretti di* $\{R_i\}$*-moduli. Siano* $R := \varinjlim R_i$, $A := \varinjlim A_i$ *e* $B := \varinjlim B_i$. *Allora*

$$\varinjlim (A_i \otimes_{R_i} B_i) \simeq A \otimes_R B.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $H := \varinjlim (A_i \otimes_{R_i} B_i)$. Per ogni i i morfismi $f_i \otimes g_i : A_i \otimes_{R_i} B_i \to A \otimes_R B$ hanno la proprietà che $(f_i \otimes g_i) \circ (f_{ij} \otimes g_{ij}) = f_j \otimes g_j$ e pertanto per la proprietà universale del prodotto tensoriale esiste un morfismo di R-moduli $h : H \to A \otimes_R B$. Costruiamo la sua inversa. Sia $\theta_i : A_i \oplus_{R_i} B_i \to A_i \otimes_{R_i} B_i$ il morfismo naturale R-bilineare. Allora $\{\theta_i\}$ è un morfismo R-bilineare di sistemi diretti di $\{R_i\}$-moduli. Ragionando come nella Proposizione 1.21 si vede che esiste un morfismo R-bilineare

$$\theta : \varinjlim (A_i \oplus_{R_i} B_i) \overset{\text{Es. 1.25}}{=} A \oplus_R B \to H.$$

Dunque dalla proprietà universale del prodotto tensoriale si fattorizza attraverso un morfismo R-lineare

$$k : A \otimes_R B \to H.$$

Utilizzando le definizioni dei vari morfismi si provi che $h \circ k = k \circ h = \mathsf{id}$. $\square$

2. Prefasci e Fasci

Se X è uno spazio topologico, denotiamo con $\tau(X)$ la sua topologia, ovvero $\tau(X)$ è l'insieme formato dagli aperti di X.

DEFINIZIONE 2.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ di $\mathbb{Z}$-moduli è una applicazione che ad ogni aperto di X associa uno $\mathbb{Z}$-modulo per cui per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$ esiste un morfismo di $\mathbb{Z}$-moduli, detto *restrizione*, $r_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ tale che

(1) $r_{UU} = \mathsf{id}$,
(2) $r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV}$ per ogni tripla di aperti $W \subseteq V \subseteq U$.

OSSERVAZIONE 2.2. Similmente si può definire un prefascio di insiemi, di anelli, di R-moduli su un dato anello R, di spazi vettoriali richiedendo che le restrizioni siano morfismi nella categoria appropriata. Per quello che ci serve nel seguito la nozione di prefasci di $\mathbb{Z}$-moduli è sufficiente e quando non esplicitamente detto la parola *prefascio* indicherà sempre un prefascio di $\mathbb{Z}$-moduli.

ESEMPIO 2.3.
(1) Sia $X = \mathbb{C}$, sia $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}$ il prefascio che ad ogni aperto associa le funzioni olomorfe *limitate* definite su tale aperto e come restrizioni le restrizioni di funzioni. Si noti che per il teorema di Liouville, $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
(2) Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $C_{\mathbb{C}}$ il *prefascio costante* che ad ogni aperto di X associa l'anello $\mathbb{C}$ (similmente si definisce $C_{\mathbb{R}}$, $C_{\mathbb{Q}}$, etc..), ovvero $C_{\mathbb{C}}(U) = \mathbb{C}$ per ogni aperto $U \subset X$.

(3) Siano $p_1, \dots, p_n \in X$ dei punti di uno spazio topologico. Definiamo $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ il *prefascio grattacielo* tale che $\mathcal{G}_\mathbb{C}(U) = \emptyset$ se $p_j \notin U$ per ogni $j = 1, \dots, n$; $\mathcal{G}_\mathbb{C}(U) = \mathbb{C}^l$ se U contiene esattamente l dei n punti $\{p_1, \dots, p_n\}$.

DEFINIZIONE 2.4. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due prefasci su uno spazio topologico X. Un *morfismo di prefasci* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una collezione di mappe $\{h_U\}_{U \in \tau(X)}$ tali che per ogni $U \in \tau(X)$

$$h_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

è un morfismo di $\mathbb{Z}$-moduli e il seguente diagramma commuta per ogni coppia di aperti $V \subseteq U$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle r_{UV}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Se per ogni aperto U il morfismo h_U è iniettivo, $\mathcal{F}$ si dice un *sotto-prefascio* di $\mathcal{G}$.

DEFINIZIONE 2.5. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico X. Sia $U \subseteq X$ un aperto. Una *sezione* di $\mathcal{F}$ su U è un elemento di $\mathcal{F}(U)$.

Un morfismo di prefasci $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un *isomorfismo* di prefasci se esiste un morfismo di prefasci $g : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ tale che $g \circ h = \mathrm{id}_\mathcal{F}$ e $h \circ g = \mathrm{id}_\mathcal{G}$. In particolare h è un isomorfismo di prefasci se per ogni aperto U di X il morfismo $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo.

DEFINIZIONE 2.6. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico X. $\mathcal{F}$ si dice un *fascio* se per ogni collezione $\{U_j\}$ di aperti in X, posto $U = \cup U_j$, risultano soddisfatti i due assiomi seguenti:

S1: se $f, g \in \mathcal{F}(U)$ e $r_{UU_j}(f) = r_{UU_j}(g)$ per ogni j, allora $f = g$,
S2: se per ogni i esistono $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che per ogni i, j con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ risulta $r_{U_iU_j}(f_i) = r_{U_iU_j}(f_j)$, allora esiste $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $r_{UU_j}(f) = f_j$.

OSSERVAZIONE 2.7. Se $\mathcal{F}$ è un prefascio di $\mathbb{Z}$-moduli, per la linearità delle mappe di restrizione, la **S1** si può sostituire con la richiesta che se $f \in \mathcal{F}(U)$ e $r_{UU_j}(f) = 0$ per ogni j, allora $f = 0$.

DEFINIZIONE 2.8. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono fasci su X, un *morfismo di fasci* è semplicemente un morfismo di prefasci $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Un *sotto-fascio* di un fascio è semplicemente un sotto-prefascio che sia anche un fascio.

ESEMPIO 2.9. (1) Il fascio di struttura di una varietà è un fascio.
(2) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, ...$ con la topologia discreta. Il fascio *delle funzioni localmente costanti* $\mathbb{K}_X$, è definito tramite

$$\mathbb{K}_X(U) := \{f : U \to \mathbb{K} \quad \text{continua}\}.$$

Si osserva che se U è connesso allora $\mathbb{K}_X(U) = \mathbb{K}$.

(3) Il prefascio $\mathcal{H}^\infty_\mathbb{C}$ *non* è un fascio. Infatti siano $U_j := \{z \in \mathbb{C} : |z| < j\}$. Sia $f_j(z) = z \in \mathcal{H}^\infty_\mathbb{C}(U_j)$. Si ha $\mathbb{C} = \cup_j U_j$, ma non esiste $f \in \mathcal{H}^\infty_\mathbb{C}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ tale che $f|_{U_j}(z) = z$. Dunque **S2** non è soddisfatto.

(4) Se X, Y sono spazi topologici, sia $C_{X,Y}$ definito da
$$C_{X,Y}(U) := \{f : U \to Y \quad \text{continua}\}.$$
Si verifica facilmente che $C_{X,Y}$ è un fascio.

(5) Sia $X = \{a, b\}$ con la topologia discreta. Sia $\mathcal{A}$ definito tramite $\mathcal{A}(a) = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A}(b) = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{A}(X) = \mathbb{Z}$, con restrizioni date da $r_{X,a} = r_{X,b} = 0$. Allora $\mathcal{A}$ è un prefascio che non verifica **S1**.

DEFINIZIONE 2.10. Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{R}$ un (pre)fascio di anelli commutativi con unità su X. Sia $\mathcal{F}$ un (pre)fascio di gruppi abeliani su X. $\mathcal{F}$ si dice un *(pre)fascio di $\mathcal{R}$-moduli* (o semplicemente un *$\mathcal{R}$-modulo*) se

(1) $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{R}(U)$-modulo per ogni aperto $U \subseteq X$,

(2) per ogni $V \subset U$ coppia di aperti, e per ogni $\alpha \in \mathcal{R}(U)$ e $v \in \mathcal{F}(U)$, risulta
$$r^\mathcal{F}_{UV}(\alpha v) = r^\mathcal{R}_{UV}(\alpha) r^\mathcal{F}_{UV}(v).$$

ESEMPIO 2.11. (1) Sia M una varietà complessa, $\mathcal{O}_M$ il fascio delle funzioni olomorfe su M e $C^\infty_{M,\mathbb{C}}$ il fascio delle funzioni C^∞ a valori complessi. Allora $C^\infty_{M,\mathbb{C}}$ è un $\mathcal{O}_M$-modulo.

(2) Sia M una varietà complessa. $\mathcal{O}_M$ è un fascio di domini di integrità. Si definisce allora un prefascio di campi $\mathfrak{M}'_M$ assegnando a U il campo $\mathfrak{M}'_M(U)$ delle frazioni di $\mathcal{O}_M$; ovvero, se U è connesso, $\mathfrak{M}'_M(U)$ è dato dalle classi di equivalenza di $\mathcal{O}_M(U) \times \mathcal{O}_M(U) \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $(f, g) \sim (f', g')$ se $fg' - gf' = 0$. Allora $\mathfrak{M}'_M$ è un prefascio di $\mathcal{O}_M$-moduli (che non è in genere un fascio perchè non soddisfa **S2**).

DEFINIZIONE 2.12. Sia $\mathcal{F}$ un (pre)fascio su X spazio topologico. Sia $U \subset X$ un aperto. Allora si denota $\mathcal{F}|_U$ il *(pre)fascio restrizione* di $\mathcal{F}$ a U definito da $\mathcal{F}|_U(V) := \mathcal{F}(V)$ per ogni aperto $V \subset U$.

DEFINIZIONE 2.13. Sia M una varietà e sia $\mathcal{R}$ un fascio di anelli commutativo con unità su M. Sia $m \in \mathbb{N}$. Il fascio
$$\tau(M) \ni U \mapsto \mathcal{R}^m(U) := \underbrace{\mathcal{R}(U) \oplus \ldots \mathcal{R}(U)}_{m}$$
è un fascio di $\mathcal{R}$-moduli.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio su M che è isomorfo come fascio di $\mathcal{R}$-moduli a $\mathcal{R}^m$, si dice che $\mathcal{F}$ è un fascio *$\mathcal{R}$-libero* di rango m.

Un fascio di $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{F}$ si dice *localmente libero* di rango m se per ogni $z \in M$ esiste un aperto $U \ni z$ tale che $\mathcal{F}|_U$ è $\mathcal{R}|_U$-libero di rango m.

I fasci localmente liberi sono essenzialmente fibrati vettoriali:

PROPOSIZIONE 2.14. *Sia M una varietà reale. Sia E un fibrato vettoriale reale di rango r su M. Allora si definisce il fascio $\mathcal{E}$ delle sezioni C^∞ associando ad un aperto U le sezioni liscie di E su tale aperto. Il fascio $\mathcal{E}$ è un fascio di C^∞_M-moduli localmente libero di rango r.*

Viceversa ad ogni fascio $\mathcal{E}$ di C^∞_M–moduli localmente libero di rango r si associa un fibrato vettoriale reale di rango r su M di cui $\mathcal{E}$ è il fascio delle sezioni.

La corrispondenza sopra costruita è univoca a meno di isomorfismi, ovvero, se i fibrati vettoriali reali E, E' sono isomorfi, allora i fasci delle loro sezioni sono isomorfi e viceversa.

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $\mathcal{E}$ è un fascio. Per verificare che è localmente libero, scegliamo un atlante $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ di M che trivializza E. Poniamo $v_j^\alpha(x) := \varphi_\alpha^{-1}(x, e_j)$ con $\{e_1, \ldots, e_r\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^r$. Abbiamo che $\mathcal{E}|_{U_\alpha} \simeq (C^\infty_M)^r|_{U_\alpha}$ grazie alla mappa che ad $s \in \mathcal{E}(V)$, con $V \subset U_\alpha$, con $s(x) = \sum a_j(x) v_j(x)$ associa $(a_1(x), \ldots, a_r(x)) \in C^\infty_M(V)^r$.

Viceversa, se $\mathcal{E}$ è un fascio di C^∞_M-moduli localmente libero, esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M tale che $\mathcal{E}|_{U_\alpha}$ è libero. Ovvero, esiste un isomorfismo φ_α di fasci di $(C^\infty_M)|_{U_\alpha}$-moduli

$$\varphi_\alpha : \mathcal{E}|_{U_\alpha} \to (C^\infty_M)^r|_{U_\alpha}.$$

Sia $e_j : M \to \mathbb{R}^r$ la funzione definita tramite $e_j(x) := (0, \ldots, 1, 0, \ldots 0)$ con 1 nella j-ma posizione, $j = 1, \ldots, r$. Si noti che $\{e_1, \ldots, e_r\}$ è un sistema di generatori liberi di $(C^\infty_M)^r(V)$ su $C^\infty_M(V)$ per ogni aperto $V \subset M$. Pertanto, ponendo $v_j^\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(e_j)$, risulta che per ogni aperto $V \subset U_\alpha$ le restrizioni di $v_1^\alpha, \ldots, v_r^\alpha$ a V generano $\mathcal{E}(V)$ su $C^\infty_M(V)$. Dunque, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, esistono delle funzioni liscie $M_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \mathbb{R})$ tali che

$$v_j^\alpha = \sum_{k=1}^r M_{\alpha\beta}^{jk} v_k^\beta.$$

Si verifica facilmente che $\{M_{\alpha\beta}\}$ verificano le identità di cociclo (poiché $\{v_1^\alpha, \ldots, v_r^\alpha\}$ sono generatori liberi) e dunque definiscono (a meno di isomorfimi) un fibrato vettoriale F su M .

Proviamo adesso che il fascio $\mathcal{E}$ è isomorfo come fascio di C^∞_M-moduli al fascio delle sezioni del fibrato $E := F^*$. Sia $s \in \mathcal{E}(U)$, $U \subset M$ un aperto. Allora, per ogni $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$ si può scrivere $s = \sum_{j=1}^r s_j^\alpha v_j^\alpha$, con $s_j^\alpha \in C^\infty_M(U_\alpha \cap U)$, $j = 1, \ldots, r$. Su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U \neq \emptyset$ risulta allora

$$\sum_{j,k=1}^r s_j^\alpha M_{\alpha\beta}^{jk} v_k^\beta = \sum_{j=1}^r s_j^\alpha v_j^\alpha = s = \sum_{k=1}^r s_k^\beta v_k^\beta,$$

da cui, segue che, posto $\underline{s}^\alpha = (s_1^\alpha, \ldots, s_r^\alpha)^t$, si ha

$$\underline{s}^\beta = ({}^t M_{\beta\alpha})^{-1} \underline{s}^\alpha.$$

Poiché $\{({}^t M_{\beta\alpha})^{-1}\}$ sono le funzioni di transizione di $E = F^*$, ne segue che $\{s_\alpha\}$ sono i dati locali di una sezione C^∞ di E su V. Si verifica immediatamente che l'applicazione che ad $s \in \mathcal{E}(V)$ associa la sezione definita da $\{s_\alpha\}$ è un isomorfismo di C^∞_M-moduli.

L'univocità della corrispondenza è lasciata come esercizio. $\square$

Una analoga corrispondenza vale tra fibrati vettoriali olomorfi su una varietà complessa M e fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente liberi.

OSSERVAZIONE 2.15. Si presti attenzione che, per quanto visto nella dimostrazione precedente, se E è un fibrato vettoriale di rango k con funzioni di transizione $\{g^{ij}_{\alpha\beta}\}_{i,j=1,\dots,k}$ e le $\{e^\alpha_1, \dots, e^\alpha_k\}$ sono basi locali di E su U_α che determinano tali funzioni di transizione, risulta
$$e^\beta_j = \sum g^{ij}_{\alpha\beta} e^\alpha_i.$$

DEFINIZIONE 2.16. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su uno spazio topologico X. Sia $x \in X$. L'insieme $\tau_x(X)$ degli aperti U di X che contengono x è un insieme di indici parzialmente ordinato filtrante quando si ponga $U \leq V$ se $V \subseteq U$ per $U, V \in \tau_x(X)$. Allora $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \tau_x(X)}$ è un sistema diretto di $\mathbb{Z}$-moduli e si può definire il limite diretto
$$\mathcal{F}_x := \varinjlim \mathcal{F}(U).$$
In altri termini, gli elementi di $\mathcal{F}_x$ sono classi di equivalenza $[a]$ dove $a \in \mathcal{F}(U)$ per qualche aperto $U \ni x$ e $b \in [a]$ se esiste V aperto tale che $x \in V$, $b \in \mathcal{F}(V)$ e $r_{U,W}(a) = r_{U,W}(b)$ qualche aperto $W \in \tau_x(X)$ tale che $W \subseteq U \cap V$. La classe $[a]$ si denota con a_x.

$\mathcal{F}_x$ si dice la *fibra* (o la *spiga*) di $\mathcal{F}$ su x.

Per quanto visto sui limiti diretti, se $\mathcal{F}$ è un (pre)fascio di moduli su un (pre)fascio di anelli $\mathcal{R}$ fissato (rispettivamente un prefascio di anelli), allora $\mathcal{F}_x$ è un $\mathcal{R}_x$-modulo.

OSSERVAZIONE 2.17. Sia $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. Allora, passando al limite diretto, per ogni $x \in X$ si definisce un morfismo di $\mathbb{Z}$-moduli (o di anelli se i prefasci sono prefasci di anelli)
$$h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x.$$
Dalla definizione segue che h_x è dato tramite $h_x(a_x) := (h_U(a))_x$, se a_x ha un rappresentante $a \in \mathcal{F}(U)$.

TEOREMA 2.18. *Sia X uno spazio topologico e siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci su X. Sia $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci.*

(1) *h_U è iniettivo per ogni $U \in \tau(X)$ se e solo se $h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni $x \in X$.*
(2) *h_U è un isomorfismo per ogni $U \in \tau(X)$ se e solo se $h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è un isomorfismo per ogni $x \in X$.*

ESEMPIO 2.19. Per le proprietà dei limiti diretti, se per ogni $U \subseteq X$ aperto, $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è suriettivo allora $h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è suriettivo, ma il viceversa non è vero. Si consideri infatti $X = \mathbb{C}$, e il morfismo di fasci $\frac{\partial}{\partial z} : \mathcal{O}_\mathbb{C} \to \mathcal{O}_\mathbb{C}$. È ben noto che per ogni insieme semplicemente connesso $U \subset \mathbb{C}$ ogni funzione olomorfa $f \in \mathcal{O}_\mathbb{C}(U)$ ammette una primitiva, ovvero
$$\frac{\partial}{\partial z}|_U : \mathcal{O}_\mathbb{C}(U) \to \mathcal{O}_\mathbb{C}(U)$$

è suriettivo. Di conseguenza, poiché ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni semplicemente connessi, per ogni $x \in \mathbb{C}$ risulta $\frac{\partial}{\partial z}|_x : \mathcal{O}_{\mathbb{C},x} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C},x}$ suriettivo. Però $\frac{\partial}{\partial z}|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ non è suriettivo, dato che $f(z) = 1/z \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ non ha una primitiva in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (essendo $\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i$).

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 2.18. (1) Per le proprietà dei limiti diretti, se h_U è iniettiva per ogni aperto U, allora h_x è iniettiva.

Viceversa, supponiamo che h_x sia iniettiva per ogni $x \in X$. Supponiamo $U \subset X$ un aperto e $a, b \in \mathcal{F}(U)$ tali che $h_U(a) = h_U(b)$. Allora per ogni $x \in X$ risulta $h_x(a_x) = h_x(b_x)$. Essendo h_x iniettiva, risulta $a_x = b_x$ per ogni $x \in X$. Dunque esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U tale che $r_{UU_j}(a) = r_{UU_j}(b)$. Essendo $\mathcal{F}$ un fascio, per **S1** si ha $a = b$ e dunque h_U è iniettiva.

(2) Per le proprietà dei limiti diretti, se h_U è un isomorfismo per ogni aperto U, allora h_x è un isomorfismo per ogni $x \in X$.

Viceversa, supponiamo $h_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ isomorfismo per ogni $x \in X$. Per (1) per ogni aperto $U \subset X$ risulta $h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ iniettivo. Dobbiamo provare che h_U è suriettiva per ogni aperto $U \subset X$. Sia $b \in \mathcal{G}(U)$. Per ipotesi per ogni $x \in X$ esiste $a_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $h_x(a_x) = b_x$. Dunque esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U e $a_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che $h_{U_j}(a_j) = r_{UU_j}(b)$. Essendo h iniettiva, risulta $r_{U_j,U_j\cap U_i}(a_j) = r_{U_i,U_j\cap U_i}(a_i)$ per ogni $U_j \cap U_i \neq \emptyset$. Pertanto essendo $\mathcal{F}$ un fascio, per **S2**, esiste $a \in \mathcal{F}(U)$ tale che $r_{UU_j}(a) = a_j$. Poichè $r_{UU_j}(h_U(a)) = h_{U_j}(a_j) = r_{UU_j}(b)$, essendo $\mathcal{G}$ un fascio, per **S1** risulta $h_U(a) = b$. □

TEOREMA 2.20. *Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X. Allora esiste un fascio $\mathcal{F}^+$ e un morfismo di prefasci $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tale che per ogni morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ con $\mathcal{G}$ fascio su X esiste $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci tale che $\varphi = \varphi^+ \circ \theta$. Inoltre $(\mathcal{F}^+, \theta)$ è unico a meno di isomorfismi e, per ogni $x \in X$, $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$ è l'identità.*

DIMOSTRAZIONE. Per $U \in \tau(X)$ definiamo

$$\mathcal{F}^+(U) := \{f : U \to \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{F}_x : f(x) \in \mathcal{F}_x, \forall x \in U, \exists V \ni x, g \in \mathcal{F}(V) : g_y = f(y) \forall y \in V\}.$$

Proviamo che $\mathcal{F}^+$ è un fascio su X con restrizione definita da

$$r_{UV}(f) = f|_V \quad f \in \mathcal{F}^+(U).$$

Chiaramente $\mathcal{F}^+$ è un prefascio. Resta da verficare che gode delle proprietà **S1** e **S2**. Ma sono entrambe ovvie (esercizio).

Il morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ lo si definisce tramite

$$\theta : \mathcal{F}(U) \ni f \mapsto f^+ \in \mathcal{F}^+(U),$$

dove

$$f^+(x) := f_x \in \mathcal{F}_x.$$

Dalla definizione segue subito che $\theta_x = \mathrm{id}$.

Sia ora $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo, con $\mathcal{G}$ un fascio su X. Definiamo $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ nel modo seguente: se $f \in \mathcal{F}^+(U)$, esiste un ricoprimento $\{V_j\}_{j\in U}$ di U e sezioni $a_j \in \mathcal{F}(V_j)$ tali che $f(y) = a_{j,y}$ per ogni $y \in V_j$. Poiché

$$r_{V_j,V_j\cap V_k}(\varphi_{V_j}(a_j)) = r_{V_k,V_j\cap V_k}(\varphi_{V_k}(a_k)) \quad \forall j,k$$

ed essendo $\mathcal{G}$ un fascio, esiste una sezione di $\mathcal{G}(U)$, che chiamiamo $\varphi_U^+(f)$ tale che $r_{UV_j}(\varphi_U^+(f)) = \varphi_{V_j}(a_j)$ per ogni j. Inoltre

$$\varphi_U^+ \circ \theta_U(f) = \varphi_U(f) \quad f \in \mathcal{F}(U)$$

infatti $\theta_U(f) = f^+$ e $\varphi_U^+(f^+)$ è dato dal rincollamento delle sezioni $\{\varphi_{V_j}(a_j)\}$ dove possiamo prendere $a_j := f$ per ogni j. Pertanto $\varphi_U^+(f^+) = \varphi_U(f)$.

Infine, per l'unicità, se $(\tilde{\mathcal{F}}^+, \tilde{\theta})$ è un altro fascio con le stesse proprietà, sono definite $\tilde{\theta}^+ : \tilde{\mathcal{F}}^+ \to \mathcal{F}^+$ e $\theta^+ : \mathcal{F}^+ \to \tilde{\mathcal{F}}^+$ tali che $\theta^+ \circ \tilde{\theta} = \theta$ e $\tilde{\theta}^+ \circ \theta = \tilde{\theta}$, dunque

$$\theta^+ \circ \tilde{\theta}^+ \circ \theta = \theta,$$

ora, poiché $\theta_x = \mathsf{id}_x$, risulta che θ^+ è un isomorfismo sulle fibre e dunque e' un isomorfismo di fasci per il Teorema 2.18. $\square$

DEFINIZIONE 2.21. Se $\mathcal{F}$ è un prefascio il fascio $\mathcal{F}^+$ si dice il *fascio associato* ad $\mathcal{F}$.

OSSERVAZIONE 2.22. Se $\mathcal{F}$ è un fascio, allora $\mathcal{F}^+$ è isomorfo a $\mathcal{F}$ tramite θ (poiché θ è un isomorfismo sulle fibre).

ESEMPIO 2.23.
(1) Il fascio $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C},\mathsf{loc}}$ è il fascio le cui sezioni sono funzioni olomorfe localmente limitate. È il fascio associato al prefascio $\mathcal{H}^\infty_{\mathbb{C}}$.
(2) Se M è una varietà complessa, il fascio delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}_M$ è il fascio associato al prefascio $\mathcal{M}'_M$ definito in precedenza. Si noti che una sezione globale di $\mathcal{M}_M(M)$ (quella che si dice una "funzione meromorfa") è il dato di un ricoprimento $\{U_j\}$ di M e di sezioni $f_j/g_j \in \mathcal{M}'_M(U_j)$.
(3) Il prefascio $L^1_{\mathbb{R}}$ definito associando ad un aperto U le funzioni sommabili secondo Lebesgue su U, ha come fascio associato il fascio delle funzioni $L^1_{\mathbb{R},\mathsf{loc}}$, ovvero funzioni localmente sommabili.

DEFINIZIONE 2.24. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{G}$ un fascio su X. Se $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{G}$, se definisce il *fascio quoziente* $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ come il fascio associato al prefascio $\mathcal{H}'$ definito su un aperto U tramite $\mathcal{H}'(U) := \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$.

OSSERVAZIONE 2.25. Poiché il limite diretto è un funtore esatto, passando al limite diretto per $U \in \tau_x(X)$ nella successione esatta di $\mathbb{Z}$-moduli

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U) \to 0,$$

si ha che $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x = \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$.

3. Successioni esatte di fasci

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci (di Z-moduli o di anelli o di spazi vettoriali) su uno spazio topologico X. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci.

DEFINIZIONE 3.1. Il *nucleo* $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è il prefascio su X definito da

$$\mathsf{Ker}(\varphi)(U) := \mathsf{Ker}(\varphi_U) \quad U \in \tau(X).$$

L'immagine $\mathsf{Im}'(\varphi)$ è il prefascio su X definito da

$$\mathsf{Im}'(\varphi)(U) := \mathsf{Im}(\varphi_U) \quad U \in \tau(X).$$

OSSERVAZIONE 3.2. Poiché $\mathsf{Ker}(\varphi)$ è un sottoprefascio di $\mathcal{F}$ e $\mathsf{Im}'(\varphi)$ è un sottoprefascio di $\mathcal{G}$, per entrambi vale la proprietà **S1**.

ESEMPIO 3.3. Sia $\frac{\partial}{\partial z} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ il morfismo di fasci definito nell'Esempio 2.19. Allora $\frac{1}{z} \notin \mathsf{Im}(\frac{\partial}{\partial z}|_U)$ con $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia $\log z$ il logaritmo definito su $U_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Allora $\frac{\partial \log z}{\partial z} = 1/z$. Se $\log' z$, è il logaritmo definito in $U_2 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ si ha $\frac{\partial \log' z}{\partial z} = 1/z$. Pertanto risulta $1/z \in \mathsf{Im}(\frac{\partial}{\partial z}|_{U_1})$ e $1/z \in \mathsf{Im}(\frac{\partial}{\partial z}|_{U_2})$, ma non esiste una sezione di $\mathsf{Im}'(\frac{\partial}{\partial z})$ su U la cui restrizione ad U_1 e ad U_2 sia $1/z$. Dunque $\mathsf{Im}'(\frac{\partial}{\partial z})$ non soddisfa **S2**.

PROPOSIZIONE 3.4. $\mathsf{Ker}(\varphi)$ *è un fascio e* $(\mathsf{Ker}(\varphi))_x = \mathsf{Ker}(\varphi_x)$ *per ogni* $x \in X$.

DIMOSTRAZIONE. Occorre solo verificare **S2**. Sia $\{U_j\}$ un ricoprimento di U, aperto in M, e siano $f_j \in \mathsf{Ker}(\varphi)(U_j)$ sezioni tali che $r_{U_j, U_j \cap U_i}(f_j) = r_{U_i, U_j \cap U_i}(f_i)$ per ogni i, j. Poichè $\mathcal{F}$ è un fascio, esiste $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $r_{UU_j}(f) = f_j$. D'altra parte per ogni j si ha

$$r_{UU_j}(\varphi_U(f)) = \varphi_{U_j}(r_{UU_j}(f)) = \varphi_{U_j}(f_j) = 0,$$

poichè $\mathcal{G}$ è un fascio risulta $\varphi_U(f) = 0$ come volevasi, ovvero, $f \in \mathsf{Ker}(\varphi)(U)$.

La seconda asserzione segue subito dalla definizione. □

DEFINIZIONE 3.5. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci su uno spazio topologico X. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Il *fascio immagine* $\mathsf{Im}(\varphi)$ è il fascio associato al prefascio $\mathsf{Im}'(\varphi)$, ovvero, $\mathsf{Im}(\varphi) = (\mathsf{Im}'(\varphi))^+$.

OSSERVAZIONE 3.6. Si osservi che $(\mathsf{Im}(\varphi))_x = (\mathsf{Im}'(\varphi))_x = \mathsf{Im}(\varphi_x)$.

OSSERVAZIONE 3.7. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Si osservi che l'immersione $i : \mathsf{Im}'(\varphi) \to \mathcal{G}$ rende $\mathsf{Im}'(\varphi)$ un sotto-prefascio di $\mathcal{G}$ e dunque determina una immersione $i^+ : \mathsf{Im}(\varphi) \to \mathcal{G}$ che rende $\mathsf{Im}(\varphi)$ un sotto-fascio di $\mathcal{G}$. Per definizione di i^+, segue che $g \in \mathcal{G}(U)$ sta in $\mathsf{Im}(\varphi)(U)$ se e solo se esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U e sezioni $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che $\varphi_{U_j}(f_j) = r_{UU_j}(g)$ per ogni j.

DEFINIZIONE 3.8. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci su uno spazio topologico X. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Il morfismo φ è *iniettivo* se $\mathsf{Ker}(\varphi) = 0$. Il morfismo φ è *suriettivo* se $\mathsf{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$.

OSSERVAZIONE 3.9. Per la Proposizione 3.4 e il Teorema 2.18, φ è iniettivo se e solo se $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è iniettivo per ogni $U \in \tau(X)$, se e solo se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è iniettivo per ogni $x \in X$.

D'altra parte, φ suriettivo *non* vuol dire che $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ è suriettivo per ogni aperto U. Significa che per ogni aperto U e per ogni $g \in \mathcal{G}(U)$, esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U e $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che $\varphi_{U_j}(f_j) = r_{UU_j}(g)$ per ogni j.

DEFINIZIONE 3.10. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tre fasci su uno spazio topologico X. Siano $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ due morfimi di fasci. La successione

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}$$

è *esatta* se $\mathsf{Im}(\varphi) = \mathsf{Ker}(\phi)$.

OSSERVAZIONE 3.11. In particolare, se $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, posto $i : \mathsf{Ker}(\varphi) \to \mathcal{F}$ il morfismo immersione, la successione

$$\mathsf{Ker}(\varphi) \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

è esatta.

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tre fasci su uno spazio topologico X. Siano $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ due morfimi di fasci. Allora $\mathcal{F} \overset{\varphi}{\to} \mathcal{G} \overset{\phi}{\to} \mathcal{H}$ è esatta se e solo se per ogni $x \in X$ la successione $\mathcal{F}_x \overset{\varphi_x}{\to} \mathcal{G}_x \overset{\phi_x}{\to} \mathcal{H}_x$ è esatta.*

DIMOSTRAZIONE. Una direzione segue dal fatto che il limite diretto trasforma successioni esatte in successioni esatte.

Viceversa, sia U un aperto di X e sia $g \in \mathsf{Im}(\varphi)(U)$. Allora esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U e $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che $\varphi_{U_j}(f_j) = r_{UU_j}(g)$. Per ipotesi dunque $\phi_x(g_x) = 0$ e dunque, a meno di restringere U_j, abbiamo $\phi_{U_j}(r_{UU_j}(g)) = 0$. Pertanto $r_{UU_j}(\phi_U(g)) = 0$ e dunque, essendo $\mathcal{H}$ un fascio, risulta $\phi_U(g) = 0$. Questo prova che $\mathsf{Im}(\varphi) \subset \mathsf{Ker}(\phi)$.

Sia ora $g \in \mathsf{Ker}(\phi)$. Allora per ogni $x \in U$ risulta $\phi_x(g_x) = 0$ e dunque per ipotesi esiste $f_x \in \mathcal{F}_x$ tale che $\varphi_x(f_x) = g_x$. Dunque esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di U e sezioni $f_j \in \mathcal{F}(U_j)$ tali che $\varphi_{U_j}(f_j) = r_{UU_j}(g)$. Ovvero $g \in \mathsf{Im}(\varphi)$, questo prova che $\mathsf{Ker}(\phi) \subset \mathsf{Im}(\varphi)$. $\square$

OSSERVAZIONE 3.13. Se poniamo $\mathcal{H} = 0$ nella proposizione precedente, risulta che $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è suriettivo come morfismo di fasci se e solo se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ è suriettivo per ogni $x \in X$.

La successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

si dice un *successione esatta corta* di fasci se φ è iniettivo, ϕ è suriettivo (come morfismi di fasci) e $\mathsf{Im}(\varphi) = \mathsf{Ker}(\phi)$.

OSSERVAZIONE 3.14. Se $\mathcal{F}$ è un sottofascio di un fascio di gruppi abeliani $\mathcal{G}$, si ha una successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Infatti, poiché $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$ e la successione è esatta a livello di fibre, la successione è esatta a livello di fasci per la Proposizione 3.12.

PROPOSIZIONE 3.15. *Sia* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}$ *una successione esatta di fasci di* $\mathbb{Z}$*-moduli su* X*. Allora per ogni aperto* $U \subset X$ *la successione di* $\mathbb{Z}$*-moduli*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{H}(U)$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già che $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U)$ è iniettiva. È chiaro che $\operatorname{Im} \varphi_U \subset \ker \phi_U$. Sia ora $v \in \ker \phi_U$. Poiché $\operatorname{Im} \varphi = \ker \phi$, esiste un ricoprimento aperto $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ di U e $w_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha)$ tali che $\varphi_{U_\alpha}(w_\alpha) = r_{UU_\alpha}(v)$ per ogni α. Per $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha

$$\begin{aligned}
\varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}(r_{U_\alpha U_\alpha \cap U_\beta}(w_\alpha)) &= r_{U_\alpha U_\alpha \cap U_\beta}(\varphi_{U_\alpha}(w_\alpha)) \\
&= r_{U_\alpha U_\alpha \cap U_\beta}(r_{UU_\alpha}(v)) = r_{UU_\alpha \cap U_\beta}(v) \\
&= r_{U_\beta U_\alpha \cap U_\beta}(r_{UU_\beta}(v)) = r_{U_\beta U_\alpha \cap U_\beta}(\varphi_{U_\beta}(w_\beta)) \\
&= \varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}(r_{U_\beta U_\alpha \cap U_\beta}(w_\beta)).
\end{aligned}$$

Poiché $\varphi_{U_\alpha \cap U_\beta}$ è iniettiva, risulta $r_{U_\alpha U_\alpha \cap U_\beta}(w_\alpha) = r_{U_\beta U_\alpha \cap U_\beta}(w_\beta)$, ed essendo $\mathcal{F}$ un fascio, esiste $w \in \mathcal{F}(U)$ tale che $r_{UU_\alpha}(w) = w_\alpha$ per ogni α.

Asseriamo che $\varphi_U(w) = v$. Infatti per ogni α si ha

$$r_{UU_\alpha}(\varphi_U(w)) = \varphi_{U_\alpha}(r_{UU_\alpha}(w)) = \varphi_{U_\alpha}(w_\alpha) = r_{UU_\alpha}(v),$$

ed essendo $\mathcal{G}$ un fascio, risulta $\varphi_U(w) = v$, provando che $\ker \phi_U \subset \operatorname{Im} \varphi_U$. □

3.1. La successione esponenziale. Sia M una varietà complessa. Sia $\mathbb{Z}_M$ il fascio delle funzioni continue su M a valori interi (dunque localmente costanti), visto come fascio di gruppi abeliani rispetto alla *somma* di funzioni. Sia $\mathcal{O}_M$ il fascio di struttura di M, visto come fascio di gruppi abeliani rispetto alla *somma* di funzioni. Sia poi $\mathcal{O}_M^*$ il fascio definito da

$$\mathcal{O}_M^*(U) = \{f : U \to \mathbb{C}^* \text{ olomorfa}\}$$

visto come fascio di gruppi abeliani rispetto alla *moltiplicazione* di funzioni.

Il morfismo di immersione $\iota : \mathbb{Z}_M \hookrightarrow \mathcal{O}_M$ definito sull'aperto $U \subset M$ tramite $\iota_U : \mathbb{Z}_M(U) \to \mathcal{O}_M(U)$, $\iota(c) := c$, è un morfismo iniettivo di fasci di gruppi abeliani rispetto alla somma.

Definiamo poi $\exp : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^*$ sull'aperto $U \subset M$ tramite

$$\exp_U(f) := \exp(2\pi i f) \quad \forall f \in \mathcal{O}_M(U).$$

Si osserva che $\exp$ è un morfismo di fasci ($\mathcal{O}_M$ ha la struttura di fascio di gruppi abeliani rispetto alla somma e $\mathcal{O}_M^*$ ha la struttura di fascio di gruppi abeliani rispetto al prodotto).

PROPOSIZIONE 3.16. *Sia M una varietà complessa. La successione di fasci di gruppi abeliani, detta* successione esponenziale*,*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_M \longrightarrow 0$$

è esatta.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto visto in precedenza basta provare che per ogni $x \in M$ la successione

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{M,x} \xrightarrow{\iota_x} \mathcal{O}_{M,x} \xrightarrow{\exp_x} \mathcal{O}^*_{M,x} \longrightarrow 0$$

è esatta. Ora, è ovvio che ι è iniettivo. Inoltre, $\mathsf{Im}(\iota)_x = \{(z \mapsto c)\}$ per $c \in \mathbb{Z}$. Poiché $\exp(2\pi i c) = 1$ (e 1 è l'elemento neutro in $\mathcal{O}^*_{M,x}$) si ha $\mathsf{Im}\iota_x \subset \mathsf{Ker}\exp_x$. Viceversa, se $\exp_x(f_x) = 1$, esiste un intorno U di x, che possiamo supporre connesso, e $f \in \mathcal{O}_M(U)$ tale che f rappresenta il germe f_x e $\exp_U(f) \equiv 1$. Dunque $f \equiv c \in \mathbb{Z}$ e quindi $\mathsf{Ker}\exp_x = \mathsf{Im}\iota_x$ per ogni $x \in M$.

Proviamo che $\exp_x : \mathcal{O}_{M,x} \to \mathcal{O}^*_{M,x}$ è suriettiva per ogni $x \in M$. Sia $f_x \in \mathcal{O}^*_{M,x}$. Allora esiste un intorno U di x che possiamo prendere semplicemente connesso e $f \in \mathcal{O}^*_M(U)$ tale che f_x è il germe in x di f. Poiché $f(y) \neq 0$ per ogni $y \in U$ ed U è semplicemente connesso, esiste $\log f \in \mathcal{O}_M(U)$. Poniamo $g(z) = \frac{\log f(z)}{2\pi i}$ e si ha $\exp_x g_x = f_x$, dunque $\exp_x$ è suriettiva. $\square$

OSSERVAZIONE 3.17. La stessa costruzione precedente vale per il fascio delle funzioni C^∞_M a valori complessi, ovvero si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \xrightarrow{\iota} C^\infty_M \xrightarrow{\exp} (C^\infty_M)^* \longrightarrow 0.$$

3.2. Fasci di ideali e sottovarietà (singolari). Sia M una varietà complessa con fascio di struttura $\mathcal{O}_M$. Sia $\mathcal{I}$ un *sottofascio di ideali* di $\mathcal{O}_M$. Ovvero, per ogni U, $\mathcal{I}(U) \subseteq \mathcal{O}_M(U)$ è un ideale. Supponiamo che $\mathcal{I}$ sia localmente finitamente generato, ovvero, per ogni $x \in M$ esiste un aperto U contenente x e $q \in \mathbb{N}$ tale che la successione di $\mathcal{O}_M$-moduli

$$\mathcal{O}_M^{\oplus q}|_U \to \mathcal{I}|_U \to 0$$

è esatta. Al variare di $x \in M$ si definisce

$$V(\mathcal{I}) := \{p \in M : f(p) = 0\, \forall f \in \mathcal{I}_x\}.$$

Poiché $\mathcal{I}$ è localmente di tipo finito, per ogni $x \in M$ esistono $\{f_1, \ldots, f_q\}$ funzioni olomorfe definite in un intorno U di x tali che

$$V(\mathcal{I}) \cap U = \{p \in U : f_1(p) = \ldots = f_q(p) = 0\}.$$

L'insieme $V(\mathcal{I})$ si dice il supporto di $\mathcal{I}$ ed è una *sottovarietà analitica (singolare)* di M, ovvero un sottoinsieme di M localmente definito come luogo di zeri di un numero finito di funzioni olomorfe. Ad esempio, se S è una sottovarietà regolare di M, si può definire $\mathcal{I}_S(U) := \{f \in \mathcal{O}_M(U) : f|_S \equiv 0\}$ e risulta $V(\mathcal{I}_S) = S$ (lo si vede facilmente passando a coordinate locali adattate ad S).

Si ha allora la successione esatta di $\mathcal{O}_M$-moduli

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_{V(\mathcal{I})} \to 0,$$

dove $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})} := \mathcal{O}_M/\mathcal{I}_S$. Il fascio $\mathcal{O}_{V(\mathcal{I})}$ ha una naturale struttura di anello ed è il fascio di struttura di $V(\mathcal{I})$, ovvero è il fascio delle funzioni olomorfe "definite" su $V(\mathcal{I})$.

Nel caso in cui S sia una sottovarietà regolare, il fascio di ideali $\mathcal{I}_S$ è un fascio di ideali primi. In generale però $\mathcal{I}$ può non essere un fascio di ideali primi anche se $V(\mathcal{I})$ è una sottovarietà regolare. Ad esempio, in $\mathbb{C}^2$ con coordinate (z,w) si può considerare il fascio $\mathcal{I}$ generato da z^2. Allora $V(\mathcal{I}) = \{(z,w) : z = 0\}$ ma $\mathcal{I}$ non è primo.

3.3. fascio dei divisori. Sia M una varietà complessa e sia $\mathfrak{M}_M^*$ il fascio dei *gruppi moltiplicativi* del fascio di campi $\mathfrak{M}_M$ (fascio delle funzioni meromorfe)—ovvero $\mathfrak{M}_M^* = \mathfrak{M}_M \setminus \{0\}$. Dunque si ha una immersione di fasci di gruppi moltiplicativi $\mathcal{O}_M^* \hookrightarrow \mathfrak{M}_M^*$. Il quoziente $\mathfrak{D}_M := \mathfrak{M}_M^*/\mathcal{O}_M^*$ si dice il *fascio dei divisori* su M. La successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow \mathfrak{M}_M^* \longrightarrow \mathfrak{D}_M \longrightarrow 0$$

è esatta.

Una sezione globale di $\mathfrak{D}_M$ si dice un *divisore di Cartier* di M. Sia $D \in \mathfrak{D}_M(M)$. Allora per definizione esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e "funzioni meromorfe" $\frac{f_\alpha}{g_\alpha} \in \mathfrak{M}_M^*(U_\alpha)$ (ovvero tali che $f_\alpha \not\equiv 0$ in U_α) tali che $D(y) = [\frac{f_\alpha}{g_\alpha}]_y$ per ogni $y \in U_\alpha$, dove $[\frac{f_\alpha}{g_\alpha}] \in \mathfrak{M}_M^*(U_\alpha)/\mathcal{O}_M^*(U_\alpha)$. Pertanto, su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ esistono $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}_M^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ tali che

$$\frac{f_\alpha}{g_\alpha} = f_{\alpha\beta}\frac{f_\beta}{g_\beta}.$$

Le funzioni $\{f_{\alpha\beta}\}$ soddisfano le identità di cociclo e determinano pertanto un fibrato lineare olomorfo $\mathcal{O}(D)$ come nella Sezione 8.2 del Capitolo 2.

Sia ora dato un divisore D definito da $\{[\frac{f_\alpha}{g_\alpha}]\}$, con f_α, g_α coprimi, sia $V^+ = \{z \in M : z \in U_\alpha, f_\alpha(z) = 0\}$, e sia $V^- = \{z \in M : z \in U_\alpha, g_\alpha(z) = 0\}$. Queste sono ben definite perchè su $U_\alpha \cap U_\beta$ le funzioni che definiscono D sono uguali a meno di una funzione olomorfa mai nulla. Allora V^+ è una ipersuperficie (con singolarità) unione di componenti irriducibili che chiamiamo V_j^+ (finite se M è compatta) e similmente per V^-. Sia $\mathcal{I}_{V_j^+}$ l'ideale delle funzioni olomorfe che si annullano identicamente su V_j^+. Allora se $z \in V_j^+ \cap U_\alpha$ e $f_\alpha(z) = 0$, si ha $(f_\alpha)_z \in \mathcal{I}^{m_j}_{V_j^+,z}$ ma $(f_\alpha)_z \notin \mathcal{I}^{m_j+1}_{V_j^+,z}$ per qualche $m_j \geq 1$. Il numero m_j non dipende da $z \in V_j^+$. Similmente per V_j^- (dove prendiamo $-m_j$ con $m_j \leq -1$ al posto di m_j). Pertanto si scrive la somma formale (se è infinita) $D = \sum m_j V_j$, dove $m_j > 0$ su V^+ e $m_j < 0$ su V^-. Essendo $\mathfrak{D}_M(M)$ un gruppo abeliano rispetto alla somma, se M è compatto, risultano $V_j \in \mathfrak{D}_M(M)$ e $D = \sum_{j=1}^N m_j V_j$ in $\mathfrak{D}(M)$.

Un divisore di Cartier definito da $\{[\frac{f_\alpha}{g_\alpha}]\}$ si dice *effettivo* se $g_\alpha(x) \neq 0$ per ogni $x \in U_\alpha$ e per ogni α, ovvero se D è definito (localmente) come il luogo di zeri di funzioni olomorfe su M, ovvero anche se $D = \sum m_j V_j$ con $m_j > 0$ e V_j ipersuperfici irriducibili.

Se M è una superficie di Riemann, ovvero una varietà complessa di dimensione uno, un divisore di Cartier è determinato da una serie formale $\sum_{j=1}^{\infty} a_j p_j$, dove $\{p_j\}$ è una successione discreta di punti in M e $a_j \in \mathbb{Z}$ (in particolare se M è compatta, risulta $a_j = 0$ tranne un numero finito di valori). Infatti, se $\{[\frac{f_\alpha}{g_\alpha}]\}$ determina il divisore D, si determinano i punti p_{2j} come gli zeri di f_α e a_{2j} la loro molteplicità, e i punti p_{2j+1} come gli zeri di g_α e $-a_{2j+1}$ come la loro molteplicità.

3.4. Il complesso di de Rham. Sia M una varietà reale di dimensione n. Il fascio delle sezioni del fibrato $\bigwedge^p M := \bigwedge^p(TM^*)$ lo denotiamo $C_M^{\infty,p}$. Le sezioni globali di tale fascio le abbiamo denotate con Ω_M^p, ovvero $\Omega_M^p := C^{\infty,p}(M)$. Sia $x \in M$. Se U è un intorno stellato contenente x, per il Lemma di Poincaré la successione di gruppi

$$0 \to \mathbb{R}_M(U) \to C_M^\infty(U) \xrightarrow{d} C_M^{\infty,1}(U) \xrightarrow{d} \ldots \to C_M^{\infty,n}(U) \to 0$$

è esatta. Poiché gli intorni stellati di un punto formano un sistema fondamentale di intorni, risulta che per ogni x la successione di gruppi

$$0 \to \mathbb{R}_{M,x} \to C_{M,x}^\infty \xrightarrow{d} C_{M,x}^{\infty,1} \xrightarrow{d} \ldots \to C_{M,x}^{\infty,n} \to 0$$

è esatta. Dunque la successione di fasci di gruppi abeliani

$$0 \to \mathbb{R}_M \to C_M^\infty \xrightarrow{d} C_M^{\infty,1} \xrightarrow{d} \ldots \to C_M^{\infty,n} \to 0$$

è esatta. Tale successione di chiama *il complesso di fasci di de Rham.*

4. Morfismi di fibrati vettoriali e di fasci localmente liberi

Sia M una varietà complessa (tutte le considerazioni qui fatte valgono anche per varietà reali, ove si sostituisca C_M^∞ a $\mathcal{O}_M$). Siano E, F due fibrati vettoriali e siano $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ i fasci delle loro sezioni olomorfe. Sia $\varphi : E \to F$ un morfismo di fibrati vettoriali. Si definisce allora un morfismo di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ nel modo seguente: se $f \in \mathcal{E}(U)$ allora $f : U \to E$ è una sezione e $\varphi \circ f$ è una sezione di F su U, ovvero $\widetilde{\varphi}_U(f) := \varphi \circ f \in \mathcal{F}(U)$.

LEMMA 4.1. *Se $\varphi : E \to F$ è iniettivo, allora $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è iniettivo. Se $\varphi : E \to F$ è suriettivo, allora $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è suriettivo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta provare il corrispondente risultato per ogni $x \in M$. Supponiamo prima φ iniettivo. Dunque se $\widetilde{\varphi}_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x$ è tale che $\widetilde{\varphi}_x(f_x) = 0$, allora esiste un intorno $U \ni x$ e $f \in \mathcal{E}(U)$ tale che $\widetilde{\varphi}(f) = 0$, ovvero, per definizione, $\widetilde{\varphi}(f) = \varphi \circ f : U \to F$ è la sezione nulla. Dunque per ogni $y \in U$ si ha $\varphi(y)f(y) = 0$, essendo $\varphi(y)$ iniettiva, si ha $f(y) = 0$ per ogni $y \in U$, ovvero $f_x = 0$.

Sia ora φ suriettiva. Sia $g_x \in \mathcal{F}_x$. Sia U una carta trivializzante per E e F che contiene x. A meno di restringere U, si può supporre che esista $g \in \mathcal{F}(U)$ tale che g_x sia il germe di g in x. Passando a coordinate locali, si può scrivere su U, $\varphi : (y, v) \to (y, A(y)v)$ dove v è un vettore e A una matrice con coefficienti olomorfi, suriettiva per ipotesi. Se in tali carte, $g(y) = (y, w(y)) \in U \times \mathbb{C}^k$, si ha che (per il teorema della funzione implicita) l'equazione

$A(y)v = w(y)$ ha una soluzione olomorfa $y \mapsto v(y)$ in un intorno di x. Dunque esiste un intorno V di x e una sezione $f \in \mathcal{E}(V)$ tale che $\widetilde{\varphi}_V(f) = g_V$ e pertanto $\widetilde{\varphi}_x(f_x) = g_x$ e $\widetilde{\varphi}$ è suriettiva. $\square$

ESERCIZIO 4.2. Provare che, se

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

è una successione esatta di fibrati vettoriali, allora

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

è una successione esatta di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente liberi.

Vediamo ora cosa accade se $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è un morfismo di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente liberi, ovvero fasci di sezioni olomorfe dei fibrati olomorfi E ed F rispettivamente. Sia $\mathcal{M}_x$ l'ideale massimale in $\mathcal{O}_{M,x}$ dato dai germi f_x tali che la valutazione $f_x(x) = 0$. Allora $\mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$ è uno spazio vettoriale finito dimensionale su $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{M,x}/\mathcal{M}_x$. Se $f \in \mathcal{E}(U)$, allora la sua valutazione $f_x(x) \in E_x$, dunque $E_x = \mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$. Si definisce pertanto $\varphi : E \to F$ nel modo seguente. Sia $a \in E_x$. Dunque esiste un intorno U di x e $f \in \mathcal{E}(U)$ tali che $a = [f_x]$, dove $[f_x]$ rappresenta la classe di f_x in $\mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x$. Pertanto si definisce

$$\varphi(x)a := [\widetilde{\varphi}_x(f_x)] \in \mathcal{F}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{F}_x = F_x. \tag{4.1}$$

Si osservi che $\varphi(x)$ è ben definita per la $\mathcal{O}_{M,x}$-linearità di $\widetilde{\varphi}_x$. Si vede facilmente che φ è un morfismo di fibrati vettoriali complessi.

ESEMPIO 4.3. Se $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è un morfismo di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli iniettivo, $\varphi : E \to F$ *non* è in genere iniettivo. Sia $\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_\mathbb{C} \to \mathcal{O}_\mathbb{C}$ definito da $\widetilde{\varphi}_U(f) := zf$ per ogni $f \in \mathcal{O}_\mathbb{C}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\mathbb{C} \xrightarrow{z\cdot} \mathcal{O}_\mathbb{C}$$

è iniettivo come morfismo di fasci. Il fibrato banale $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ è il fibrato le cui sezioni sono $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ (perché è globalmente libero di rango 1). Il morfismo associato $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ è definito da

$$\varphi(z, v) := (z, zv),$$

dunque $\varphi(0, v) = (0, 0)$, ovvero φ non è iniettivo in $z = 0$. Si noti che, posto $\mathcal{Q} := \mathcal{O}_\mathbb{C}/z\mathcal{O}_\mathbb{C}$ il fascio (di $\mathcal{O}_\mathbb{C}$-moduli) quoziente, la successione di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\mathbb{C} \xrightarrow{z\cdot} \mathcal{O}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{Q} \to 0$$

è esatta, ma $\mathcal{Q}$ *non* è localmente libero. Infatti $\mathcal{Q}_z = 0$ per $z \neq 0$ e $\mathcal{Q}_0 = \mathbb{C}$.

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morfismo iniettivo di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente liberi. Sia $\mathcal{Q} := \mathcal{F}/\widetilde{\varphi}(\mathcal{E})$. Sia $x \in M$. Allora $\varphi(x) : E_x \to F_x$ è iniettivo come morfismo di fibrati vettoriali se e solo se $\mathcal{Q}_x$ è un $\mathcal{O}_{M,x}$-modulo libero.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{Q}_x$ è libero, allora per la Proposizione 1.5 la successione esatta di $\mathcal{O}_{M,x}$-moduli

$$0 \to \mathcal{E}_x \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{Q}_x \to 0$$

spezza. Per il Lemma 1.4 esiste un morfismo di $\mathcal{O}_{M,x}$-moduli $\tilde{h} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{E}_x$ tale che $\tilde{h} \circ \widetilde{\varphi}_x = \mathsf{id}$. Il morfismo $\tilde{h}$ definisce una applicazione lineare $h : F_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{F}_x \to \mathcal{E}_x/\mathcal{M}_x\mathcal{E}_x = E_x$ che verifica $h \circ \varphi(x) = \mathsf{id}$. Da cui segue che $\varphi(x)$ è iniettiva.

Viceversa, se φ è iniettiva in x, lo è in un intorno U di x. Pertanto $\mathsf{Im}(\varphi|_U)$ è un sottofibrato di $F|_U$ e dunque $F|_U/\mathsf{Im}(\varphi|_U)$ è un fibrato vettoriale su U il cui fascio delle sezioni è $\mathcal{Q}|_U$, che è dunque localmente libero su U e in particolare $\mathcal{Q}_x$ è libero. □

OSSERVAZIONE 4.5. Dalla (4.1) segue subito che se $\widetilde{\varphi} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ è un morfismo di fasci di $\mathcal{O}_M$-moduli liberi suriettivo, allora $\varphi : E \to F$ è suriettivo come morfismo di fibrati vettoriali.

4.1. Spezzamento. Sia M una varietà (reale o complessa). Sia $\mathcal{R}$ un fascio di anelli commutativi con unità su M. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{E}, \mathcal{G}$ tre fasci di $\mathcal{R}$-moduli su M.

DEFINIZIONE 4.6. La successione esatta corta di fasci di $\mathcal{R}$-moduli

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

spezza se esiste un morfismo di fasci di $\mathcal{R}$-moduli $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tale che $f \circ \alpha = \mathsf{id}_{\mathcal{F}}$.

Poiché il limite diretto è un funtore esatto e l'esattezza di una successione di $\mathcal{R}$-moduli è equivalente all'esattezza su ciascuna fibra (Proposizione 3.12), per il Lemma 1.4 si ha:

LEMMA 4.7. *Sono equivalenti:*

(1) *La successione* (4.2) *spezza.*
(2) *Esiste un morfismo di fasci di $\mathcal{R}$-moduli $g : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ tale che $\beta \circ g = \mathsf{id}_{\mathcal{G}}$.*
(3) *Esiste un isomorfismo di fasci di $\mathcal{R}$-moduli $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ e il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathsf{id}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathsf{id}}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ è l'inclusione naturale e $\pi : \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ è la proiezione naturale.

ESERCIZIO 4.8. Se $\mathcal{G}$ è localmente $\mathcal{R}$-libero allora la successione esatta corta (4.2) spezza localmente, ovvero esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M tale che la restrizione della successione ad ogni U_α spezza.

Le stesse definizioni si possono dare ovviamente nel caso di fibrati vettoriali.

COROLLARIO 4.9. *Siano F, E, G dei fibrati vettoriali su M. Se*

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

è una successione esatta corta di fibrati vettoriali allora spezza localmente, ovvero, esiste un ricoprimento $\{U_j\}$ di M tale che

$$0 \to F|_{U_j} \to E|_{U_j} \to G|_{U_j} \to 0$$

spezza per ogni j.

DIMOSTRAZIONE. La successione esatta corta di fibrati vettoriali determina una successione esatta corta di fasci (delle sezioni dei fibrati) di $\mathcal{R}$-moduli localmente liberi (con $\mathcal{R} = C^\infty_M, \mathcal{O}_M$ a secondo della categoria). Per l'esercizio precedente la successione di fasci spezza localmente e dunque spezza localmente la successione di fibrati. □

ESEMPIO 4.10. In generale, anche se $\mathcal{G}$ è $\mathcal{R}$-libero la successione esatta corta (4.2) *non* spezza (questo è conseguenza della nozione di "suriettività" tra fasciche non implica suriettività a livello di sezioni globali). Infatti, si assuma che $0 \to F \to E \to G \to 0$ sia una successione esatta corta di fibrati vettoriali olomorfi con G di rango uno, che non spezza (come vedremo questo è possibile solo nella categoria olomorfa). Tensoriziamo con G^*. Allora si ottiene una successione esatta corta $0 \to F \otimes G^* \to E \otimes G^* \to G \otimes G^* \to 0$ in cui l'ultimo fibrato è banale, ovvero globalmente $\mathcal{O}_M$-libero. Se tale successione spezza, tensorizzando di nuovo con G si ottiene che anche la successione iniziale spezza, contro l'ipotesi.

5. Operazioni sui fasci

In questa sezione $\mathcal{R}$ è un fascio di anelli commutativi con unità.

5.1. Somma diretta. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di $\mathcal{R}$-moduli su uno spazio topologico X. Allora si definisce il fascio *somma diretta* $\mathcal{F} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ tramite

$$\tau(X) \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{G}(U).$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{F} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ è un fascio di $\mathcal{R}$-moduli. Poiché il limite diretto commuta con la somma diretta, si ha inoltre che per ogni $x \in X$,

$$(\mathcal{F} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus_{\mathcal{R}_x} \mathcal{G}_x.$$

Pertanto, se

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli, allora per ogni $\mathcal{R}$-modulo $\mathcal{D}$ la successione di $\mathcal{R}$-moduli

$$0 \to \mathcal{F} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{D} \to \mathcal{G} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{D} \to \mathcal{H} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{D} \to 0$$

è esatta.

5.2. Hom. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci di $\mathcal{R}$-moduli su uno spazio topologico X. Si definisce un *prefascio* di $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ tramite

$$\tau(X) \ni U \mapsto \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) := \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U),$$

con mappe di restrizione date da

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U) \ni \{\varphi_W\}_{W\in\tau(U)} \mapsto \{\varphi_W\}_{W\in\tau(V)} \in \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}|_V}(\mathcal{F}|_V,\mathcal{G}|_V), \quad V \subseteq U.$$

Si noti bene che non si può definire un prefascio di morfismi tra due fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ di $\mathcal{R}$-moduli associando ad ogni aperto U gli $\mathcal{R}(U)$-morfismi da $\mathcal{F}(U)$ a $\mathcal{G}(U)$ perchè non sarebbero ben definite le mappe di restrizione.

PROPOSIZIONE 5.1. *Siano $\mathcal{F},\mathcal{G}$ due $\mathcal{R}$-moduli. Allora $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ è un fascio di $\mathcal{R}$-moduli.*

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ soddisfa alla proprietà **S1**. Sia $U \in \tau(X)$ e sia $\{U_j\}$ un ricoprimento aperto di U. Sia $\varphi \in \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ e supponiamo che $r_{UU_j}(\varphi) = 0$ per ogni j. Sia $s \in \mathcal{F}(V)$ per qualche $V \subset U$. Allora $\varphi_V(s)$ ha la proprietà che $r_{VV\cap U_j}(\varphi_V(s)) = 0$ per ogni j. Essendo $\mathcal{G}$ un fascio, questo implica che $\varphi_V(s) = 0$. Per l'arbitrarietà della sezione questo implica che $\varphi = 0$.

Proviamo adesso che $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ soddisfa alla proprietà **S2**. Sia $U \in \tau(X)$ e sia $\{U_j\}$ un ricoprimento aperto di U. Sia $\{\varphi_j\}$ una famiglia tale che $\varphi_j \in \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_j)$ e $r_{U_jU_j\cap U_i}(\varphi_j) = r_{U_iU_j\cap U_i}(\varphi_i)$ per ogni $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Definiamo $\varphi \in \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ nel modo seguente: se V è un aperto in U e $s \in \mathcal{F}(V)$, allora posto $s_j := r_{VV\cap U_j}(s)$, si ha che $\{\varphi_j(s_j)\}$ è una famiglia di sezioni di $\mathcal{G}$ su $V \cap U_j$ che coincidono nelle intersezioni $V \cap U_j \cap U_i$. Pertanto essendo $\mathcal{G}$ un fascio, si incollano ad una sezione su V che denotiamo $\varphi_V(s)$. $\square$

Sia $x \in X$. Per la proprietà universale del limite diretto il morfismo

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}|_U}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U) \ni \varphi \mapsto \varphi_x \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x)$$

definito per $U \in \tau_x(X)$, determina un morfismo di $\mathcal{R}_x$-moduli

$$(\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G}))_x \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{F}_x,\mathcal{G}_x).$$

Tale morfismo *non* è in genere né iniettivo né suriettivo.

Siano $\mathcal{F},\mathcal{F}',\mathcal{F}'',\mathcal{F}'''$ dei $\mathcal{R}$-moduli. Allora

(1) $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R},\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$
(2) $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}' \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{F}'',\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}',\mathcal{F}) \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}'',\mathcal{F})$,
(3) $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{F}' \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{F}'') \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{F}') \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{F}'')$,
(4) Se

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}'''$$

è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli, allora

$$0 \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{G},\mathcal{F}') \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{G},\mathcal{F}'') \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{G},\mathcal{F}''')$$

è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli.

(5) Se
$$\mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}''' \to 0$$
è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli, allora
$$0 \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}''', \mathcal{G}) \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}'', \mathcal{G}) \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}', \mathcal{G})$$
è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli.

(6) Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{R}$-modulo localmente libero allora $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \cdot)$ trasforma successioni esatte corte di $\mathcal{R}$-moduli in successioni esatte corte di $\mathcal{R}$-moduli.

(7) Se
$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}''' \to 0$$
è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli e $\mathcal{F}'''$ è localmente $\mathcal{R}$-libero allora per ogni $\mathcal{R}$-modulo $\mathcal{F}$ la successione
$$0 \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}''') \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'') \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \to 0$$
è esatta.

Le proprietà (4) e (5) si condensano nella frase $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}$ è un *funtore esatto a sinistra*.

Le precedenti proprietà sono conseguenza diretta delle analoghe proprietà per moduli su anelli e delle definizioni di fascio e la loro dimostrazione è lasciata come esercizio.

A titolo di esempio vediamo come provare la suriettività del morfismo $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'') \to \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ nella proprietà (7). Sia U un aperto in X e sia $\varphi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}')(U)$. Occorre trovare un ricoprimento aperto $\{U_j\}$ di U e sezioni $\phi_j \in \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ tali che $\phi_j \mapsto r_{UU_j}(\varphi)$ per ogni j. Dall'Esercizio 4.8 la successione esatta spezza localmente e dunque possiamo prendere $\{U_j\}$ un ricoprimento aperto di U su cui la restrizione della successione esatta spezza. Su ciascun U_j ragionando come in Proposizione 1.8 si ottiene allora la sezione ϕ_j cercata.

5.3. Prodotto tensore. Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di $\mathcal{R}$-moduli su uno spazio topologico X. Siano $r^{\mathcal{F}}_{UV}$ i morfismi di restrizione del fascio $\mathcal{F}$ e $r^{\mathcal{G}}_{UV}$ quelli del fascio $\mathcal{G}$. Il fascio associato al prefascio
$$\tau(X) \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{G}(U),$$
con le mappe di restrizione $r^{\mathcal{F}}_{UV} \otimes r^{\mathcal{G}}_{UV}$, si denota con $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ e si dice il *fascio prodotto tensore*.

Poiché il limite diretto di moduli commuta con il prodotto tensoriale (Proposizione 1.26) e le fibre di un prefascio sono le stesse del fascio associato, si ha
$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{G}_x, \tag{5.1}$$
per ogni $x \in X$.

Se $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ sono $\mathcal{R}$-moduli, si ha

(1) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}$,
(2) $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H} \simeq \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H})$,
(3) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} (\mathcal{G} \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{H}) \simeq (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}) \oplus_{\mathcal{R}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H})$,
(4) $\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$,
(5) $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \simeq \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{F}, \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{R}}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$,

(6) se $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}''' \to 0$ è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli, allora
$$\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}''' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to 0$$
è esatta,

(7) se $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F}''' \to 0$ è una successione esatta di $\mathcal{R}$-moduli e $\mathcal{F}$ è localmente $\mathcal{R}$-libero allora
$$0 \to \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}''' \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \to 0$$
è esatta.

Per dimostrare le proprietà precedenti, dati i morfismi naturali, per la (5.1) occorre e basta provare l'esattezza sulle fibre. Ma questa segue dalle analoghe proprietà per i moduli.

ESEMPIO 5.2. Sia S una sottovarietà regolare complessa di una varietà complessa M e sia $\mathcal{I}_S$ il fascio di ideali di S. Sia $\mathcal{O}_S := \mathcal{O}_M/\mathcal{I}_S$. Se $\mathcal{F}$ è un $\mathcal{O}_M$-modulo, allora $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{O}_S$ è un $\mathcal{O}_S$-modulo. In particolare se $\mathcal{F}$ è il fascio delle sezioni olomorfe di un fibrato vettoriale olomorfo F su M, allora $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{O}_S$ è il fascio delle sezioni olomorfe (su S) della restrizione $F|_S$ di F a S.

5.4. Immagine diretta. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici. Sia $\mathcal{F}$ un fascio su X. Allora si definisce un prefascio $f_*(\mathcal{F})$ su Y tramite
$$f_*(\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$
Si vede facilmente che $f_*(\mathcal{F})$ soddisfa **S1** e **S2** ed è dunque un fascio, che si chiama il fascio *immagine diretta*.

Se X è un chiuso in Y e $\iota : X \to Y$ è l'immersione naturale, allora $(\iota_*(\mathcal{F}))_x = \mathcal{F}_x$ se $x \in X$ e $(\iota_*(\mathcal{F}))_x = 0$ altrimenti.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{R}$-moduli su X, allora $f_*(\mathcal{F})$ è un fascio di $f_*(\mathcal{R})$-moduli su Y.

5.5. Immagine inversa. Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici. Sia $\mathcal{G}$ un fascio su Y. Si definisce un prefascio su X tramite
$$\tau(X) \ni U \mapsto \varinjlim \mathcal{G}(V),$$
dove il limite diretto è fatto su tutti gli aperti V tali che $f(U) \subset V$ (e questo è in modo naturale un insieme di indici filtrante dove si ponga $V \leq V'$ se $f(U) \subset V' \subset V$).

Il fascio associato a tale prefascio si chiama il fascio *immagine inversa* e si indica con $f^{-1}(\mathcal{G})$.

ESEMPIO 5.3. Sia $p \in X$ e sia $t : X \to \{p\}$ data da $t(x) \equiv p$. Allora il fascio delle funzioni localmente costanti $K_{\mathbb{N}}$ è dato da $t^{-1}(\mathbb{N})$, dove $\mathbb{N}$ è il "fascio" su $\{p\}$ definito da $\mathbb{N}(\{p\}) = \mathbb{N}$.

Se $\mathcal{F}$ è un fascio di $\mathcal{R}$-moduli su Y, allora $f^{-1}(\mathcal{F})$ è un fascio di $f^{-1}(\mathcal{R})$-moduli su X.

Se X è un sottospazio topologico di Y, e $\iota : X \to Y$ è la naturale immersione $\iota(p) = p$, dato un fascio $\mathcal{F}$ su Y si definisce il *fascio restrizione*
$$\mathcal{F}|_X := \iota^{-1}(\mathcal{F}).$$

6. Fasci di moduli coerenti

1-fibre di $\mathcal{H}$om
2-coerenza dei tre
3-cenni su fasci analitici coerenti (teoremi A e B di Cartan)

7. Coomologia di Čech di fasci su spazi paracompatti

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani (rispetto alla operazione di somma) su uno spazio topologico paracompatto, di Hausdorff X e sia $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X localmente finito. Si definisce

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_\alpha \mathcal{F}(U_\alpha), \\
\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_{\alpha_0,\alpha_1} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}), \\
&\vdots \\
\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &:= \prod_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p})
\end{aligned}$$

Un elemento di $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è il dato di una famiglia $\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}$ di sezioni di $\mathcal{F}$ su $U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}$ al variare di tutti gli indici. I $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sono dei gruppi abeliani rispetto alla somma delle componenti.

Si osservi che, per definizione, non si esclude che qualche indice in $\mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p})$ sia uguale all'altro. Per comodità di notazione, invece di denotare con $r_{UV}(f)$ la restrizione di un elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ a $V \subset U$, scriveremo semplicemente $f|_V$.

Un elemento di $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è detto una *p-cocatena* di $\mathcal{F}$. Si definisce un *operatore di cobordo* $\delta^{p+1} : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tramite

$$\delta^{p+1}(\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}) := \{\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f_{\alpha_0\ldots\hat{\alpha}_j\ldots\alpha_{p+1}}|_{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_{p+1}}}\},$$

dove abbiamo usato la notazione $f|_V := r_{UV}(f)$ se $f \in \mathcal{F}(U)$ e $V \subset U$.

In particolare, se $\{f_\alpha\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, si ha

$$\delta^1(\{f_\alpha\})_{\alpha\beta} = \{f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} - f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}\},$$

mentre, se $\{f_{\alpha\beta}\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, si ha

$$\delta^2(\{f_{\alpha\beta}\})_{\alpha\beta\gamma} = \{f_{\alpha\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} - f_{\alpha\gamma}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma} + f_{\beta\gamma}|_{U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma}\}.$$

Si osservi che, avendo scelto di considerare anche indici uguali nella definizione delle cocatene, risulta che se $\delta^2(\{f_{\alpha\beta}\}) = 0$ allora $f_{\alpha\alpha} = 0$ (l'elemento identità), $f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha}$ (ovvero $f_{\alpha\beta}$ è l'elemento inverso di $f_{\beta\alpha}$).

LEMMA 7.1. *Sia ha $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ per ogni $p \in \mathbb{N}$.*

DIMOSTRAZIONE. È un calcolo diretto, lasciato per esercizio. □

DEFINIZIONE 7.2. Gli elementi di $\ker \delta^{p+1}$ si dicono *p-cocicli* mentre gli elementi di $\mathsf{Im}\, \delta^p$ si dicono *p-cobordi*.

DEFINIZIONE 7.3. La coomologia del complesso coomologico $\{\mathcal{C}^\bullet, \delta^\bullet\}$ si denota $\check{H}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e si chiama *coomologia di $\check{C}$ech di $\mathcal{F}$ relativa al ricoprimento $\mathcal{U}$*.

Si osservi che $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, ovvero sono le sezioni globali di $\mathcal{F}$ su X. Infatti se $\{f_\alpha\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e se $\delta^1(\{f_\alpha\}) = 0$, significa che $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ per ogni α, β e pertanto, essendo $\mathcal{F}$ un fascio, esiste $f \in \mathcal{F}(X)$ tale che $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. Pertanto,

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$$
$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathsf{Ker}\delta^{p+1}/\mathsf{Im}\delta^p, \quad p \geq 1.$$

Nel seguito, quando non sia necessario, scriveremo solo δ invece di δ^p.

Se $\mathcal{U}' = \{U'_\beta\}_{\beta \in I'}$ è un raffinamento di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, scriviamo $\mathcal{U}' \prec \mathcal{U}$. Sia $\varphi : I' \to I$ tale che $U'_\beta \subset U_{\varphi(\beta)}$. Allora è ben definito un morfismo di gruppi abeliani

$$\rho^p_\varphi : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$$

dato da

$$\rho^p_\varphi(\{f_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\})_{\beta_0 \ldots \beta_p} = \{f_{\varphi(\beta_0) \ldots \varphi(\beta_p)}|_{U'_{\beta_0} \cap \ldots \cap U'_{\beta_p}}\}.$$

Per definizione, risulta che $\delta \circ \rho_\varphi = \rho_\varphi \circ \delta$ e dunque ρ_φ è un morfismo di complessi coomologici e pertanto induce un morfismo in coomologia

$$\rho : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F}), \quad p \geq 0,$$

si può provare che tale morfismo non dipende dalla mappa φ scelta.

DEFINIZIONE 7.4. La coomologia (di $\check{C}$ech) su X del fascio $\mathcal{F}$ è data dal limite diretto rispetto al raffinamento di ricoprimenti,

$$H^p(X, \mathcal{F}) := \varinjlim \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad p \geq 0.$$

Dunque per ogni ricoprimento $\mathcal{U}$ esiste un morfismo di gruppi $\Phi_\mathcal{U} : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$. In particolare, se $\sigma \in H^p(X, \mathcal{F})$ esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_j\}$ di X e $\{g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tale che $[\{g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\}] \in \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ viene mandato in σ dal morfismo $\Phi_\mathcal{U}$.

TEOREMA 7.5. *Sia M una varietà complessa. Allora il gruppo abeliano $(H^1(M, \mathcal{O}^*_M), \cdot)$ e il gruppo abeliano di Picard di M $(\mathsf{Pic}(M), \otimes)$ sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\sigma \in H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$ allora esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*_M(U_\alpha \cap U_\beta)$ tali che σ è rappresentato da $\{g_{\alpha\beta}\}$ in $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*_M)$ e $\delta(\{g_{\alpha\beta}\}) = 0$. Il fascio di gruppi abeliani $\mathcal{O}^*_M$ è fascio di gruppi rispetto alla operazione di prodotto e la condizione $\delta(\{g_{\alpha\beta}\}) = 0$ significa che $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = \mathsf{id}$ su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, ovvero $\{g_{\alpha\beta}\}$ soddisfa le identità di cociclo e dunque dà luogo ad un fibrato lineare L^*. Se $\{g'_{\alpha\beta}\}$ è un altro rappresentate di σ che determina il fibrato lineare L'^*, si può supporre a meno di passare ad un raffinamento comune che sia definito in $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*_M)$. Dunque esiste $f_\alpha \in \mathcal{O}^*_M(U_\alpha)$ per ogni α tale che

$$\delta(\{f_\alpha\}) = \{g_{\alpha\beta}\}(\{g'_{\alpha\beta}\})^{-1}.$$

Questa relazione significa

$$\frac{f_\beta}{f_\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \frac{g_{\alpha\beta}}{g'_{\alpha\beta}},$$

e dunque le $\{f_\alpha\}$ determinano un isomorfismo di fibrati lineari tra L^* e L'^* per la (2.1) del Capitolo 2.

Viceversa, se $\{L\}$ è un fibrato su M, le sue funzioni di transizione determinano un elemento $\sigma_L^{-1} \in H^1(M, \mathcal{O}^*_M)$ e, come sopra, se L' è isomorfo a L, risulta $\sigma_L^{-1} = \sigma_{L'}^{-1}$. Essendo le funzioni di transizione di $L \otimes L'$ il prodotto delle funzioni di transizione di L con quelle di L', la corrispondenza risulta un isomorfismo di gruppi con le rispettive operazioni. □

ATTENZIONE: Si osservi che abbiamo scelto di far corrispondere al fibrato L con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ l'elemento σ_L rappresentato dagli uno-cocicli $\{g_{\beta\alpha}\}$. In altri termini, in tal modo è come se considerassimo $\mathsf{Pic}(M)$ il gruppo dei fibrati lineari e $(H^1(M, \mathcal{O}^*_M), \cdot)$ il gruppo dei fasci delle loro sezioni.

OSSERVAZIONE 7.6. Con una prova analoga alla prova del Teorema 10.1 si dimostra che $(H^1(M, (C^\infty_M)^*), \cdot)$ è isomorfo al gruppo dei fibrati vettoriali complessi con fibra di rango complesso uno a meno di equivalenze di classe C^∞.

Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ due fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X. Sia $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci. Sia $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di X. Poiché $r^{\mathcal{G}}_{UV} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ r^{\mathcal{F}}_{UV}$ per ogni $U, V \in \tau(X)$, si verifica facilmente che il morfismo $\widetilde{\varphi}^p : \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, definito tramite $\widetilde{\varphi}^p(\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}\} := \{\varphi_{U_{\alpha_0}\cap\ldots\cap U_{\alpha_p}}(f_{\alpha_0\ldots\alpha_p})\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ per $\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, è tale che

$$\widetilde{\varphi}^{p+1} \circ \delta^p = \delta^{p+1} \circ \widetilde{\varphi}^p.$$

Pertanto φ definisce un morfismo di gruppi abeliani

$$\varphi^p_{\mathcal{U}} : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}).$$

Inoltre, se $\mathcal{U}'$ è un raffinamento di $\mathcal{U}$ e $\rho : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ è il morfismo indotto, si vede facilmente che $\varphi^p_{\mathcal{U}'} \circ \rho = \rho \circ \varphi^p_{\mathcal{U}}$ e dunque è determinato un morfismo di gruppi abeliani

$$\varphi^p : H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{G}).$$

Si noti che, per costruzione:

(1) $\varphi^0 = \varphi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$,
(2) se $\varphi = \mathsf{id}$ allora $\varphi^p = \mathsf{id}$ per ogni $p \geq 0$,
(3) se $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ è un altro morfismo di fasci, allora $\psi^p \circ \varphi^p = (\psi \circ \varphi)^p$ per ogni $p \geq 0$.

TEOREMA 7.7. *Sia X uno spazio topologico paracompatto e di Hausdorff. Sia $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X. Allora esiste una successione esatta lunga di gruppi abeliani*

$$\ldots \longrightarrow H^p(X,\mathcal{E}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^{p+1}(X,\mathcal{E}) \longrightarrow \ldots$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.15, per ogni ricoprimento $\mathcal{U}$ di X e per ogni $p \in \mathbb{N}$, la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$$

è esatta. Se l'ultimo omomorfismo fosse suriettivo, utilizzando il Lemma del Serpente 5.9 del Capitolo 3 si otterrebbe il risultato voluto. In generale però l'ultimo omomorfismo non è suriettivo. Per ovviare a questo, utilizzando la paracompattezza, si prova che dato $\sigma \in H^p(X,\mathcal{G})$ esistono un ricoprimento $\mathcal{U}$ di X e $\{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ tale che $\sigma = \Phi_{\mathcal{U}}[\{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}]$ ed esiste $\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ tale che $f_{\alpha_0\ldots\alpha_p} \mapsto g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}$ per ogni $\alpha_0,\ldots,\alpha_p$. Una volta che questo è provato, ragionando come nel Lemma del Serpente 5.9 del Capitolo 3 si ottiene l'asserto.

Per ottenere il ricoprimento $\mathcal{U}$ e il cociclo $\{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ come sopra, si parte da un ricoprimento localmente finito $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ di X e da un cociclo $\{g'_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}',\mathcal{G})$ che rappresenta σ. Per la paracompattezza, per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x tale che U_x è contenuto in un numero finito di U'_α. Poiché solo un numero finito di U'_α contengono x, a patto di cambiare U_x con $U_x \cap \bigcap_{\alpha:x\in U'_\alpha} U'_\alpha$ possiamo scegliere U_x in modo che se $x \in U'_\alpha$ allora $U_x \subset U_\alpha$.

A meno di restringere U_x possiamo anche assumere che $g'_{\alpha_0\ldots\alpha_p}|_{U_x\cap U'_{\alpha_0}\cap\ldots U'_{\alpha_p}}$ abbia una preimmagine in $\mathcal{F}(U_x)$ per ogni $x \in X$ ogni qual volta $U_x \cap U'_{\alpha_0} \cap \ldots U'_{\alpha_p} \neq \emptyset$ (poiché tale condizione è soddisfatta solo da un numero finito di indici).

Scegliamo una funzione $\varphi : X \to I$ tale che $x \in U'_{\varphi(x)}$ per ogni $x \in X$. Allora $\mathcal{U} := \{U_x\}$ è un raffinamento di $\mathcal{U}'$. L'immagine di $\{g'_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}$ in $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ è il cociclo $\{g_{x_0\ldots x_p}\}$ cercato. $\square$

OSSERVAZIONE 7.8. Con le notazioni della proposizione precedente, si osservi che se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X tale che

$$0 \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to 0$$

è esatta per ogni $p \geq 0$, allora si ha una successione esatta lunga

$$\ldots \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{E}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{G}) \longrightarrow \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{E}) \longrightarrow \ldots$$

DEFINIZIONE 7.9. Se E è un fibrato vettoriale su una varietà M si definisce per $j \geq 0$

$$H^j(M,E) := H^j(M,\mathcal{E})$$

dove $\mathcal{E}$ indica il fascio delle sezioni di E.

8. Il teorema di de Rham astratto

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico paracompatto e di Hausdorff X.

DEFINIZIONE 8.1. Una *risoluzione* di $\mathcal{F}$ è il dato di una famiglia di fasci di gruppi abeliani $\{\mathcal{F}^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ su X per cui esistano dei morfismi di fasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0$ e $\varphi^j : \mathcal{F}^j \to \mathcal{F}^{j+1}$ per ogni $j \geq 0$, tali che la successione

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{F}^2 \dots \tag{8.1}$$

sia esatta.

Se $H^k(X, \mathcal{F}^j) = 0$ per ogni $j \geq 0$ e $k \geq 1$ si dice che la risoluzione (8.1) è una *risoluzione aciclica* di $\mathcal{F}$.

Data una risoluzione di $\mathcal{F}$ come in (8.1), si ha un complesso di coomologia (non esatto in genere) dato da

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\varphi^0_X} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\varphi^1_X} \mathcal{F}^2(X) \dots \tag{8.2}$$

Si osservi che per la Proposizione 3.15, il morfismo $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{F}^0(X)$ è iniettivo e $\mathsf{Im}\, \varphi_X = \ker \varphi^0_X$, ma in generale la successione (8.2) non è esatta.

Indichiamo con $H^k(\mathcal{F}^\bullet)$ la coomologia del complesso coomologico

$$\mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\varphi^0_X} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\varphi^1_X} \mathcal{F}^2(X) \dots$$

Si noti che

$$H^0(\mathcal{F}^\bullet) = \mathsf{Ker}\varphi^0_X = \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F}).$$

ESEMPIO 8.2. Il complesso di de Rham è un esempio di risoluzione aciclica per il fascio $\mathbb{R}_M$ (o anche $\mathbb{C}_M$ considerando forme a coefficienti complessi).

TEOREMA 8.3 (de Rham astratto). *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X, spazio topologico paracompatto. Sia*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{F}^2 \dots$$

una risoluzione aciclica di $\mathcal{F}$. Allora per ogni $k \geq 0$ risulta

$$H^k(\mathcal{F}^\bullet) \simeq H^k(X, \mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema vale per $k = 0$ come già visto.

Sia $\mathcal{K}^i := \mathsf{Ker}(\varphi^i)$, per $i = 0, 1, \dots$. Allora la successione corta

$$0 \to \mathcal{K}^{i-1} \xrightarrow{\jmath} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{K}^i \to 0, \tag{8.3}$$

è esatta per $i \geq 1$ (essendo $\jmath : \mathcal{K}^{i-1} \to \mathcal{F}^{i-1}$ l'immersione canonica).

Per definizione

$$H^i(\mathcal{F}^\bullet) = \frac{\mathsf{Ker}(\varphi^i_X)}{\mathsf{Im}(\varphi^{i-1}_X)} = \frac{\mathcal{K}^i(X)}{\mathsf{Im}(\varphi^{i-1}_X)} = \frac{H^0(X, \mathcal{K}^i)}{\mathsf{Im}(\varphi^{i-1}_X)}.$$

Inoltre

$$\mathsf{Im}(\varphi_X^{i-1}) = \mathsf{Im}(\mathcal{F}^{i-1}(X) \to \mathcal{K}^i(X)) = \mathsf{Im}(H^0(X,\mathcal{F}^{i-1}) \to H^0(X,\mathcal{K}^i)),$$

da cui

$$H^i(\mathcal{F}^\bullet) = \frac{H^0(X,\mathcal{K}^i)}{\mathsf{Im}(H^0(X,\mathcal{F}^{i-1}) \to H^0(X,\mathcal{K}^i))} \tag{8.4}$$

Per il Teorema 7.7 la (8.3) induce una successione esatta lunga in coomologia:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{K}^{i-1}) \to H^0(X,\mathcal{F}^{i-1}) \to H^0(X,\mathcal{K}^i) \xrightarrow{\partial_1} H^1(X,\mathcal{K}^{i-1}) \to 0,$$

essendo $H^1(X,\mathcal{F}^{i-1}) = 0$ poiché la risoluzione è aciclica.

Pertanto dalla (8.4) si ottiene che la mappa γ_1^i indotta da ∂_1 è un isomorfismo:

$$H^i(\mathcal{F}^\bullet) = \frac{H^0(X,\mathcal{K}^i)}{\mathsf{Im}(H^0(X,\mathcal{F}^{i-1}) \to H^0(X,\mathcal{K}^i))} \xrightarrow{\gamma_1^i} H^1(X,\mathcal{K}^{i-1}).$$

Adesso per $2 \le r \le i$ si consideri la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{K}^{i-r} \xrightarrow{\jmath} \mathcal{F}^{i-r} \xrightarrow{\varphi^{i-r}} \mathcal{K}^{i-r+1} \to 0.$$

Questa induce una successione esatta lunga in coomologia (tenendo conto che la risoluzione è aciclica)

$$0 = H^{r-1}(X,\mathcal{F}^{i-r}) \to H^{r-1}(X,\mathcal{K}^{i-r+1}) \xrightarrow{\gamma_r^i} H^r(X,\mathcal{K}^{i-r}) \to H^r(X,\mathcal{F}^{i-r}) = 0,$$

dunque $\gamma_r^i : H^{r-1}(X,\mathcal{K}^{i-r+1}) \to H^r(X,\mathcal{K}^{i-r})$ è un isomorfismo.

Pertanto la composizione $\gamma_i := \gamma_i^i \circ \gamma_{i-1}^i \circ \ldots \circ \gamma_1^i$ è un isomorfismo

$$H^i(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\gamma_1^i} H^1(X,\mathcal{K}^{i-1}) \xrightarrow{\gamma_2^i} H^2(X,\mathcal{K}^{i-2}) \to \ldots \xrightarrow{\gamma_i^i} H^i(X,\mathcal{K}^0).$$

Ora, $\mathcal{K}^0 = \mathsf{Ker}(\varphi^0) = \mathcal{F}$, da cui

$$\gamma_i : H^i(\mathcal{F}^\bullet) \to H^i(X,\mathcal{F}),$$

è un isomorfismo. □

OSSERVAZIONE 8.4. Dalla dimostrazione del Teorema di de Rham astratto segue che se la risoluzione non è aciclica, esiste un morfismo $\gamma_i : H^i(\mathcal{F}^\bullet) \to H^i(M,\mathcal{F})$ che in generale non è però un isomorfismo.

9. Risoluzione canonica soft, teorema di Leray e successione di Meyer-Vietoris

DEFINIZIONE 9.1. Sia X uno spazio topologico paracompatto e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su M. Il *fascio $\mathcal{F}^{[0]}$ delle sezioni discontinue* di $\mathcal{F}$ è definito su un aperto $U \subset X$ tramite

$$\mathcal{F}^{[0]}(U) := \{f : U \to \bigcup_{x\in U} \mathcal{F}_x : f(x) \in \mathcal{F}_x\}.$$

Si noti che $\mathcal{F}^{[0]}$ è un fascio di gruppi abeliani e che $\mathcal{F}$ è un sottofascio di $\mathcal{F}^{[0]}$.

PROPOSIZIONE 9.2. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff X. Allora per ogni ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U}$ di X e per ogni $p \geq 1$ vale*

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{[0]}) = 0.$$

In particolare il fascio delle sezioni discontinue $\mathcal{F}^{[0]}$ è aciclico (ovvero $H^j(X, \mathcal{F}^{[0]}) = 0$ per ogni $j > 0$).

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X. Sia $\{T_\alpha\}$ una famiglia di insiemi (non aperti) tale che per ogni α si abbia $T_\alpha \subseteq U_\alpha$, che $T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset$ per $\alpha \neq \beta$ e che $X = \cup T_\alpha$. Sia $\rho_\alpha : X \to \mathbb{N}$ la funzione caratteristica di T_α.

Sia $\{g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{[0]})$ tale che $\delta(\{g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\}) = 0$. Possiamo estendere $g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}$ ad una sezione di $\mathcal{F}^{[0]}(X)$ ponendo $g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}(x) = 0$ per $x \notin U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_p}$. Poniamo allora

$$f_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}} := \sum_\beta \rho_\beta g_{\beta \alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}}.$$

Poichè il ricoprimento è localmente finito, la somma sopra è finita per ogni $x \in X$ e dunque $\{f_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}}\} \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{[0]})$. Si verifica direttamente che $\delta(\{f_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}}\}) = \{g_{\alpha_0 \ldots \alpha_p}\}$. Vediamolo per $p = 1$; omettendo di scrivere le restrizioni,

$$\delta(\{f_{\alpha_0}\})_{\alpha_0 \alpha_1} = f_{\alpha_1} - f_{\alpha_0} = \sum_\beta \rho_\beta (g_{\beta \alpha_1} - g_{\beta \alpha_0}) = g_{\alpha_0 \alpha_1} \sum_\beta \rho_\beta = g_{\alpha_0 \alpha_1},$$

come volevasi. □

Sia $\mathcal{Q}^0 := \mathcal{F}^{[0]}/\mathcal{F}$ e sia $\mathcal{F}^{[1]}$ il fascio delle sezioni discontinue di $\mathcal{Q}^0$. Sia poi $\mathcal{Q}^1 = \mathcal{F}^{[1]}/\mathcal{Q}^0$ e sia $\mathcal{F}^{[2]}$ il fascio delle sezioni discontinue di $\mathcal{Q}^1$ e cosi via. Dalle successioni esatte di fasci di gruppi abeliani

$$
\begin{gathered}
0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{[0]} \to \mathcal{Q}^0 \to 0, \\
0 \to \mathcal{Q}^0 \to \mathcal{F}^{[1]} \to \mathcal{Q}^1 \to 0 \\
\vdots \\
0 \to \mathcal{Q}^{p-1} \to \mathcal{F}^{[p]} \to \mathcal{Q}^p \to 0
\end{gathered}
$$

Si ottiene una successione esatta

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{[0]} \to \mathcal{F}^{[1]} \to \mathcal{F}^{[2]} \to \ldots \tag{9.1}$$

che, per la Proposizione 9.2 è una risoluzione aciclica di $\mathcal{F}$ (detta la *risoluzione canonica soft*).

Per il Teorema di de Rham astratto 8.3 si ha

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\mathcal{F}^{[\bullet]}). \tag{9.2}$$

DEFINIZIONE 9.3. Sia X uno spazio topologico paracompatto e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Sia $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X. Diciamo che $\mathcal{U}$

è *di Leray per* $\mathcal{F}$ (o $\mathcal{F}$*-aciclico*) se per ogni $m \geq 0$, per tutti gli indici $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ e per ogni $p \geq 1$ si ha

$$H^p(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}, \mathcal{F}) = 0.$$

Ricordiamo che, per definizione di coomologia di Čech, per ogni fascio di gruppi abeliani $\mathcal{G}$ su X esiste un omomorfismo di gruppi $\Phi^q_{\mathcal{U}} : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to H^q(X, \mathcal{G})$.

TEOREMA 9.4 (Leray). *Sia X uno spazio topologico paracompatto, sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X che è di Leray per $\mathcal{F}$. Allora per ogni $p \geq 0$,*

$$\Phi^p_{\mathcal{U}} : \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}),$$

è un isomorfismo.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la successione esatta di fasci di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{[0]} \to \mathcal{Q}^0 \to 0,$$

dove $\mathcal{F}^{[0]}$ è il fascio delle sezioni discontinue di $\mathcal{F}$.

Proviamo che $\mathcal{U}$ è di Leray per $\mathcal{Q}^0$. Infatti, restringendo la successione esatta all'aperto $V := U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}$ si ottiene una nuova successione esatta di fasci di gruppi abeliani e, passando alla successione esatta lunga in coomologia, si ha la successione esatta di gruppi abeliani per $p \geq 1$

$$0 \overset{\text{Prop. 9.2}}{=} H^p(V, \mathcal{F}^{[0]}) \to H^p(V, \mathcal{Q}^0) \to H^{p+1}(V, \mathcal{F}) \to H^{p+1}(V, \mathcal{F}^{[0]}) \overset{\text{Prop. 9.2}}{=} 0,$$

da cui $H^p(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}, \mathcal{Q}^0) \simeq H^{p+1}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}, \mathcal{F}) = 0$ per ipotesi e dunque $\mathcal{U}$ è di Leray per $\mathcal{Q}^0$.

Guardiamo adesso la successione esatta lunga in coomologia al livello $p = 0$, poiché $\mathcal{U}$ è di Leray per $\mathcal{F}$, si ha che

$$0 \to \mathcal{F}(U_0 \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}) \to \mathcal{F}^{[0]}(U_0 \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}) \to \mathcal{Q}^0(U_0 \cap \ldots \cap U_{\alpha_m}) \to 0$$

è esatta per ogni $m \geq 0$ e indici $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$. Pertanto per ogni $p \geq 0$ la successione

$$0 \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{[0]}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q}^0) \to 0$$

è esatta. Per l'Osservazione 7.8 si ha dunque una successione esatta lunga

$$\ldots \to \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}^{[0]}) \to \check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{Q}^0) \to \check{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \ldots \tag{9.3}$$

Per $p = 0$, come già visto, si ha

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \simeq \mathcal{G}(X) \simeq H^0(X, \mathcal{G}),$$

per ogni fascio $\mathcal{G}$ su X, e $\Phi^0_{\mathcal{U}}$ è chiaramente un isomorfismo.

Per $p = 1$, per la (9.3) e utilizzando la Proposizione 9.2, si ha il seguente diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^{[0]}) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\Phi^0_{\mathcal{U}}}\big\downarrow\simeq & & {\scriptstyle\Phi^0_{\mathcal{U}}}\big\downarrow\simeq & & {\scriptstyle\Phi^1_{\mathcal{U}}}\big\downarrow & & \\ H^0(X,\mathcal{F}^{[0]}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{9.4}$$

da cui segue che $\Phi^1_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F})$ è un isomorfismo.

Per $p \geq 2$, ragioniamo per induzione: supponiamo che per $p \geq 2$ e per ogni fascio di gruppi abeliani per cui $\mathcal{U}$ sia di Leray il teorema valga. Dal seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\Phi^p_{\mathcal{U}}}\big\downarrow\simeq & & {\scriptstyle\Phi^{p+1}_{\mathcal{U}}}\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^p(X,\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & H^{p+1}(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

segue che $\Phi^{p+1}_{\mathcal{U}} : \check{H}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^{p+1}(X,\mathcal{F})$ è un isomorfismo. □

OSSERVAZIONE 9.5. Sia X uno spazio topologico paracompatto e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Per *ogni* ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U}$ di X il morfismo

$$\Phi^1_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F})$$

è iniettivo. Infatti, con le notazioni del Teorema di Leray, a partire dalla successione esatta di complessi coomologici

$$0 \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}^{[0]}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0)$$

si ottiene la successione esatta di complessi coomologici

$$0 \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}^{[0]}) \to \mathcal{C}^p_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) \to 0,$$

dove $\mathcal{C}^p_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) \subset \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0)$ è il sottogruppo delle p-cocatene che sono immagini di p-cocatene di $\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}^{[0]})$. Allora, ponendo $\check{H}^\bullet_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0)$ la coomologia del complesso $\{\mathcal{C}^\bullet_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0),\delta^\bullet\}$, si ottiene una successione esatta lunga in coomologia, da cui, guardando i primi termini si ha il diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccc} \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}^{[0]}) & \longrightarrow & \check{H}^0_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle\Phi^0_{\mathcal{U}}}\big\downarrow\simeq & & {\scriptstyle\iota}\big\downarrow\subseteq & & {\scriptstyle\Phi^1_{\mathcal{U}}}\big\downarrow & & \\ H^0(X,\mathcal{F}^{[0]}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{Q}^0) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove $\iota : \check{H}^0_L(\mathcal{U},\mathcal{Q}^0) \to H^0(X,\mathcal{Q}^0)$ è l'immersione naturale. Da questo segue facilmente che $\Phi^1_{\mathcal{U}}$ è iniettiva.

TEOREMA 9.6 (Meyer-Vietoris). *Sia X uno spazio topologico paracompatto. Siano U, V due aperti di X tali che $X = U \cup V$. Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Allora la successione seguente è esatta:*

$$\ldots \to H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(U, \mathcal{F}|_U) \oplus H^p(V, \mathcal{F}|_V) \to H^p(U \cap V, \mathcal{F}|_{U\cap V}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \to \ldots$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{[0]} \to \mathcal{F}^{[1]} \to \ldots$ la risoluzione canonica soft di $\mathcal{F}$. Si considerino i complessi coomologici $\{\mathcal{F}^{[\bullet]}(X)\}$, $\{\mathcal{F}^{[\bullet]}(U) \oplus \mathcal{F}^{[\bullet]}(V)\}$, $\{\mathcal{F}^{[\bullet]}(U \cap V)\}$ definiti in precedenza. Per ogni $p \geq 0$ la successione di gruppi abeliani

$$0 \to \mathcal{F}^{[p]}(X) \xrightarrow{\theta^p} \mathcal{F}^{[p]}(U) \oplus \mathcal{F}^{[p]}(V) \xrightarrow{\eta^p} \mathcal{F}^{[p]}(U \cap V) \to 0$$

definita tramite $\theta^p(s) = (s|_U, s|_V)$ e $\eta^p(a, b) = a|_{U\cap V} - b|_{U\cap V}$ è esatta. Infatti, è chiaro che θ^p è iniettiva e che $\operatorname{Im}\theta^p = \ker \eta^p$ poiché $\mathcal{F}^{[p]}$ è un fascio. La suriettività di η^p segue dal fatto che ogni sezione di $\mathcal{F}^{[p]}(U \cap V)$ si estende (ponendo 0 fuori da $U \cap V$) ad una sezione di $\mathcal{F}^{[p]}(U)$.

Pertanto le $\theta^\bullet, \eta^\bullet$ determinano una successione esatta di complessi coomologici e per il Lemma del Serpente 5.9 del Capitolo 3 e per il Teorema di de Rham astratto 8.3 si ottiene il risultato. □

10. Applicazioni

10.1. Aciclicità dei fasci di C^∞-moduli.

TEOREMA 10.1. *Sia M una varietà (reale o complessa) e sia $\mathcal{F}$ un fascio di C^∞_M-moduli su M. Allora*

$$H^p(M, \mathcal{F}) = 0, \quad \textit{per } p > 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento localmente finito di M tale che ciascun U_α sia relativamente compatto in M e sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità associata. Sia $\{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\} \in \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tale che $\delta(\{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}) = 0$. Estendendo $\rho_\beta g_{\beta\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$ a 0 fuori dal supporto di ρ_β in $U_{\alpha_0} \cap \ldots U_{\alpha_{p-1}}$, si può pensare a $\rho_\beta g_{\beta\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}$ come una sezione C^∞ di $\mathcal{F}$ su $U_{\alpha_0} \cap \ldots U_{\alpha_{p-1}}$. Poniamo allora

$$f_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}} := \sum_\beta \rho_\beta g_{\beta\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}.$$

Poichè il ricoprimento è localmente finito, la somma sopra è finita per ogni $x \in M$ e dunque $\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}\} \in \mathcal{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Si verifica direttamente che $\delta(\{f_{\alpha_0\ldots\alpha_{p-1}}\}) = \{g_{\alpha_0\ldots\alpha_p}\}$. Vediamolo per $p = 1$; omettendo di scrivere le restrizioni,

$$\delta(\{f_{\alpha_0}\})_{\alpha_0\alpha_1} = f_{\alpha_1} - f_{\alpha_0} = \sum_\beta \rho_\beta(g_{\beta\alpha_1} - g_{\beta\alpha_0}) = g_{\alpha_0\alpha_1}\sum_\beta \rho_\beta = g_{\alpha_0\alpha_1},$$

come volevasi. □

10.2. Coomologia del fascio localmente costante. Sia M una varietà. Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ allora $H^p(M, \mathbb{K}_M) \simeq H^p(M, \mathbb{K})$ (dove $H^p(M, \mathbb{K})$ rappresenta il p-simo gruppo di coomologia simpliciale di M). In particolare, $H^p(M, \mathbb{K}_M)$ è un invariante topologico di M.

10.3. Successione esponenziale. Se M è una varietà, la successione esponenziale nella categoria C^∞ dà luogo ad una successione esatta lunga, di cui esaminiamo la parte:

$$H^p(M, C^\infty_M) \to H^p(M, (C^\infty_M)^*) \to H^{p+1}(M, \mathbb{Z}_M) \to H^{p+1}(M, C^\infty_M),$$

qui C^∞_M è il fascio delle funzioni C^∞ a valori complessi. Per il Teorema 10.1, per $p \geq 1$ si ha $H^p(M, C^\infty_M) = 0$. Dunque

$$H^p(M, (C^\infty_M)^*) \simeq H^{p+1}(M, \mathbb{Z}_M) \simeq H^{p+1}(M, \mathbb{Z}).$$

Per $p = 1$ risulta allora

$$H^1(M, (C^\infty_M)^*) \simeq H^2(M, \mathbb{Z}). \tag{10.1}$$

Poiché $H^1(M, (C^\infty_M)^*)$ rappresenta a meno di isomorfismi di classe C^∞ i fibrati vettoriali con fibra complessa e rango 1 (si veda l'Osservazione 7.6), si ha che

PROPOSIZIONE 10.2. *Sia M una varietà tale che $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$ (in particolare ciò è vero se M è contrattile). Allora ogni fibrato vettoriale con fibra complessa di rango uno è banale in modo C^∞.*

10.4. La prima classe di Chern di un fibrato lineare. Sia M una varietà complessa. Dalla successione esponenziale, si ha un morfismo $c_1 : \mathsf{Pic}(M) \to H^2(M, \mathbb{R})$ dato dalla composizione

$$c_1 : \mathsf{Pic}(M) \simeq H^1(M, \mathcal{O}^*_M) \to H^2(M, \mathbb{Z}_M) \to H^2(M, \mathbb{R}_M) \simeq H^2(M, \mathbb{R}).$$

DEFINIZIONE 10.3. L'immagine $c_1(L) \in H^2(M, \mathbb{R})$ si dice la *prima classe di Chern* del fibrato lineare L.

Si noti che, per definizione, $c_1 : \mathsf{Pic}(M) \to H^2(M, \mathbb{R})$ è un omomorfismo di gruppi abeliani, ovvero

$$c_1(L \otimes L') = c_1(L) + c_1(L').$$

PROPOSIZIONE 10.4. *Sia M una varietà complessa e sia $\mathcal{U} = \{U_j\}$ un ricoprimento di M tale che $U_j \cap U_k$ sia semplicemente connesso per ogni j, k. Sia L un fibrato lineare su M con funzioni di transizione $\{g_{jk}\}$. Allora $c_1(L)$ è rappresentato da $[\{z_{jkl}\}] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R}_M)$ con*

$$z_{jkl} = \frac{i}{2\pi}[(\log g_{jk})|_{U_j \cap U_k \cap U_l} - (\log g_{jl})|_{U_j \cap U_k \cap U_l} + (\log g_{kl})|_{U_j \cap U_k \cap U_l}],$$

dove log *indica una qualunque determinazione olomorfa del logaritmo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $U_j \cap U_k$ è semplicemente connesso, allora g_{jk} ammette un logaritmo (e questo è unico modulo $2\pi i \mathbb{Z}$).

Per la convenzione fatta nella scelta dell'isomorfismo tra $\mathsf{Pic}(M)$ e $H^1(M, \mathcal{O}_M)$, il fibrato L corrisponde alla classe $\sigma_L := [\{g_{jk}^{-1}\}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*_M)$.

Abbiamo $c_1(L) = \delta(\sigma_L)$, dove $\delta : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*) \to \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ è l'operatore costruito tramite la "caccia nel diagramma" come nel Lemma del Serpente 5.9 del Capitolo 3. Per costruzione:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M) \ni -\frac{1}{2\pi i}\log g_{jk} & \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} & \{g_{jk}^{-1}\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*) \to 0 \\ & & \downarrow & & \\ 0 \to \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z}_M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M) \ni \{z_{jkl}\} & & \end{array}$$

da cui segue il risultato. □

OSSERVAZIONE 10.5. Se M è una varietà è sempre possibile trovare un ricoprimento $\mathcal{U}$ tale che $U_j \cap U_k$ sia semplicemente connesso per ogni j, k.

10.5. Fibrati lineari, sezioni meromorfe e divisori di Cartier. Sia M una varietà complessa. Dalla successione esatta che definisce il fascio dei divisori, si ha il morfismo

$$H^0(M, \mathfrak{D}_M) \xrightarrow{\partial} H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{\chi} \mathsf{Pic}(M),$$

essendo χ un isomorfismo.

DEFINIZIONE 10.6. Se $D \in \mathfrak{D}_M(M)$ è un divisore di Cartier, si definisce

$$\mathcal{O}(D) := \chi(\partial(D)),$$

e si dice il fibrato lineare associato al divisore D.

Se D è un divisore di Cartier allora per definizione esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ di M e $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M^*(U_\alpha)$ tali che $m_\alpha/m_\beta \in \mathcal{O}_M^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Per la definizione di ∂, si verifica subito che $\partial(D)$ è rappresentato dalla classe $\{\frac{m_\beta}{m_\alpha}\}$ in $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)$, e per la definizione di χ, si ottiene che $\mathcal{O}(D)$ è il fibrato lineare su M che ha funzioni di transizione locali rispetto a $\mathcal{U}$ date da $\{\frac{m_\alpha}{m_\beta}\}$.

ESERCIZIO 10.7. Si verifichi che la precedente definizione coincide con la costruzione fatta nella Sezione 8.2 del Capitolo 2 per i divisori di Cartier effettivi.

Si osserva inoltre che due divisori D, D' danno luogo allo stesso fibrato lineare se e solo se esiste una sezione f su M di $\mathfrak{M}_M^*$ tale che $D - D' = (f)$, dove (f) indica il divisore su M determinato da f nel morfismo $H^0(M, \mathfrak{M}_M^*) \to H^0(M, \mathfrak{D}_M)$. Due divisori che danno luogo allo stesso fibrato lineare si dicono *linearmente equivalenti*.

DEFINIZIONE 10.8. Sia L un fibrato lineare su una varietà complessa M e sia $\mathcal{L}$ il fascio delle sezioni olomorfe di L. Una *sezione meromorfa globale* di L è un elemento $m \in H^0(M, \mathfrak{M}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{L}))$.

PROPOSIZIONE 10.9. *Sia L un fibrato lineare su M con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ relative ad un dato ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M trivializzante per L. Se $\{m_\alpha\}$ è una famiglia tale che $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha)$ e $m_\alpha = g_{\alpha\beta}m_\beta$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora $\{m_\alpha\}$ determina una sezione meromorfa globale $m(\{m_\alpha\})$ di L.*

Viceversa, se m è una sezione meromorfa globale di L, allora esistono un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M trivializzante per L e su cui L abbia funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, e $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha)$ tali che $m_\alpha = g_{\alpha\beta} m_\beta$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e si abbia $m(\{m_\alpha\}) = m$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M trivializzante per L con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ e sia $\{m_\alpha\}$ una famiglia tale che $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha)$ e $m_\alpha = g_{\alpha\beta} m_\beta$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Sia $\mathcal{L}$ il fascio delle sezioni olomorfe di L. Per ogni α siano $e_\alpha \in \mathcal{L}(U_\alpha)$ le sezione (mai nulle) di $L|_{U_\alpha}$ tali che (cfr. Osservazione 2.15) $e_\alpha = g_{\beta\alpha} e_\beta$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Per ogni α si ha che $m_\alpha \otimes e_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_M(U_\alpha)} \mathcal{L}(U_\alpha)$. Inoltre, poiché su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha

$$m_\alpha \otimes e_\alpha = m_\alpha \otimes (g_{\beta\alpha} e_\beta) = (g_{\beta\alpha} m_\alpha) \otimes e_\beta = m_\beta \otimes e_\beta,$$

le $\{m_\alpha \otimes e_\alpha\}$ definiscono un elemento di $(\mathfrak{M}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{L})(M) = H^0(M, \mathfrak{M}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{L})$ che denotiamo $m(\{m_\alpha\})$.

Viceversa, se $m \in H^0(M, \mathfrak{M}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{L}) = (\mathfrak{M}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{L})(M)$, per definizione esistono un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M e delle sezioni $v_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha) \otimes_{\mathcal{O}_M(U_\alpha)} \mathcal{L}(U_\alpha)$ tali che $v_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = v_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e $v_\alpha = m|_{U_\alpha}$. Si può supporre che $\{U_\alpha\}$ sia un aperto trivializzante per L con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$. Siano $e_\alpha \in \mathcal{L}(U_\alpha)$ le sezioni mai nulle tali che $e_\alpha = g_{\beta\alpha} e_\beta$. Allora possiamo scrivere $v_\alpha = m_\alpha \otimes e_\alpha$ per qualche $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha)$. Poiché $e_\alpha = g_{\beta\alpha} e_\beta$ e $m_\alpha \otimes e_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = m_\beta \otimes e_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, risulta $(m_\alpha - g_{\alpha\beta} m_\beta) \otimes e_\alpha = 0$ su $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e pertanto $m_\alpha = g_{\alpha\beta} m_\beta$. È infine chiaro dalla costruzione che $m = m(\{m_\alpha\})$ perché le loro restrizioni a U_α coincidono per ogni α. $\square$

PROPOSIZIONE 10.10. *Sia L un fibrato lineare su una varietà complessa M. Allora esiste un divisore di Cartier $D \in \mathfrak{D}_M(M)$ tale che $L = \mathcal{O}(D)$ se e solo se L ammette una sezione meromorfa globale m non identicamente nulla. Inoltre, D è effettivo se e solo se m è olomorfa.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $\iota : H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \to H^1(M, \mathfrak{M}_M^*)$ il morfismo naturale, dalla successione esatta lunga associata alla successione esatta corta che definisce il fascio dei divisori si ha la successione esatta

$$H^0(M, \mathfrak{D}_M) \xrightarrow{\chi \circ \partial} \mathsf{Pic}(M) \xrightarrow{\iota \circ \chi^{-1}} H^1(M, \mathfrak{M}_M^*).$$

Per l'esattezza della successione abbiamo che dato $L \in \mathsf{Pic}(M)$, $\iota(\chi^{-1}(L)) = 0$ se e solo se esiste $D \in H^0(M, \mathfrak{D}_M)$ tale che $\chi(\partial(D)) = L$—e dunque, per definizione $\mathcal{O}(D) = L$.

Esplicitiamo la condizione $\iota(\chi^{-1}(L)) = 0$ in $H^1(M, \mathfrak{M}_M^*)$. Se L è determinato dai cocicli $\{g_{\alpha\beta}\}$, allora $\chi^{-1}(L)$ è determinato da $[\{g_{\beta\alpha}\}] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_M^*)$ (essendo $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M trivializzante L). Dire che $\iota([\{g_{\beta\alpha}\}]) = 0 \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathfrak{M}_M^*)$ significa che esistono $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M^*(U_\alpha)$ tali che

$$\delta(\{m_\alpha\})_{\alpha\beta} := \frac{m_\beta}{m_\alpha}|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_{\beta\alpha}.$$

Pertanto il divisore $D \in H^0(M, \mathfrak{D}_M)$ tale che $\mathcal{O}(D) = L$ è definito dalle $\{m_\alpha\}$ e per la Proposizione 10.9 le $\{m_\alpha\}$ determinano una sezione globale meromorfa m di L non identicamente nulla. Si noti che m è olomorfa se e solo se D è effettivo.

Viceversa, se m è una sezione meromorfa di L, allora per la Proposizione 10.9 esistono un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M trivializzante per L e su cui L abbia funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, e $m_\alpha \in \mathfrak{M}_M(U_\alpha)$ tali che $m_\alpha = g_{\alpha\beta} m_\beta$ per ogni $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Pertanto se D è il divisore di Cartier definito da $\{m_\alpha\}$ risulta $\chi(\partial(D)) = L$, essendo $\partial(D)$ definito da $\{\frac{m_\beta}{m_\alpha}|_{U_\alpha \cap U_\beta}\}$. □

OSSERVAZIONE 10.11. Con le notazioni della Proposizione 10.9, sia $m = m(\{m_\alpha\})$ una sezione meromorfa globale non identicamente nulla di un fibrato lineare L. Sia $q \in \mathbb{Z}$. Si definisce allora una sezione meromorfa globale $m^{\otimes q}$ di $L^{\otimes q}$ (dove $L^{-1} = L^*$) tramite $m(m^{\otimes q}) := \{m_\alpha^q\}$. Il lettore verifichi che effettivamente tale definizione determina una sezione meromorfa globale di $L^{\otimes q}$.

ESEMPIO 10.12. Sia $U_0 = \{[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n : z_0 \neq 0\}$. Definiamo

$$s_0 : U_0 \to \mathcal{O}(-1)$$

tramite

$$s_0([z_0 : \ldots : z_n]) := ([z_0 : \ldots : z_n], (1, \frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0})).$$

Allora s_0 è una sezione olomorfa di $\mathcal{O}(-1)|_{U_0}$. Si provi che s_0 si estende ad una sezione meromorfa m di $\mathcal{O}(-1)$ su $\mathbb{CP}^n$ con poli di ordine uno sull'iperpiano $H = \{[z_0 : \ldots : z_n] : z_0 = 0\}$. Dunque $m^{\otimes -1}$ è una sezione olomorfa di $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^*$ e per quanto visto sopra il divisore associato è $[H]$. Pertanto otteniamo nuovamente che $\mathcal{O}([H]) = \mathcal{O}(1)$.

ESERCIZIO 10.13. Sia $p(z_0, \ldots, z_n)$ un polinomio omogeneo di grado $m \geq 1$. Provare che p definisce un divisore di Cartier effettivo S su $\mathbb{CP}^n$ supportato su $\{p = 0\}$. Provare poi che $f := \frac{z_0^m}{p(z)}$ è una funzione meromorfa globale di $\mathbb{CP}^n$ non identicamente nulla, ovvero un elemento di $H^0(\mathbb{CP}^n, \mathfrak{M}^*_{\mathbb{CP}^n})$. Dedurne che $m[H] - [S] = (f)$ in $H^0(\mathbb{CP}^n, \mathfrak{D}_{\mathbb{CP}^n})$, dove abbiamo indicato con (f) il divisore di Cartier associato ad f e con $m[H]$ il divisore di Cartier definito da $[H] + \ldots + [H]$, ovvero, dato da z_0^m. Da qui risulta che $\mathcal{O}(m) = \mathcal{O}(m[H]) = \mathcal{O}([S])$.

10.6. Il complesso di de Rham.

COROLLARIO 10.14. *Sia M una varietà reale. Allora per ogni $i = 0, 1, \ldots$ risulta*

$$H^i_{dR}(M) \simeq H^i(M, \mathbb{R}_M) \simeq H^i(M, \mathbb{R}).$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo isomorfismo segue dal Teorema di de Rham astratto applicato alla risoluzione aciclica del fascio localmente costante $\mathbb{R}_M$ data dal complesso di de Rham. Il secondo isomorfismo segue dalla Sezione 10.2. □

OSSERVAZIONE 10.15. Dal Corollario 10.14 segue che $H^i(M, \mathbb{R}_M)$ è un *invariante topologico* di una varietà reale M che può essere calcolato tramite metodi di geometria differenziale. In particolare, se M è un retratto (topologico) di deformazione di N, allora $H^i(M, \mathbb{R}) = H^i(N, \mathbb{R})$. Dunque, se M è contrattile, allora $H^i(M, \mathbb{R}_M) = 0$ per ogni $i \geq 1$.

10.7. Il complesso di Dolbeault. Sia M una varietà complessa. Il fascio delle sezioni del fibrato $\bigwedge^{p,q} M$ lo denotiamo $C_M^{\infty,(p,q)}$. Essendo fasci di C_M^∞-moduli, si ha $H^j(M, C_M^{\infty,(p,q)}) = 0$ per ogni $j > 0$ e per ogni p, q. Per il Lemma di Poincaré-Grothendieck 6.2 del Capitolo 3 abbiamo dunque una risoluzione aciclica

$$0 \to \mathcal{O}_M \to C_M^\infty = C_M^{\infty,(0,0)} \to C_M^{\infty,(0,1)} \to \dots C_M^{\infty,(0,2n)} \to 0$$

del fascio $\mathcal{O}_M$. Dunque per il Teorema di de Rham astratto si ha

TEOREMA 10.16 (Dolbeault). *Sia M una varietà complessa. Risulta per ogni $j \geq 0$*

$$H^j(M, \mathcal{O}_M) = H^j_{\bar\partial}(M).$$

10.8. Fibrati lineari, ipersuperfici e divisori su $\mathbb{C}^n$. Dal Lemma di Poincaré-Grothendieck 6.2 del Capitolo 3 e dal Teorema di Dolbeault 10.16 risulta

$$H^j(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0, \quad j \geq 1.$$

Dalla successione esponenziale passando alla successione esatta lunga in coomologia si ha

$$\mathsf{Pic}(\mathbb{C}^n) = H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}) = H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0,$$

ovvero ogni fibrato lineare su $\mathbb{C}^n$ è olomorficamente triviale.

Sia $D \subset \mathbb{C}^n$ un divisore di Cartier effettivo definito da un ricoprimento $\{U_j\}$ di $\mathbb{C}^n$ e da $f_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U_j)$. Allora esistono $f_{jk} : U_j \cap U_k \to \mathbb{C}^*$ olomorfe tali che $f_j/f_k = f_{jk}$ su $U_j \cap U_k$. Le $\{f_{jk}\}$ determinano un fibrato lineare $\mathcal{O}(D)$ che è banale per quanto appena visto; ovvero (a meno di passare ad un sottoricoprimento) esistono $g_j \in \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}(U_j)$ tali che $g_k/g_j = g_{jk}$ su $U_j \cap U_k$. Dunque

$$f_j/f_k = g_k/g_j \quad \text{in } U_j \cap U_k.$$

Ponendo $\tilde f_j := f_j g_j$, risulta che il divisore D è definito anche da $\{U_j, \tilde f_j\}$. Ma $\tilde f_j = \tilde f_k$ su $U_j \cap U_k$ e dunque esiste $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ tale che $f|_{U_j} = \tilde f_j$ e dunque D è definito da f su $\mathbb{C}^n$.

In particolare se Z è una sottovarietà regolare di $\mathbb{C}^n$ di codimensione 1, allora esiste una funzione olomorfa $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale che $Z = \{f = 0\}$.

In generale, dalla successione esatta corta che definisce il fascio dei divisori di Cartier $\mathfrak{D}_{\mathbb{C}^n}$ passando alla successione esatta lunga in coomologia si ha

$$H^0(\mathbb{C}^n, \mathfrak{D}_{\mathbb{C}^n}) \simeq H^0(\mathbb{C}^n, \mathfrak{M}^*_{\mathbb{C}^n})/H^0(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}).$$

Ovvero, ogni divisore D su $\mathbb{C}^n$ è definito da una sezione globale di $\mathfrak{M}^*_{\mathbb{C}^n}$.

10.9. Alcuni fatti—senza dimostrazione—sulla coomologia di $\mathbb{CP}^n$.

(1)

$$H^p(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 2k, 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(2)
$$H^p(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}) = \begin{cases} \mathbb{C} & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases}$$

(3) dalla successione esponenziale segue dunque $\mathsf{Pic}(\mathbb{CP}^n) \simeq \mathbb{Z}$, l'isomorfismo essendo dato dalla prima classe di Chern c_1 (a valori interi).
(4) L'algebra di coomologia $H^\bullet(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$ dove $h = c_1(\mathcal{O}(1))$.

Dai fatti precedenti segue che tutti e soli i fibrati lineari (a meno di isomorfismi di fibrati olomorfi) su $\mathbb{CP}^n$ sono i fibrati tautologici $\mathcal{O}(k)$.

Essendo $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}([H])$ il fibrato iperpiano, risulta che $\mathcal{O}(1)$ ha una sezione olomorfa globale s (che determina l'iperpiano H). Pertanto $\mathcal{O}(k)$ ha una sezione olomorfa globale $s^{\otimes k}$ per ogni $k \geq 0$ e $\mathcal{O}(-k)$ ha una sezione meromorfa globale $1/s^{\otimes k}$ per ogni $k < 0$.

In particolare, ogni fibrato lineare su $\mathbb{CP}^n$ ammette una sezione meromorfa e dunque per la Proposizione 10.10 è il fibrato associato ad un divisore. In altri termini
$$H^0(\mathbb{CP}^n, \mathfrak{D}_{\mathbb{CP}^n}) \to H^1(\mathbb{CP}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{CP}^n}) \to 0$$
è suriettiva.

10.10. Successioni esatte e spezzamento. Sia
$$0 \to F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \to 0$$
una successione esatta corta di fibrati vettoriali, che denotiamo con $\mathfrak{E}$, su una varietà M. Per la Proposizione 10.3 del Capitolo 2 è determinata una successione esatta corta di fibrati vettoriali
$$0 \to \mathsf{Hom}(G, F) \xrightarrow{\alpha\circ\cdot} \mathsf{Hom}(G, E) \xrightarrow{\beta\circ\cdot} \mathsf{Hom}(G, G) \to 0 \tag{10.2}$$
che determina una successione esatta lunga in coomologia (per i fasci delle rispettive sezioni). In particolare si ha il morfismo
$$\delta : H^0(M, \mathsf{Hom}(G, G)) \to H^1(M, \mathsf{Hom}(G, F)).$$

DEFINIZIONE 10.17.
$$a(\mathfrak{E}) := \delta(\mathsf{id}_G).$$

Vale allora il seguente teorema

TEOREMA 10.18 (Grothendieck). *Sia M una varietà e sia $\mathfrak{E}$ una successione esatta corta di fibrati vettoriali su M. Allora $\mathfrak{E}$ spezza se e solo se $a(\mathfrak{E}) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $a(\mathfrak{E}) = 0$. Allora per definizione $\delta(\mathsf{id}_G) = 0$. Dalla successione esatta lunga in coomologia
$$H^0(M, \mathsf{Hom}(G, E)) \to H^0(M, \mathsf{Hom}(G, G)) \to H^1(M, \mathsf{Hom}(G, F))$$
risulta che esiste $g \in H^0(M, \mathsf{Hom}(G, E))$ tale che $\beta \circ g = \mathsf{id}_G$ e dunque per il Lemma 4.7 la successione $\mathfrak{E}$ spezza.

Viceversa, se la successione $\mathfrak{E}$ spezza, allora esiste $g \in H^0(M, \mathsf{Hom}(G, E))$ tale che $\beta \circ g = \mathsf{id}_G$, dunque id_G appartiene all'immagine $H^0(M, \mathsf{Hom}(G, E)) \to H^0(M, \mathsf{Hom}(G, G))$ e pertanto $\delta(\mathsf{id}_G) = 0$, ovvero $a(\mathfrak{E}) = 0$. □

COROLLARIO 10.19. *Sia M una varietà (reale o complessa). Sia*

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

una successione esatta corta di fibrati vettoriali. Se $H^1(M, \mathsf{Hom}(G, F)) = 0$ allora la successione spezza.

COROLLARIO 10.20. *Sia M una varietà e sia*

$$0 \to F \to E \to G \to 0$$

una successione di fibrati vettoriali (con fibra reale o complessa). Allora la successione spezza in modo C^∞.

DIMOSTRAZIONE. Il fascio delle sezioni C^∞ di $\mathsf{Hom}(G, E)$ è un fascio di C^∞_M-moduli, dunque è aciclico. La tesi segue allora dal corollario precedente. □

CAPITOLO 5

Connessioni su fibrati

1. Connessioni su fibrati vettoriali

Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa (o reale) su una varietà (reale o complessa) M e sia $\mathcal{E}$ il fascio delle sezioni C^∞ di E. Con il simbolo $\Omega^1(\mathcal{E})$ si denota il fascio delle *uno forme a valori in* E, ovvero, per definizione, $\Omega^1(\mathcal{E})$ è il fascio delle sezioni C^∞ del fibrato $\Omega^1(E) := \bigwedge^1 M \otimes E$.

OSSERVAZIONE 1.1. Se M è una varietà complessa e E è un fibrato olomorfo, $\Omega^1(\mathcal{E})$ è un fascio di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente libero, che può essere considerato anche come un fascio di C^∞_M-moduli localmente libero (con C^∞_M il fascio delle funzioni C^∞ a valori complessi). Nel seguito considereremo, salvo avviso contrario, solo sezioni C^∞ dei fibrati con fibra complessa, dunque solo fasci di $C^\infty_{M,\mathbb{C}}$-moduli localmente liberi. Pertanto M indicherà, salvo avviso contrario, una varietà reale mentre $TM, T^*M, ...$ indicano i fibrati *complessi*, ovvero $TM \otimes (M \times \mathbb{C}), T^*M \otimes (M \times \mathbb{C}), ...$

DEFINIZIONE 1.2. Una *connessione* ∇ per E è un morfismo $\mathbb{C}$-lineare (ovvero anche un morfismo di fasci di $\mathbb{C}_M$-moduli)

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1(\mathcal{E})$$

tale che per ogni aperto $U \subset M$, $f \in C^\infty_M(U)$ e $e \in \mathcal{E}(U)$ risulta

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e.$$

OSSERVAZIONE 1.3. Sia ∇ una connessione per un fibrato E. Allora se $U \subset M$ è un aperto ed $e \in \mathcal{E}(U)$, per definizione $\nabla e \in C^\infty(U, T^*M)$. In particolare, se $v \in T_pM$ si denota

$$\nabla_v e := (\nabla e)_p(v).$$

Si può pensare a $\nabla_v e$ come la “derivata” di e nella direzione v in p.

Si noti che, per definizione,

$$\nabla_{av+bw} = a\nabla_v + b\nabla_w \quad \forall a, b \in C^\infty_M(U), v, w \in C^\infty(U, TM).$$

ESEMPIO 1.4. Sia E un fibrato vettoriale su M isomorfo al fibrato banale $M \times \mathbb{C}^k$. Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base di E su M. Allora $\mathcal{E} \simeq \mathbb{C}^k_M$ e ogni sezione $e \in \mathcal{E}(U)$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare $e(x) = \sum_{j=1}^k s_j(x)e_j(x)$ per $x \in U$, essendo $s :=$

$(s_1, \dots, s_k) : U \to \mathbb{C}^k$ una funzione C^∞. Si definisce allora una *connessione banale per* E *rispetto alla base* $\{e_1, \dots, e_k\}$ imponendo

$$\nabla e_j = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Per definizione di connessione risulta allora

$$\nabla e = \nabla(\sum s_j e_j) = \sum \nabla(s_j e_j) = \sum ds_j \otimes e_j.$$

Si osservi che tale connessione dipende dalla trivializzazione scelta per E.

TEOREMA 1.5. *Sia E un fibrato vettoriale su M. Allora E ammette connessioni.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento localmente finito di M con ciascun U_α relativamente compatto in M e tale che $E|_{U_\alpha}$ sia banale. Sia $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_\alpha\}$. Per ogni α sia $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ una base di $E|_{U_\alpha}$. Sia ∇^α la connessione banale per $E|_{U_\alpha}$ rispetto alla base $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$. Si definisca

$$\nabla := \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha.$$

Si verifica allora immediatamente che ∇ è una connessione per E. $\square$

1.1. Espressioni in basi locali. Sia ∇ una connessione per E. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento trivializzante per E, tali che $E|_{U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{C}^k$. Sia $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ una base locale di E su U_α. Poniamo

$$\nabla e_j^\alpha = \sum_{i=1}^k \theta_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \tag{1.1}$$

per opportune 1-forme θ_{ij}^α su U_α.

Data s una sezione C^∞ di E su U_α, si ha $s(x) = \sum a_j^\alpha(x) e_j^\alpha(x)$, essendo le $a_j^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ funzioni C^∞, e dunque

$$\begin{aligned}
\nabla s = \sum_j \nabla a_j^\alpha e_j^\alpha &= \sum_j \left(da_j^\alpha \otimes e_j^\alpha + a_j^\alpha \nabla e_j^\alpha \right) \\
&= \sum_j \left(da_j^\alpha \otimes e_j^\alpha + \sum_{i=1}^k a_j^\alpha \theta_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \right) \\
&= \sum_j \left[da_j^\alpha + \sum_{h=1}^k a_h^\alpha \theta_{jh}^\alpha \right] \otimes e_j^\alpha.
\end{aligned}$$

In altri termini, se indichiamo con $s^\alpha(x) = \begin{pmatrix} a_1^\alpha(x) \\ \vdots \\ a_k^\alpha(x) \end{pmatrix}$ il vettore delle componenti di s, e denotiamo con $\theta^\alpha = (\theta_{jh}^\alpha)$ la matrice $k \times k$ con entrate le 1-forme θ_{jh}^α, si ha

$$\nabla s^\alpha = ds^\alpha + \theta^\alpha s^\alpha. \tag{1.2}$$

DEFINIZIONE 1.6. La $k \times k$ matrice θ^α si dice la *matrice di* 1*-forme di connessione* di ∇ rispetto alla base $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$.

Ricordiamo che se $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le funzioni di transizione di E, le sezioni del fascio associato (come basi di vettori) cambiano tramite $\{{}^t g_{\alpha\beta}^{-1}\}$ (si veda l'Osservazione 2.15 del Capitolo 4). Dunque, cambiando aperto trivializzante si ha $e_i^\alpha = \sum_h g_{\beta\alpha}^{hi} e_h^\beta$ su $U_\alpha \cap U_\beta$. Dalla (1.1) si ha da un lato

$$\nabla e_j^\alpha = \sum_{i=1}^k \theta_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha = \sum_{i=1}^k \theta_{ij}^\alpha \otimes \sum_h g_{\beta\alpha}^{hi} e_h^\beta = \sum_{h=1}^k \left(\sum_{i=1}^k \theta_{ij}^\alpha g_{\beta\alpha}^{hi} \right) \otimes e_h^\beta,$$

e dall'altro

$$\begin{aligned} \nabla e_j^\alpha &= \nabla \left(\sum_h g_{\beta\alpha}^{hj} e_h^\beta \right) = \sum_h \left(d g_{\beta\alpha}^{hj} \otimes e_h^\beta + g_{\beta\alpha}^{hj} \nabla e_h^\beta \right) \\ &= \sum_h \left(d g_{\beta\alpha}^{hj} \otimes e_h^\beta + g_{\beta\alpha}^{hj} \sum_{i=1}^k \theta_{ih}^\beta \otimes e_i^\beta \right) = \sum_{h=1}^k \left(d g_{\beta\alpha}^{hj} + \sum_{i=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij} \theta_{hi}^\beta \right) \otimes e_h^\beta \end{aligned}$$

da cui si ottiene per $h = 1, \dots, k$

$$\sum_{i=1}^k \theta_{ij}^\alpha g_{\beta\alpha}^{hi} = d g_{\beta\alpha}^{hj} + \sum_{i=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij} \theta_{hi}^\beta$$

Moltiplicando ambo i membri per $g_{\alpha\beta}^{lh}$ e sommando in h, tenendo presente che $\sum_h g_{\alpha\beta}^{lh} g_{\beta\alpha}^{hi} = \delta_i^l$, si ottiene

$$\sum_{i,h=1}^k \theta_{ij}^\alpha g_{\alpha\beta}^{lh} g_{\beta\alpha}^{hi} = \sum_h g_{\alpha\beta}^{lh} d g_{\beta\alpha}^{hj} + \sum_{i,h=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij} \theta_{hi}^\beta g_{\alpha\beta}^{lh}$$

ovvero

$$\theta_{lj}^\alpha = \sum_h g_{\alpha\beta}^{lh} d g_{\beta\alpha}^{hj} + \sum_{i,h=1}^k g_{\beta\alpha}^{ij} \theta_{hi}^\beta g_{\alpha\beta}^{lh}$$

e in forma matriciale

$$\theta^\alpha = g_{\alpha\beta} d g_{\beta\alpha} + g_{\alpha\beta} \theta^\beta g_{\beta\alpha}. \tag{1.3}$$

OSSERVAZIONE 1.7. Se $\{\theta^\alpha\}$ è una famiglia di $k \times k$ matrici di 1-forme definite su un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M che trivializza E e soddisfa (1.3), allora esiste (ed è unica) una connessione ∇ per E con 1-forme di connessioni date da θ_α, definita tramite la (1.1). Il lettore verifichi per esercizio.

2. La (prima) classe di Atiyah

Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa su una varietà M. Definiamo il fascio $J^1\mathcal{E}$ di spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ dato da

$$\tau(M) \ni U \mapsto J^1\mathcal{E}(U) := \mathcal{E}(U) \oplus \Omega^1(\mathcal{E})(U).$$

Si verifichi che è effettivamente un fascio di gruppi abeliani. Dotiamo adesso $J^1\mathcal{E}$ di una struttura di fascio di C^∞_M-moduli nel modo seguente. Sia $\alpha := e_1 \oplus \omega \in J^1\mathcal{E}(U) = \mathcal{E}(U) \oplus \Omega^1(\mathcal{E})(U)$ e $f \in C^\infty_M(U)$. Si pone

$$f\alpha := fe_1 \oplus (f\omega + df \otimes e_1).$$

Si verifica (per esercizio) che la successione corta di C^∞_M-moduli data da

$$0 \to \Omega^1(\mathcal{E}) \xrightarrow{a} J^1\mathcal{E} \xrightarrow{b} \mathcal{E} \to 0 \tag{2.1}$$

dove $a(\omega) := 0 \oplus \omega$ e $b(e_1 \oplus \omega) := e_1$, è esatta.

Poiché $\mathcal{E}$ è localmente libero, la successione (2.1) spezza localmente (si veda l'Esercizio 4.8 nel Capitolo 4). Dunque esiste un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M tale che $\mathcal{E}|_{U_\alpha}$ e $\Omega^1(\mathcal{E})|_{U_\alpha}$ sono liberi, ovvero

$$J^1\mathcal{E}|_{U_\alpha} \simeq \Omega^1(\mathcal{E})|_{U_\alpha} \oplus \mathcal{E}|_{U_\alpha} \simeq (C^\infty_M)^{nk}|_{U_\alpha} \oplus (C^\infty_M)^k|_{U_\alpha}.$$

Pertanto $J^1\mathcal{E}$ è un fascio di C^∞_M-moduli localmente libero. Il fibrato vettoriale ad esso associato si denota J^1E.

DEFINIZIONE 2.1. Sia E un fibrato vettoriale su M. Il fibrato vettoriale J^1E si chiama il *fibrato degli uno getti di* E.

OSSERVAZIONE 2.2. Si osservi che se M è una varietà complessa e E è un fibrato olomorfo, la stessa costruzione precedente rende J^1E un fibrato vettoriale olomorfo.

PROPOSIZIONE 2.3. *Ogni connessione per E determina uno spezzamento della successione esatta corta* (2.1)*. Viceversa, ogni spezzamento della successione esatta corta* (2.1) *determina una connessione per E.*

DIMOSTRAZIONE. Se ∇ è una connessione per E, si definisce $j : \mathcal{E} \to J^1\mathcal{E}$ tramite

$$j(e) := e \oplus \nabla e.$$

In effetti j è un C^∞_M-morfismo, essendo per $f \in C^\infty_M(U), e \in \mathcal{E}(U)$

$$j(fe) = fe \oplus \nabla(fe) = fe \oplus (df \otimes e + f\nabla e) = f(e \oplus \nabla e).$$

Ovviamente $b \circ j = \mathsf{id}$ e dunque ∇ determina uno spezzamento della successione (2.1).

Viceversa, se la successione (2.1) spezza, esiste un C^∞_M-morfismo $j : \mathcal{E} \to J^1\mathcal{E}$ tale che $b \circ j = \mathsf{id}$. Sia $\pi : J^1E \to \Omega^1(E)$ definita sugli elementi semplici da

$$\pi(e \oplus \omega) := \omega.$$

Si noti che π è $\mathbb{C}$-lineare ma *non* C^∞_M-lineare.

Si pone allora

$$\nabla := \pi \circ j.$$

Si ha $\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1(\mathcal{E})$. Inoltre ∇ è $\mathbb{C}$-lineare. Infine per $f \in C^\infty_M(U), e \in \mathcal{E}(U)$

$$\begin{aligned}\nabla(fe) &= \pi(fj(e)) = \pi(f(e \oplus \omega)) = \pi(fe \oplus (f\omega + df \otimes e)) \\ &= f\omega + df \otimes e = f\nabla e + df \otimes e.\end{aligned}$$

Dunque ∇ è una connessione per E. $\square$

OSSERVAZIONE 2.4. La Proposizione precedente dà una dimostrazione alternativa dell'esistenza di connessioni per fibrati vettoriali. Infatti la successione di C^∞_M-moduli (2.1) spezza sempre per il Corollario 10.20 del Capitolo 4.

Se E è un fibrato olomorfo sulla varietà complessa M, si può considerare la successione esatta corta $\mathfrak{E}$ di $\mathcal{O}_M$-moduli data dalle sezioni olomorfe dei fibrati:

$$0 \to \mathcal{O}_M(\Omega^1(E)) \xrightarrow{a} \mathcal{O}_M(J^1E) \xrightarrow{b} \mathcal{O}_M(E) \to 0. \tag{2.2}$$

Sia $a(\mathfrak{E}) \in H^1(M, \mathcal{O}_M(\mathsf{Hom}(E, \Omega^1(E)))$ la classe definita in Definizione 10.17 nel Capitolo 4.

DEFINIZIONE 2.5. La *(prima) classe di Atiyah* $a(E)$ di E, è data da

$$a(E) := a(\mathfrak{E}) \in H^1(M, \mathcal{O}_M(\mathsf{Hom}(E, \Omega^1(E))).$$

ESERCIZIO 2.6. Si trovi l'espressione dell'1-cociclo che rappresenta $a(E)$ nella coomologia di $\check{C}$ech.

DEFINIZIONE 2.7. Sia E un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa M. Una *connessione olomorfa* ∇ per E è un morfismo $\mathbb{C}$-lineare

$$\nabla : \mathcal{O}_M(E) \longrightarrow \mathcal{O}_M(\Omega^1(E))$$

tale che per ogni aperto $U \subset M$, $f \in \mathcal{O}_M(U)$ e $e \in \mathcal{O}_M(E)(U)$ risulta

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e.$$

PROPOSIZIONE 2.8. *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa M. Allora E ammette una connessione olomorfa se e solo se $a(E) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta ragionare come in Proposizione 2.3, tenendo presente che $a(E) = 0$ se e solo se la successione esatta corta (2.2) spezza come successione di $\mathcal{O}_M$-moduli localmente liberi. $\square$

Si osservi che in genere un fibrato olomorfo *non* ammette connessioni olomorfe (mentre ammette sempre connessioni C^∞).

3. Curvatura di una connessione

Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa su una varietà M. Sia ∇ un connessione per E. Sia $\Omega^p(\mathcal{E})$ il *fascio delle p-forme a valori in E*. Ovvero $\Omega^p(\mathcal{E})$ è il fascio delle sezioni del fibrato vettoriale $\bigwedge^p M \otimes E$. Si può estendere la connessione ∇ come morfismo $\mathbb{C}$-lineare

$$\nabla : \Omega^p(\mathcal{E}) \to \Omega^{p+1}(\mathcal{E})$$

tramite

$$\nabla(\omega \otimes e) := d\omega \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla e,$$

per $\omega \in \Omega^p(U)$, $e \in \mathcal{E}(U)$.

OSSERVAZIONE 3.1. Si noti che se $\omega \otimes e \in \Omega^p(\mathcal{E})(U)$, e $f \in C^\infty_M(U)$ si ha

$$\begin{aligned}\nabla(f(\omega \otimes e)) &= \nabla((f\omega) \otimes e) = d(f\omega) \otimes e + (-1)^p f\omega \wedge \nabla e \\ &= df \wedge \omega \otimes e + f\nabla(\omega \otimes e).\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 3.2. L'operatore $R := \nabla \circ \nabla : \mathcal{E} \to \Omega^2(\mathcal{E})$ si dice la *curvatura* di ∇.

PROPOSIZIONE 3.3. *La curvatura R è un morfismo C^∞_M-lineare, ovvero*

$$R \in C^\infty_M(M, \mathsf{Hom}(E, \bigwedge^2 M \otimes E)) \simeq C^\infty_M(M, E^* \otimes E \otimes (T^*M \wedge T^*M)).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $e \in \mathcal{E}(U)$ e $f \in C^\infty_M(U)$. Allora

$$\begin{aligned}R(fe) &= \nabla(f\nabla e + df \otimes e) = \nabla(f\nabla e) + \nabla(df \otimes e) \\ &= df \wedge \nabla e + fR(e) + d^2 f \otimes e - df \wedge \nabla e = fR(e),\end{aligned}$$

che prova che R è un morfismo di C^∞_M-moduli e dunque la tesi segue per quanto visto nella Sezione 4 del Capitolo 4. □

3.1. Espressioni in basi locali. Studiamo l'espressione della curvatura di una connessione in termini di una base locale (con le notazioni poc'anzi introdotte). Scriviamo

$$R(e^\alpha_j) = \sum_{h=1}^{k} K^\alpha_{hj} \otimes e^\alpha_h, \tag{3.1}$$

con $K^\alpha = (K_{hj})$ una $k \times k$ matrice le cui entrate sono 2-forme su U_α. Per definizione

$$\begin{aligned}R(e^\alpha_j) &= \nabla(\nabla e^\alpha_j) = \nabla(\sum_{i=1}^{k} \theta^\alpha_{ij} \otimes e^\alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} \nabla(\theta^\alpha_{ij} \otimes e^\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(d\theta^\alpha_{ij} \otimes e^\alpha_i - \theta^\alpha_{ij} \wedge \nabla e^\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(d\theta^\alpha_{ij} \otimes e^\alpha_i - \theta^\alpha_{ij} \wedge \sum_{l=1}^{k} \theta^\alpha_{li} \otimes e^\alpha_l\right) \\ &= \sum_{h=1}^{k} \left(d\theta^\alpha_{hj} - \sum_{t=1}^{k} \theta^\alpha_{tj} \wedge \theta^\alpha_{ht}\right) \otimes e^\alpha_h\end{aligned}$$

da cui si ottiene per $h, j = 1, \dots, k$

$$K^{\alpha}_{hj} = d\theta^{\alpha}_{hj} - \sum_{t=1}^{k} \theta^{\alpha}_{tj} \wedge \theta^{\alpha}_{ht} = d\theta^{\alpha}_{hj} + \sum_{t=1}^{k} \theta^{\alpha}_{ht} \wedge \theta^{\alpha}_{tj}. \tag{3.2}$$

Definendo $\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}$ la matrice $k \times k$ ottenuta facendo il prodotto esterno riga per colonna di θ^{α} con se stessa (ovvero l'entrata di posto h, j è $\sum_{t=1}^{k} \theta^{\alpha}_{ht} \wedge \theta^{\alpha}_{tj}$), la (3.2) si può esprimere in forma matriciale come

$$K^{\alpha} = d\theta^{\alpha} + \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}. \tag{3.3}$$

Le (3.2) e (3.3) sono dette *equazioni di struttura*.

OSSERVAZIONE 3.4. Si osservi che

$${}^{t}(\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}) = -{}^{t}\theta^{\alpha} \wedge^{t} \theta^{\alpha}.$$

In particolare ne segue che la traccia della matrice $\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}$ è nulla, ovvero

$$\mathsf{tr}(\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\alpha}) = 0. \tag{3.4}$$

Cambiando base locale per E, dalla (3.3) si ha

$$\begin{aligned} R(e^{\alpha}_{j}) &= R\left(\sum_{h} g^{hj}_{\beta\alpha} e^{\beta}_{h}\right) = \sum_{h} g^{hj}_{\beta\alpha} R(e^{\beta}_{h}) = \sum_{h} g^{hj}_{\beta\alpha} \sum_{l} K^{\beta}_{lh} \otimes e^{\beta}_{l} \\ &= \sum_{l,h} g^{hj}_{\beta\alpha} K^{\beta}_{lh} \sum_{t} g^{tl}_{\alpha\beta} \otimes e^{\alpha}_{t} = \sum_{t} \left(\sum_{h,l} g^{hj}_{\beta\alpha} K^{\beta}_{lh} g^{tl}_{\alpha\beta}\right) \otimes e^{\alpha}_{t} \end{aligned}$$

e confrontando con (3.1) si ottiene

$$K^{\alpha}_{tj} = \sum_{h,l} g^{hj}_{\beta\alpha} K^{\beta}_{lh} g^{tl}_{\alpha\beta} \quad t, j = 1, \dots, k. \tag{3.5}$$

In termini matriciali, la (3.5) è equivalente a

$$K^{\alpha} = g_{\alpha\beta} K^{\beta} g_{\beta\alpha}, \tag{3.6}$$

come si poteva desumere anche direttamente dal fatto che R è una sezione del fibrato $\mathsf{Hom}(E, E) \otimes \bigwedge^2 M$.

OSSERVAZIONE 3.5. Se $k = 1$, ovvero se E è un fibrato con fibra complessa di rango uno, tenuto presente che $\theta^{\alpha}, K^{\alpha}$ sono delle forme e $g_{\alpha\beta}(x)$ sono funzioni complesse mai nulle, le formule precedenti diventano

$$\theta^{\alpha} - \theta^{\beta} = \frac{dg_{\beta\alpha}}{g_{\beta\alpha}} = d\log(g_{\beta\alpha}), \tag{3.7}$$

$$K^{\alpha} = d\theta^{\alpha}, \tag{3.8}$$

$$K^{\alpha} = K^{\beta}, \tag{3.9}$$

ovvero, $\{K^\alpha\}$ determina una sezione globale di $\bigwedge^2 M$ (cioè una 2-forma su M). Si osservi che questo segue anche astrattamente dal fatto che $\mathsf{Hom}(E,E) = E \otimes E^* = M \times \mathbb{C}$ e dunque $R \in H^0(M, \mathsf{Hom}(E,E) \otimes \bigwedge^2 M) = H^0(M, \bigwedge^2 M)$.

PROPOSIZIONE 3.6 (Identità di Ricci). *Sia ∇ una connessione per un fibrato vettoriale E con fibra complessa di rango k su M. Sia R la sua curvatura. Siano v, w due germi di campi di vettori su M in un intorno di p e sia $s \in \mathcal{E}_p$. Allora*

$$R(v,w)s = \nabla_v(\nabla_w s) - \nabla_w(\nabla_v s) - \nabla_{[v,w]}s.$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità si prova per $k = 1$ (tediosi calcoli analoghi valgono per ogni k). Per prima cosa si verifica che se e è una base locale di $E|_U$, allora per ogni $f \in C^\infty_M(U)$ risulta

$$\nabla_v(\nabla_w fe) - \nabla_w(\nabla_v fe) - \nabla_{[v,w]}fe = f\left(\nabla_v(\nabla_w s) - \nabla_w(\nabla_v s) - \nabla_{[v,w]}s\right).$$

Dunque basta provare l'identità di Ricci prendendo $s = e$. Dalla (3.8) (omettendo di scrivere α) abbiamo

$$R(v,w)e = d\theta(v,w)e.$$

D'altra parte

$$\nabla_v(\nabla_w e) = \nabla_v(\theta(w)e) = d(\theta(w))(v)e + \theta(w)\nabla_v e = (v\theta(w) + \theta(w)\theta(v))e,$$

e similmente

$$\nabla_w(\nabla_v e) = (w\theta(v) + \theta(v)\theta(w))e,$$

da cui

$$\nabla_v(\nabla_w e) - \nabla_w(\nabla_v e) - \nabla_{[v,w]}e = (v\theta(w) - w\theta(v) - \theta([v,w]))e.$$

Pertanto l'identità di Ricci equivale a

$$d\theta(v,w) = v\theta(w) - w\theta(v) - \theta([v,w]),$$

ma questa formula è il contenuto della Proposizione 3.2 nel Capitolo 3. □

4. Estensione di una connessione all'algebra tensoriale

In questa sezione vedremo come sia possibile estendere una (o più) connessioni ai fibrati vettoriali definiti dalle naturali operazioni tra fibrati vettoriali.

4.1. Somma diretta. Siano E, E' due fibrati vettoriali su M. Sia ∇ una connessione per E e ∇' una connessione per E'. Sia $F = E \oplus E'$. Si definisce

$$\nabla'' := \nabla \oplus \nabla'.$$

Si verifica facilmente che ∇'' è effettivamente una connessione su F. Si verifica poi facilmente che, se $\{\theta^\alpha\}$ è la matrice di 1-forme di connessione di ∇ rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ di E e se $\{\tilde{\theta}^\alpha\}$ è la matrice di 1-forme di connessione di ∇' rispetto alla base locale $\{e'^\alpha_1, \dots, e'^\alpha_h\}$

di E', allora la la matrice di 1-forme di connessione di ∇'' rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha \oplus 0, \dots, e_k^\alpha \oplus 0, 0 \oplus {e'}_1^\alpha, \dots, 0 \oplus {e'}_h^\alpha\}$ di $E \oplus E'$ è data da

$$\begin{pmatrix} \theta^\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{\theta}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Dalle equazioni di struttura si ha che se K^α è la matrice di curvatura di ∇ rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ di E e se $\tilde{K}^\alpha$ è la matrice di curvatura di ∇' rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ di E', allora la matrice di curvatura di ∇'' rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha \oplus 0, \dots, e_k^\alpha \oplus 0, 0 \oplus {e'}_1^\alpha, \dots, 0 \oplus {e'}_h^\alpha\}$ di $E \oplus E'$ è data da

$$\begin{pmatrix} K^\alpha & 0 \\ 0 & \tilde{K}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

4.2. Prodotto tensoriale. Siano E, E' due fibrati vettoriali su M. Sia ∇ una connessione per E e ∇' una connessione per E'. Sia $F = E \otimes E'$. Si definisce

$$\nabla'' := \nabla' \otimes \mathsf{id}_{E'} + \mathsf{id}_E \otimes \nabla.$$

Si verifica he ∇' è effettivamente una connessione su F. Infatti, con ovvie notazioni,

$$\begin{aligned} \nabla'' f(e \otimes e') &= \nabla''(fe) \otimes e' = \nabla(fe) \otimes e' + fe \otimes \nabla' e' \\ &= df \otimes (e \otimes e') + f(\nabla'' e \otimes e' + e \otimes \nabla' e') = df \otimes (e \otimes e') + f\nabla''(e \otimes e'). \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.1. Sia E un fibrato vettoriale di rango k e sia L un fibrato di rango uno. Siano ∇ una connessione per E e ∇' una connessione per L. Fissiamo un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M, trivializzante per E, L. Sia $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ una base locale di E su U_α e sia $\{s^\alpha\}$ una base locale di L su U_α. Siano $\{\theta^\alpha\}$ (matrice $k \times k$) e $\{\theta'^\alpha\}$ (matrice 1×1) le matrici di 1-forme di connessione rispetto alle basi scelte. Il fibrato $E \otimes L$ ha basi locali naturali data da $\{e_1^\alpha \otimes s^\alpha, \dots, e_k^\alpha \otimes s^\alpha\}$. Rispetto a tale base le 1-forme della connessione $\nabla'' = \nabla \otimes 1 + \mathsf{id} \otimes \nabla'$ sono

$$\sum_h \theta''^\alpha_{hj} \otimes e_h^\alpha \otimes s^\alpha = \nabla''(e_j^\alpha \otimes s^\alpha) = \sum_h \theta^\alpha_{hj} \otimes e_h^\alpha \otimes s^\alpha + \theta^\alpha \otimes e_j^\alpha \otimes s^\alpha,$$

da cui

$$\theta''^\alpha = \theta^\alpha + \theta'^\alpha \mathsf{id}.$$

Dall'equazione di struttura si ha $K''^\alpha = d\theta''^\alpha + \theta''^\alpha \wedge \theta''^\alpha$, e, sostituendo l'equazione precedente si ottiene

$$K''^\alpha = K^\alpha + K'^\alpha \mathsf{id}.$$

4.3. Prodotto esterno. Sia E un fibrato vettoriale su M di rango k. Sia ∇ una connessione per E. Si definisce una connessione naturale ∇' per il prodotto esterno $\bigwedge^r E$ (con $r \leq k$) estendendo per linearità la seguente:

$$\nabla'(e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) := (\nabla e_1) \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_r + \ldots + e_1 \wedge \ldots \wedge e_{r-1} \wedge (\nabla e_r).$$

Nel caso in cui $r = k$, e dunque $\bigwedge^k E = \det(E)$ è il fibrato determinante di E, se θ^α è la matrice di 1-forme della connessione ∇ rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ di E, la 1-forma di connessione $\tilde{\theta}_\alpha$ di ∇' rispetto alla base locale $e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_k^\alpha$ di $\det(E)$ è ottenuta tramite

$$\begin{aligned}\nabla'(e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_k^\alpha) &= (\nabla e_1^\alpha) \wedge e_2^\alpha \wedge \ldots \wedge e_r^\alpha + \ldots + e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_{r-1}^\alpha \wedge (\nabla e_r^\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^k \theta_{j1}^\alpha e_j^\alpha \wedge e_2^\alpha \wedge \ldots \wedge e_r^\alpha + \ldots + e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_{r-1}^\alpha \wedge (\sum_{j=1}^k \theta_{jk}^\alpha e_j^\alpha) \\ &= \theta_{11}^\alpha e_1^\alpha \wedge e_2^\alpha \wedge \ldots \wedge e_r^\alpha + \ldots + e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_{r-1}^\alpha \wedge \theta_{kk}^\alpha e_k^\alpha \\ &= \mathsf{tr}(\theta^\alpha) e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_k^\alpha.\end{aligned}$$

Da cui

$$\tilde{\theta}_\alpha = \mathsf{tr}(\theta^\alpha).$$

Se K_α è la matrice di curvatura di ∇ rispetto alla base locale $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ di E, la 2-forma di curvatura $\tilde{K}_\alpha$ di ∇' rispetto alla base locale $e_1^\alpha \wedge \ldots \wedge e_k^\alpha$ di $\det(E)$ si ottiene dalla equazione di struttura tenendo conto della (3.4):

$$\begin{aligned}\tilde{K}_\alpha &= d\tilde{\theta}_\alpha = d\mathsf{tr}(\theta^\alpha) = \mathsf{tr}(d\theta^\alpha) \\ &= \mathsf{tr}(d\theta^\alpha) + \mathsf{tr}(\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) = \mathsf{tr}(d\theta^\alpha + \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) \\ &= \mathsf{tr}(K^\alpha).\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.4. Duale. Sia E un fibrato vettoriale su M e sia ∇ una connessione per E. Definiamo adesso una natuarle connessione per E^*.

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia E un fibrato vettoriale su M e sia ∇ una connessione per E. Allora esiste unica una connessione ∇^* per E^* con la proprietà che per ogni $e \in \mathcal{E}(U)$ e $\varphi \in \mathcal{E}^*(U)$ vale*

$$d(\varphi(e)) = (\nabla^*\varphi)(e) + \varphi(\nabla e) \quad \forall \varphi, e.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che una tale connessione esista. Sia U un aperto tale che $E|_U$ sia banale. Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base di E su U e sia $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ la base duale di E^* su U. Abbiamo

$$\nabla e_j = \sum_i \theta_{ij} \otimes e_i, \quad \nabla^*\varphi_j = \sum_i \theta_{ij}^* \otimes \varphi_i.$$

Dunque, per definizione

$$\begin{aligned}\theta_{lj}^* &= \sum_i \theta_{ij}^* \otimes \varphi_i(e_l) = (\nabla^*\varphi_j)(e_l) = d\varphi_j(e_l) - \varphi_j(\nabla e_l) \\ &= -\varphi_j(\sum_i \theta_{il} \otimes e_i) = -\theta_{jl}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\theta^* = -{}^t\theta. \tag{4.3}$$

Sia ora $\{U_\alpha\}$ un atlante di trivializzazione per E, e per ogni α sia fissata una base locale per $E|_{U_\alpha}$. Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le matrici di transizione di E rispetto a $\{U_\alpha\}$ e siano $\{\theta^\alpha\}$ le matrici di 1-forme di connessione di ∇ rispetto alle basi locali scelte.

Ricordiamo che le matrici di transizione del fibrato E^* rispetto a $\{U_\alpha\}$ sono date da $\{{}^t g_{\alpha\beta}^{-1}\}$ (si veda la (4.2) del Capitolo 2). Definiamo $(\theta^*)^\alpha := -{}^t\theta^\alpha$. Se proviamo che le $\{(\theta^*)^\alpha\}$ verificano la condizione di compatibilità (1.3) (con le $g_{\alpha\beta}$ sostituite dalle ${}^t g_{\alpha\beta}^{-1}$), allora esiste una unica connessione ∇^* che ha le $\{(\theta^*)^\alpha\}$ come matrici di 1-forme nelle basi locali di E^* su U_α duali alle basi locali di E su U_α. Dunque queste soddisfano la (4.3) e pertanto il teorema risulta privato.

La verifica delle condizioni di compatibilità di $\{(\theta^*)^\alpha\}$ è lasciata come esercizio (per il calcolo si tenga conto che le $\{\theta^\alpha\}$ verificano la (1.3) e che $0 = (dg_{\alpha\beta})g_{\beta\alpha} + g_{\alpha\beta}dg_{\beta\alpha}$). $\square$

OSSERVAZIONE 4.3. Sia E è un fibrato vettoriale con connessione ∇. Fissiamo una base di E su un aperto. Sia E^* il fibrato duale con la connessione ∇^*. Sia θ la matrice di 1-forme di connessione di ∇ rispetto alla base fissata e sia K la matrice delle due forme di curvatura. Sia K^* la curvatura di ∇^* nella base duale della base fissata. Tenuto conto che ${}^t\theta \wedge {}^t\theta = -{}^t(\theta \wedge \theta)$, dalla (4.3) e dall'equazione di struttura $K^* = d\theta^* + \theta^* \wedge \theta^* = -d^t\theta -^t (\theta \wedge \theta)$, da cui

$$K^* = -{}^tK.$$

4.5. Pull-back. Sia $f : N \to M$ una funzione liscia. Sia E un fibrato vettoriale su M con connessione ∇. Se $\{\theta^\alpha\}$ sono le matrici di 1-forme di connessione rispetto a qualche insieme di basi locali per E, le $\{f^*(\theta^\alpha)\}$ verificano le equazioni di compatibilità (1.3) per il fibrato f^*E e dunque definiscono una connessione per f^*E, detta *pull-back di* ∇.

Con le operazioni ora introdotte, data una connessione ∇ per E, questa si può estendere in modo naturale ad una connessione sull'algebra tensoriale di E, ovvero su tutti i fibrati del tipo $E^{\otimes m} \otimes E^{*\otimes t} \otimes \bigwedge^l E \otimes \bigwedge^p M \otimes TM^{\otimes q}$.

Con un usuale abuso di notazione, data una connessione ∇ per un fibrato E, indicheremo con la stessa lettera ∇ ogni estensione "naturale" (come definita in precedenza) di ∇ all'algebra tensoriale.

ESERCIZIO 4.4. Sia h una metrica Hermitiana su un fibrato vettoriale E. Una connessione ∇ per E si dice *compatibile* con la metrica h se $\nabla h = 0$ (intendendo la connessione ∇ estesa a $E^* \otimes E^*$ in modo naturale). Si provi che una connessione ∇ è h-compatibile se e solo se per ogni $e, e' \in \mathcal{E}_p, v \in T_pM$ si ha

$$v(h(e, e')) = h(\nabla_v e, e') + h(e, \nabla_v e').$$

5. Le identità di Bianchi

TEOREMA 5.1. *Sia E un fibrato vettoriale su M. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M trivializzante per E. Sia ∇ una connessione per E con matrici di 1-forme di connessione $\{\theta^\alpha\}$ rispetto* *ad una base $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ di $E|_{U_\alpha}$. Sia R la curvatura di ∇ con 2-forme di curvatura $\{K^\alpha\}$ rispetto alla stessa base. Allora*

$$dK^\alpha = K^\alpha \wedge \theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge K^\alpha, \tag{5.1}$$

$$\nabla R = 0. \tag{5.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla (3.3) si ottiene

$$dK^\alpha = d(d\theta^\alpha) + d(\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha) = d\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge d\theta^\alpha.$$

Sostituendo $d\theta^\alpha = K^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$ si ottiene allora la prima identità di Bianchi.

Sia $\{\varphi_1^\alpha, \dots, \varphi_k^\alpha\}$ la base di $E^*|_{U_\alpha}$ duale di $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$. Essendo R una sezione globale di $\bigwedge^2 M \otimes E \otimes E^*$, si può scrivere

$$R = \sum_{ij} K_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha.$$

La connessione ∇ si estende in modo naturale come spiegato in precedenza ad una connessione su $\bigwedge^2 M \otimes E \otimes E^*$, che denotiamo sempre con la lettera ∇. Dobbiamo provare che, rispetto a questa estensione naturale, $\nabla R = 0$. Dunque

$$\begin{aligned}
\nabla R &= \sum_{ij} \left[dK_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha + (-1)^2 K_{ij}^\alpha \wedge \nabla(e_i^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha) \right] \\
&= \sum_{ij} \left[dK_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha + K_{ij}^\alpha \wedge (\nabla e_i^\alpha) \otimes \varphi_j^\alpha + K_{ij}^\alpha \wedge e_i^\alpha \otimes (\nabla^* \varphi_j^\alpha) \right] \\
&\overset{(4.3)}{=} \sum_{ij} \left[dK_{ij}^\alpha \otimes e_i^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha + K_{ij}^\alpha \wedge \sum_t (\theta_{ti}^\alpha \otimes e_t^\alpha) \otimes \varphi_j^\alpha + K_{ij}^\alpha \wedge e_i^\alpha \otimes \sum_t (-\theta_{jt}^\alpha \otimes \varphi_t^\alpha) \right] \\
&= \sum_{tj} \left[dK_{tj}^\alpha + \sum_i (K_{ij}^\alpha \wedge \theta_{ti}^\alpha - K_{ti}^\alpha \wedge \theta_{ij}^\alpha) \right] \otimes e_t^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha \\
&= \sum_{tj} \left[dK_{tj}^\alpha - \sum_i (K_{ti}^\alpha \wedge \theta_{ij}^\alpha - \theta_{ti}^\alpha \wedge K_{ij}^\alpha) \right] \otimes e_t^\alpha \otimes \varphi_j^\alpha = 0,
\end{aligned}$$

essendo $dK_{tj}^\alpha - \sum_i (K_{ti}^\alpha \wedge \theta_{ij}^\alpha - \theta_{ti}^\alpha \wedge K_{ij}^\alpha) = 0$ per la prima identità di Bianchi. □

6. Fibrati lineari e connessioni

In questa sezione consideriamo L un fibrato con fibra complessa di rango uno su una varietà M. Sia ∇ una connessione per L con curvatura R. Dalle (3.8) e (3.9) risulta che la 2-forma di curvatura $\{K_\alpha\}$ è la restrizione di una due forma globale che denotiamo con K, e che $dK = 0$. Dunque K rappresenta una classe che denotiamo con $[\nabla] \in H^2_{dR}(M)$ (qui si considera il gruppo di de Rham a coefficienti complessi).

LEMMA 6.1. *Sia L un fibrato con fibra complessa di rango uno su M. Siano ∇, ∇' due connessioni per L. Allora*

$$[\nabla] = [\nabla'].$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento trivializzante per L con base e_α per $L|_{U_\alpha}$. Siano $\{\theta^\alpha\}$ le 1-forme di connessione per ∇ rispetto alla base $\{e_\alpha\}$. Siano$\{\tilde{\theta}^\alpha\}$ le 1-forme di connessione per ∇' rispetto alla stessa base $\{e_\alpha\}$. Dalla (3.7) risulta

$$\theta^\alpha - \tilde{\theta}^\alpha = \theta^\beta - \tilde{\theta}^\beta,$$

su $U_\alpha \cap U_\beta$. Pertanto $\{\theta_\alpha - \theta_\beta\}$ definiscono una 1-forma globale ω su M. Posto K la 2-forma data dalla curvatura di ∇ e K' quella data da ∇', dalla (3.8) si ha

$$K - K' = d\omega,$$

dunque $[\nabla] = [\nabla']$ come volevasi. □

DEFINIZIONE 6.2. Sia L un fibrato con fibra complessa di rango uno su M. Sia ∇ una connessione per L. Mediante l'isomorfismo tra $H^2_{dR}(M)$ e $H^2(M, \mathbb{C})$ la classe $[\nabla]$ definisce un elemento di $H^2(M, \mathbb{C})$ che non dipende da ∇ e che si indica con $[L] \in H^2(M, \mathbb{C})$.

TEOREMA 6.3. *Sia L un fibrato con fibra complessa di rango uno su M. Allora*

$$c_1(L) = \frac{i}{2\pi}[L].$$

in $H^2(M, \mathbb{C})$.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare l'enunciato dobbiamo scrivere esplicitamente l'isomorfismo del teorema di de Rham astratto $\gamma_2 : H^2_{dR}(M) \to H^2(M, \mathbb{C})$ nel caso della risoluzione aciclica di $\mathbb{C}$ data dal complesso di de Rham:

$$0 \to \mathbb{C}_M \to C^\infty_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \ldots \to C^{\infty,n}_{M,\mathbb{C}} \to 0.$$

Da questo si ottengono le successioni esatte corte

$$0 \to \mathbb{C}_M \longrightarrow C^\infty_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \mathcal{K}^1 \to 0 \tag{6.1}$$

$$0 \to \mathcal{K}^1 \longrightarrow C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} \mathcal{K}^2 \to 0 \tag{6.2}$$

essendo $\mathcal{K}^1 = \mathsf{Ker}(C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} C^{\infty,2}_{M,\mathbb{C}})$ e $\mathcal{K}^2 = \mathsf{Ker}(C^{\infty,2}_{M,\mathbb{C}} \xrightarrow{d} C^{\infty,3}_{M,\mathbb{C}})$. Dalla dimostrazione del Teorema di de Rham astratto (Teorema 8.3 nel Capitolo 4) si ha che $\gamma_2 := \gamma_2^2 \circ \gamma_1^2$. Ora

$$\gamma_1^2 : H^2_{dR}(M) \simeq \frac{H^0(M, \mathcal{K}^2)}{\mathsf{Im}(H^0(M, C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}}) \to H^0(M, \mathcal{K}^2))} \longrightarrow H^1(M, \mathcal{K}^1)$$

è definito dall'operatore di cobordo ∂_1 della successione esatta lunga in coomologia associata alla (6.2).

Calcoliamo dunque $\partial_1([L])$. Sia ∇ una connessione per L. Sia $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}$ un ricoprimento trivializzante per L tale che $U_\alpha \cap U_\beta$ sia semplicemente connesso per ogni α, β e sia $\{e_\alpha\}$ una base di $L|_{U_\alpha}$. Siano $\{\theta^\alpha\}$ le 1-forme di connessione per ∇ relative alla base $\{e_\alpha\}$ e siano $\{K^\alpha\}$ le 2-forme di curvatura. La classe $[\nabla]$ è definita dalla 2-forma K tale che $K|_{U_\alpha} = K^\alpha$. Dunque $\{K^\alpha\}$ è lo zero cociclo che rappresenta $[\nabla]$ nella coomologia di Čech $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}^2)$. Ricordiamo che $K^\alpha = d\theta^\alpha$ per la (3.8). L'operatore di cobordo $\partial_1 : \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}^2) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{K}^1)$ è dunque definito tramite il Lemma del Serpente da

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}}) \ni \{\theta^\alpha\} & \xrightarrow{d} & \{K_\alpha\} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{K}^2) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \\
0 \to \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{K}^1) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, C^{\infty,1}_{M,\mathbb{C}}) \ni \{(\theta^\beta - \theta^\alpha)|_{U_\alpha \cap U_\beta}\} & &
\end{array}$$

da cui, essendo $(\theta^\alpha - \theta^\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \frac{dg_{\beta\alpha}}{g_{\beta\alpha}} = d\log(g_{\beta\alpha})$ per la (3.7), e $g_{\beta\alpha} = g^{-1}_{\alpha\beta}$, risulta

$$\gamma_1^2([\nabla]) = [\{d\log(g_{\alpha\beta})\}] \in H^1(M, \mathcal{K}^1). \tag{6.3}$$

Inoltre, $\gamma_2^2 : H^1(M, \mathcal{K}^1) \to H^2(M, \mathbb{C})$ è un isomorfismo dato dall'operatore di cobordo ∂_2 relativo alla successione esatta lunga in coomologia associata alla successione esatta corta (6.1). Nuovamente, dal Lemma del Serpente abbiamo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, C^{\infty}_{M,\mathbb{C}}) \ni \{\log(g_{\alpha\beta})\} & \xrightarrow{d} & \{d\log(g_{\alpha\beta})\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{K}^1) \to 0 \\
 & & \downarrow & & \\
0 \to \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}_M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, C^{\infty}_{M,\mathbb{C}}) \ni \{z_{\alpha\beta\gamma}\} & &
\end{array}$$

dove

$$z_{\alpha\beta\gamma} = \log(g_{\beta\gamma})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} - \log(g_{\alpha\gamma})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} + \log(g_{\alpha\beta})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma}.$$

Pertanto

$$[L] = \gamma_2([\nabla]) = [\{z_{\alpha\beta\gamma}\}] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}_M).$$

Dalla Proposizione 10.4 del Capitolo 4 segue dunque che

$$c_1(L) = \frac{i}{2\pi}\gamma_2([\nabla]) \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}_M),$$

da cui la tesi. □

7. Teoria di Chern-Weil

7.1. Polinomi Invarianti. Indichiamo con $\mathsf{Mat}(k, \mathbb{C})$ lo spazio delle matrici $k \times k$ con entrate complesse.

DEFINIZIONE 7.1. Un funzione $P : \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tale che sia polinomiale nelle entrate delle matrici si dice un *polinomio invariante* se

$$P(C^{-1}AC) = P(A)$$

per ogni matrice $A \in \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C})$ e ogni matrice $G \in \mathsf{GL}(k,\mathbb{C})$. Lo spazio dei polinomi invarianti si indica con $\mathfrak{Inv}(k)$.

ESEMPIO 7.2. Se A è una matrice $k \times k$ si può definire

$$\det(I+tA) = \sum_{j=0}^{k} \sigma_j(A) t^j.$$

Le $\sigma_j : \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ sono polinomi invarianti, in particolare essi sono le funzioni simmetriche elementari degli autovalori di A. Infatti, se J è la forma di Jordan di A, allora $J = CAC^{-1}$ per qualche matrice invertibile C. E se $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di A (e di J) si ha

$$\begin{aligned}\det(I+tA) &= \det(C^{-1}(I+tJ)C) = \det(I+tJ) = \prod(1+t\lambda_j) \\ &= 1 + t(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) + t^2 \sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k + \ldots + t^k(\lambda_1 \cdots \lambda_k).\end{aligned}$$

da cui si vede che, indicando con $M(j)$ l'insieme dei minori principali $j \times j$ di A,

$$\sigma_j(A) = \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_j \le k} \lambda_{l_1} \cdots \lambda_{l_j} = \sum_{M \in M(j)} \det M,$$

in particolare

$$\sigma_0(A) = 1, \quad \sigma_1(A) = \mathsf{tr} A, \quad \ldots, \quad \sigma_k(A) = \det A.$$

7.1.1. *Formula di polarizzazione.* Una applicazione m-lineare simmetrica $\tilde{P} : \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ si dice *invariante* se per ogni $C \in \mathsf{GL}(k,\mathbb{C})$ si ha

$$\tilde{P}(C^{-1}A_1C, \ldots, C^{-1}A_mC) = \tilde{P}(A_1, \ldots, A_m)$$

per ogni $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C})$.

Ad ogni applicazione m-lineare simmetrica invariante $\tilde{P} : \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è associato un unico polinomio invariante *omogeneo* di grado m dato da $P(A) := \tilde{P}(A, \ldots, A)$.

Viceversa, sia $P : \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un polinomio omogeneo invariante di grado m. Allora esiste una unica applicazione m-lineare simmetrica invariante $\tilde{P} : \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \times \ldots \times \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tale che $P(A) = \tilde{P}(A, \ldots, A)$ per ogni $A \in \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C})$. Tale $\tilde{P}$ è definita dalla *formula di polarizzazione* nel modo seguente. Per $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{Mat}(k,\mathbb{C})$ sia $T(A_1, \ldots, A_m)$ il coefficiente di $t_1 \cdots t_m$ nell'espansione del polinomio $P(t_1A_1 + \ldots + t_mA_m)$. Allora

$$\tilde{P}(A, \ldots, A) := \frac{1}{m!} T(A_1, \ldots, A_m).$$

7.2. L'omomorfismo di Weil. In questa sezione supponiamo M sia una varietà (reale o complessa) e E un fibrato con fibra complessa di rango k munito di una connessione ∇. Fissiamo un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M trivializzante per E e su ciascun aperto scegliamo una base $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ di sezioni di $E|_{U_\alpha}$. In tali basi siano $\{\theta_\alpha\}$ le matrici di 1-forme di connessione di

∇ e $\{K^\alpha\}$ le matrici di 2-forme di curvatura di ∇. Siano infine $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di E. Abbiamo visto dalla (3.6) che $K^\alpha = g_{\alpha\beta}K^\beta g_{\beta\alpha}$.

Notiamo che se ω, ω' sono 2-forme, il prodotto wedge è commutativo, ovvero $\omega \wedge \omega' = \omega' \wedge \omega$. Pertanto, se $P : \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ è una funzione polinomiale nelle entrate, si può ben definire $P(\Theta)$ per ogni matrice $k \times k$ di 2-forme Θ.

ESEMPIO 7.3. Sia $P(A) = a_{11}a_{12}a_{13}$, dove abbiamo posto $A = (a_{ij}) \in \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C})$. Se $\Theta = (\omega_{ij})$ è una $k \times k$ matrice di 2-forme, risulta $P(\Theta) = \omega_{11} \wedge \omega_{12} \wedge \omega_{13}$.

Dato $P \in \mathfrak{Inv}(k)$ risulta pertanto $P(K^\alpha) = P(K^\beta)$ per ogni α, β. Pertanto per ogni $P \in \mathfrak{Inv}(k)$ le $\{P(K^\alpha)\}$ definiscono una forma globale su M, denotata $P(\nabla)$, il cui grado dipende dal grado del polinomio. In particolare se P è un polinomio invariante omogeneo di grado m, allora $P(\nabla)$ è una forma di grado $2m$.

PROPOSIZIONE 7.4. *Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa di rango k su M. Sia $P \in \mathfrak{Inv}(k)$. Allora*

(1) *per ogni connessione ∇ per E vale $dP(\nabla) = 0$.*
(2) *Se ∇, ∇' sono due connessioni per E, esiste una forma differenziale $P(\nabla, \nabla')$ su M tale che $P(\nabla) - P(\nabla') = dP(\nabla, \nabla')$.*

Per dimostrare la Proposizione ci occorrono due lemmi:

LEMMA 7.5. *Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa di rango k su M. Sia ∇ una connessione per E. Fissato $x \in M$ esiste un intorno U di x e una base $\{e_1, \ldots, e_k\}$ di $E|_U$ tale che la matrice di uno-forme di connessione θ di ∇ rispetto a $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ha la proprietà che*

$$\theta(x) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo un intorno U_α di x tale che $E|_{U_\alpha}$ sia banale e sia $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ una base di E su U. Sia θ_α la matrice di uno-forme per ∇ rispetto alla base $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$.

Se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è un'altra base di E in un intorno $U \subset U_\alpha$ di x e θ è la matrice di uno-forme rispetto a tale base, per la (1.3) si ha $\theta = g^{-1}dg + g^{-1}\theta^\alpha g$ dove $g : U \to \mathsf{GL}(k, \mathbb{C})$ è una funzione C^∞ che rappresenta il cambiamento di base. Pertanto, $\theta(x) = 0$ equivale a $g^{-1}(x)dg_x + g^{-1}(x)\theta^\alpha(x)g(x) = 0$, ovvero

$$dg_x + \theta^\alpha(x)g(x) = 0.$$

Questa equazione ha chiaramente soluzione definita su un intorno U di x tale che g sia una matrice $k \times k$ invertibile con entrate C^∞ su U. Ad esempio, possiamo prendere g la soluzione al problema di Cauchy

$$\begin{cases} dg_q = -\theta^\alpha(q) \\ g(x) = \mathsf{id} \end{cases}$$

Per costruzione, se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è la base ottenuta cambiando base tramite g da $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$, la matrice di uno-forme di connessione in tale base è $\theta = g^{-1}dg + g^{-1}\theta^\alpha g$, e in x risulta $\theta(x) = 0$. $\square$

LEMMA 7.6. *Sia $\tilde{P}$ una forma m-lineare simmetrica invariante. Siano η, θ delle uno-forme su un aperto U e sia K una due forma su U. Allora*

$$\tilde{P}(\eta \wedge \theta + \theta \wedge \eta, K, \ldots, K) = (m-1)\tilde{P}(\eta, \theta \wedge K - K \wedge \theta, K, \ldots, K). \tag{7.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Per prima cosa, fissate $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C})$ si consideri la funzione $f : \mathsf{GL}(k, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(g) := \tilde{P}(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_mg^{-1}).$$

Per l'invarianza, $f(g) = f(\mathsf{id})$. Scriviamo $g = \mathsf{id} - H$ per qualche $H \in \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C})$. Allora espandendo nelle variabili H si ottiene $g^{-1} = (\mathsf{id} - H)^{-1} = \mathsf{id} + H + O(2)$. Da questo segue

$$\begin{aligned}
f(g) &= \tilde{P}((\mathsf{id} - H)A_1(\mathsf{id} - H)^{-1}, \ldots, (\mathsf{id} - H)A_m(\mathsf{id} - H)^{-1}) \\
&= \tilde{P}((\mathsf{id} - H)A_1(\mathsf{id} + H), \ldots, (\mathsf{id} - H)A_m(\mathsf{id} + H)) + O(2) \\
&= \tilde{P}(A_1 + A_1H - HA_1, \ldots, A_m + A_mH - HA_m) + O(2) \\
&= \tilde{P}(A_1, \ldots, A_m) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{P}(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_jH - HA_j, A_{j+1}, \ldots, A_m) + O(2).
\end{aligned}$$

Da qui segue che

$$\tilde{P}(A_1H - HA_1, A_2, \ldots, A_m) = -\sum_{j=2}^{m} \tilde{P}(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_jH - HA_j, A_{j+1}, \ldots, A_m). \tag{7.2}$$

Ora, per dimostrare la (7.1), per la m-linearità di $\tilde{P}$, basta provare

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}(\eta \wedge \theta + \theta \wedge \eta, K_2, \ldots, K_m) \\
&\qquad = \sum_{j=2}^{m} \tilde{P}(\eta, K_2, \ldots, K_{j-1}, \theta \wedge K_j - K_j \wedge \theta, K_{j+1}, \ldots, K_m)
\end{aligned} \tag{7.3}$$

per $\eta = \psi A_1$, $\theta = \omega H$ e $K_j = \kappa_j A_j$, $j = 2, \ldots, m$ con $A_j, H \in \mathsf{Mat}(k, \mathbb{C})$, $\psi, \omega \in C^\infty(M; \bigwedge^1 M)$ e $\kappa_j \in C^\infty(M; \bigwedge^2 M)$. Tenendo conto che $\kappa_j \wedge \omega = \omega \wedge \kappa_j$ e $\psi \wedge \omega = -\omega \wedge \psi$, si osservi che

$$\begin{aligned}
\eta \wedge \theta + \theta \wedge \eta &= \psi \wedge \omega A_1H + \omega \wedge \psi HA_1 = \psi \wedge \omega(A_1H - HA_1) \\
\theta \wedge K_j - K_j \wedge \theta &= \omega \wedge \kappa_j HA_j - \kappa_j \wedge \omega A_jH = -\kappa_j \wedge \omega(A_jH - HA_j), \quad j = 2, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(\eta\wedge\theta+\theta\wedge\eta, K_2,\dots,K_m) &= \tilde{P}(\psi\wedge\omega(A_1H-HA_1),\kappa_2A_2,\dots,\kappa_mA_m)\\
&= \tilde{P}(A_1H-HA_1,A_2,\dots,A_m)\psi\wedge\omega\wedge\kappa_2\dots\wedge\kappa_m\\
&\overset{(7.3)}{=} -\sum_{j=2}^{m}\tilde{P}(A_1,\dots,A_{j-1},A_jH-HA_j,A_{j+1},\dots,A_m)\psi\wedge\omega\wedge\kappa_2\dots\wedge\kappa_m\\
&= \sum_{j=2}^{m}\tilde{P}(\psi A_1,\kappa_2A_2,\dots,\kappa_{j-1}A_{j-1},-\kappa_j\wedge\omega(A_jH-HA_j),\kappa_{j+1}A_{j+1},\dots,\kappa_mA_m)\\
&= \sum_{j=2}^{m}\tilde{P}(\eta,K_2,\dots,K_{j-1},\theta\wedge K_j-K_j\wedge\theta,K_{j+1},\dots,K_m),
\end{aligned}$$

ovvero vale la (7.3) e dunque il risultato è provato. □

Possiamo adesso dimostrare la Proposizione 7.4:

DIMOSTRAZIONE PROPOSIZIONE 7.4. (1) Per linearità dell'operatore d, possiamo supporre P omogeneo di grado m. Sia $x\in M$. Proveremo che $(dP(\nabla))(x)=0$. Siano $\{\theta^\alpha\}$ le matrici di uno-forme di connessione per E rispetto a qualche base e $\{K^\alpha\}$ le matrici di curvatura rispetto alle stesse basi locali. Sia α l'indice tale che $x\in U_\alpha$. Poiché $P(K^\alpha)$ è invariante per cambiamenti di base locale di E, per il Lemma 7.5, si può supporre che $\theta^\alpha(x)=0$.

Sia $\tilde{P}$ la forma m-lineare simmetrica invariante ottenuta polarizzando P. Allora per linearità

$$dP(K^\alpha)=d\tilde{P}(K^\alpha,\dots,K^\alpha)=\sum\tilde{P}(K^\alpha,\dots,dK^\alpha,\dots,K^\alpha).$$

Dalla prima identità di Bianchi (5.1) si ottiene

$$\tilde{P}(K^\alpha,\dots,dK^\alpha,\dots,K^\alpha)=\tilde{P}(K^\alpha,\dots,\theta^\alpha\wedge K^\alpha-K^\alpha\wedge\theta^\alpha,\dots,K^\alpha).$$

Dunque

$$\tilde{P}(K^\alpha(x),\dots,\theta^\alpha(x)\wedge K^\alpha(x)-K^\alpha(x)\wedge\theta^\alpha(x),\dots,K^\alpha(x))=0,$$

che prova l'enunciato.

(2) Siano ∇,∇' due connessioni per E. Poniamo $\Psi:=\nabla'-\nabla$. Dalla definizione di connessione, per ogni $f\in C^\infty_M(U)$ e $e\in\mathcal{E}(U)$, risulta

$$\Psi(fe)=\nabla'(fe)-\nabla(fe)=df\otimes e+f\nabla'e-df\otimes e-f\nabla e=f\Psi(e),$$

ovvero Ψ è una sezione globale di $T^*M\otimes E^*\otimes E=\Omega^1(E)\otimes E^*$.

Per $t\in[0,1]$ si definisce una connessione ∇^t per E nel modo seguente:

$$\nabla^t=(1-t)\nabla+t\nabla'=\nabla+t\Psi.$$

Fissiamo un aperto U sul quale E sia triviale e una base di E. Siano θ,θ',θ^t le matrici di uno-forme di connessione di ∇,∇',∇^t rispetto alla base fissata. E similmente denotiamo con K,K',K^t le matrici di due forme di curvatura rispetto a tale base. Si noti che $\theta=\theta^0$, $\theta'=\theta^1$ e

$K = K^0, K' = K^1$. Inoltre, denotiamo con η la $k \times k$ matrice di uno-forme di Ψ relativa alla base di E fissata. Si noti che cambiando base per una matrice invertibile g, la matrice associata a Ψ è $g\eta g^{-1}$, essendo una sezione di $T^*M \otimes E^* \otimes E$. Per costruzione si ha

$$\theta^t = \theta + t\eta.$$

Dalla formula di struttura (3.3) si ha $K^t = d\theta^t + \theta^t \wedge \theta^t$. Le matrici di uno-forme θ^t dipendono in modo C^∞ da t e dunque possono essere derivate rispetto a t. Si osservi che $\frac{\partial}{\partial t}(\theta^t \wedge \theta^t) = \frac{\partial \theta^t}{\partial t} \wedge \theta^t + \theta^t \wedge \frac{\partial \theta^t}{\partial t}$. Inoltre, la derivazione rispetto a t commuta con l'operatore d, e dunque

$$\begin{aligned}\frac{\partial K^t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(d\theta^t + \theta^t \wedge \theta^t) = d\frac{\partial \theta^t}{\partial t} + \frac{\partial \theta^t}{\partial t} \wedge \theta^t + \theta^t \wedge \frac{\partial \theta^t}{\partial t} \\ &= d\eta + \eta \wedge \theta^t + \theta^t \wedge \eta.\end{aligned}$$

Sia ora P un polinomio omogeneo invariante di grado m e sia $\tilde{P}$ la forma simmetrica m-lineare data dalla formula di polarizzazione. Dunque

$$\begin{aligned}P(K') - P(K) = P(K^1) - P(K^0) &= \int_0^1 \frac{\partial P(K^t)}{\partial t} dt \\ &\overset{\text{polarizzazione}}{=} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{P}(K^t, \ldots, K^t)}{\partial t} dt \\ &\overset{\text{linearità}}{=} \sum \int_0^1 \tilde{P}(K^t, \ldots, \frac{\partial K^t}{\partial t}, \ldots, K^t) dt \\ &\overset{\text{simmetria}}{=} m \int_0^1 \tilde{P}(\frac{\partial K^t}{\partial t}, K^t, \ldots, K^t) dt \\ &= m \int_0^1 \tilde{P}(d\eta, K^t, \ldots, K^t) dt + m \int_0^1 \tilde{P}(\eta \wedge \theta^t + \theta^t \wedge \eta, K^t, \ldots, K^t) dt \\ &\overset{(7.1)}{=} m \int_0^1 \tilde{P}(d\eta, K^t, \ldots, K^t) dt \\ &+ m(m-1) \int_0^1 \tilde{P}(\eta, \theta^t \wedge K^t - K^t \wedge \theta^t, \ldots, K^t) dt \\ &\overset{\text{Bianchi(5.1)}}{=} m \int_0^1 \tilde{P}(d\eta, K^t, \ldots, K^t) dt + m(m-1) \int_0^1 \tilde{P}(\eta, dK^t, \ldots, K^t) dt \\ &\overset{\text{lin.+simm.}}{=} m \int_0^1 d(\tilde{P}(\eta, K^t, \ldots, K^t)) dt = d\left(m \int_0^1 \tilde{P}(\eta, K^t, \ldots, K^t) dt\right).\end{aligned}$$

Si noti che cambiando base di E per una matrice invertibile g risulta

$$\tilde{P}(g\eta g^{-1}, gK^t g^{-1}, \ldots, gK^t g^1) = \tilde{P}(\eta, K^t, \ldots, K^t)$$

e dunque $\tilde{P}(\eta, K^t, \ldots, K^t)$ non dipende dalla base di E scelta e definisce una $2m-1$ forma su M. Ponendo

$$P(\nabla, \nabla')|_U := m \int_0^1 \tilde{P}(\eta, K^t, \ldots, K^t) dt$$

si ha la tesi. $\square$

DEFINIZIONE 7.7. Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa di rango k su M. Sia $P \in \mathfrak{Inv}(k)$. Allora si definisce

$$P(E) := [P(\nabla)] \in H^{2*}_{dR}(M)$$

dove ∇ è una qualsiasi connessione per E.

Si osservi che per la Proposizione 7.4 la classe $P(E)$ è ben definita e non dipende dalla connessione scelta per definirla.

Se dotiamo $\mathfrak{Inv}(k)$ della naturale struttura di algebra ottenuta moltiplicando i polinomi invarianti e $\bigoplus_j H^*_{dR}(M)$ della struttura di algebra data nella Osservazione 5.11 del Capitolo 3, il morfismo

$$\mathfrak{W}_E : \mathfrak{Inv}(k) \to H^{2*}_{dR}(M)$$

definito da $\mathfrak{W}_E(P) := [P(E)]$ è un morfismo di algebre e si chiama l'*omomorfismo di Weil*.

7.3. Classi di Chern. Si consideri il polinomio invariante $c \in \mathfrak{Inv}(k)$ definito da

$$c(A) = \det(I + \frac{i}{2\pi} A).$$

DEFINIZIONE 7.8. Sia E un fibrato con fibra complessa di rango k su M. La classe $c(E)$ si dice la *classe di Chern totale* del fibrato E.

Se σ_j sono le funzioni simmetriche elementari degli autovalori di una $k \times k$ matrice definite nell'Esempio 7.2, poniamo

$$c_j(E) := \sigma_j(\frac{i}{2\pi} E) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^j \sigma_j(E).$$

Si noti che

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_k(E).$$

DEFINIZIONE 7.9. La classe $c_j(E) \in H^{2j}_{dR}(M)$ si dice la j-sima *classe di Chern* di E.

ESEMPIO 7.10. Sia E il fibrato banale di rango k su M, $E \simeq M \times \mathbb{C}^k$. Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base di E su M. Sia ∇ la connessione banale su E, ovvero $\nabla e_j = 0$ per $j = 1, \ldots, k$. Si noti che, rispetto alla base scelta, la matrice di uno-forme di connessione è identicamente zero, e cosi dunque la matrice di due-forme di curvatura. In particolare $c(E) = 1$, ovvero $c_j(E) = 0$ per ogni $j > 0$.

Vediamo come si comportano le classi di Chern rispetto alle operazioni tra fibrati.

PROPOSIZIONE 7.11. *Sia M una varietà.*

(1) *Se L è un fibrato vettoriale di rango uno su M, allora $c_1(L)$ coincide con al classe di Chern definita tramite la coomologia di Čech.*
(2) *(Formula di Whitney) Se E, F sono due fibrati vettoriali su M allora $c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$.*
(3) *Se $f : N \to M$ è liscia e E è un fibrato vettoriale di rango k su M si ha $f^*(c_j(E)) = c_j(f^*E)$ per ogni j.*
(4) *Se E è un fibrato vettoriale complesso di rango k su M e L è un fibrato di rango uno su M, risulta $c_1(E \otimes L) = c_1(E) + kc_1(L)$.*
(5) *Se E è un fibrato vettoriale di rango k su M, risulta $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$ per $j = 0, \ldots, k$.*
(6) *Per ogni fibrato vettoriale E risulta $c_1(E) = c_1(\det(E))$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Segue subito dal Teorema 6.3.

(2) Se ∇ è una connessione per E e ∇' è una connessione per F, poniamo su $E \oplus F$ la naturale connessione $\nabla \oplus \nabla'$. Se $\{K^\alpha\}$ sono le 2-forme di curvatura di ∇ rispetto ad un insieme di basi locali $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ per E e $\{K'^\alpha\}$ sono le 2-forme di curvatura di ∇' rispetto ad un insieme di basi locali $\{{e'_1}^\alpha, \ldots, {e'_l}^\alpha\}$ per F, allora nelle basi locali $\{{e_1}^\alpha \oplus 0, \ldots, {e_k}^\alpha \oplus 0, 0 \oplus {e'_1}^\alpha, \ldots, 0 \oplus {e'_l}^\alpha\}$ di $E \oplus F$ la matrice delle 2-forme di curvatura è data dalla (4.1). Pertanto $\det(I + K''_\alpha) = \det(I + K_\alpha) \wedge \det(I + K'_\alpha)$, da cui segue subito l'enunciato.

(3) Se ∇ è una connessione per E, dotiamo f^* della connessione pull-back $f^*(\nabla)$. Poiché se $\{K^\alpha\}$ sono le matrici di 2-forme di curvatura di ∇ rispetto a qualche base locale di E, per definizione la connessione pull-back ha matrici di 2-forme di curvatura $\{f^*(K^\alpha)\}$, la tesi segue subito.

(4) Sia ∇ una connessione per E e sia ∇' una connessione per L. Dotiamo $E \otimes L$ della connessione naturale $\nabla \otimes 1 + \mathsf{id} \otimes \nabla'$. Allora, dall'Esempio 4.1, la matrice di 2-forme di curvatura rispetto alla base naturale è $K^\alpha + K'^\alpha \mathsf{id}$ (essendo K^α la matrice di 2-forme di curvatura di ∇ e K'^α la 2-forma di curvatura di ∇' rispetto a qualche base). Pertanto $c_1(E \otimes L)$ è determinato dalla classe della 2-forma definita su ciascun U_α da

$$\frac{i}{2\pi}[\mathsf{tr}(K^\alpha + K'^\alpha \mathsf{id})] = \frac{i}{2\pi}[\mathsf{tr}(K^\alpha) + kK'^\alpha],$$

da cui segue la formula.

(5) Sia ∇ una connessione per E e dotiamo E^* della connessione duale ∇^*. Allora l'enunciato segue subito dalla Osservazione 4.3.

(6) Data una connessione ∇ per E, dotando $\det(E)$ della connessione naturale, il risultato segue subito dalla (3.4). □

OSSERVAZIONE 7.12. Dalla Formula di Whitney segue che se E è un fibrato vettoriale di rango k e F è un fibrato vettoriale di rango r allora

$$\begin{aligned} c(E \oplus F) &= (1 + c_1(E) + \ldots + c_k(E)) \cdot (1 + c_1(F) + \ldots + c_r(F)) \\ &= 1 + (c_1(E) + c_1(F)) + (c_1(E) \cdot c_1(F) + c_2(E) + c_2(F)) + \ldots, \end{aligned}$$

da cui, in particolare, $c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F)$.

ESERCIZIO 7.13. Sia E un fibrato vettoriale di rango k su M. Si provi che $c_1(\mathsf{End}(E,E)) = c_1(E \otimes E^*) = 0$.

DEFINIZIONE 7.14. Sia M una varietà. Poniamo

$$c_j(M) := c_j(TM) \in H^{2j}_{dR}(M).$$

La classe $c_j(M)$ si dice la j-sima classe di Chern di M.

ESEMPIO 7.15. Dalla successione esatta di Eulero (Teorema 12.7 del Capitolo 2), tensoriazzando per $\mathcal{O}(1)$ si ottiene la successione esatta di fibrati

$$0 \to \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C} \to (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}) \otimes \mathcal{O}(1) \to T\mathbb{CP}^n \to 0.$$

Poiché $(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1}) \otimes \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}$ (come si può verificare facilmente guardando le funzioni di transizione) e la successione spezza in modo C^∞ per il Corollario 10.20 del Capitolo 4, si ha

$$T\mathbb{CP}^n \oplus (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}) = \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}.$$

Dunque $c(T\mathbb{CP}^n \oplus (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C})) = c(\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)})$. Per la Proposizione 7.11.(2), risulta

$$c(\mathcal{O}(1)^{\oplus(n+1)}) = c(\mathcal{O}(1))^{(n+1)} = (1 + c_1(\mathcal{O}(1)))^{(n+1)}.$$

E similmente

$$c(T\mathbb{CP}^n \oplus (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C})) = c(T\mathbb{CP}^n)c((\mathbb{CP}^n \times \mathbb{C})) = c(T\mathbb{CP}^n).$$

Pertanto

$$c(T\mathbb{CP}^n) = (1 + c_1(\mathcal{O}(1)))^{(n+1)}.$$

Dalla formula binomiale si ricava poi $c(T\mathbb{CP}^n) = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} c_1(\mathcal{O}(1))^m$ e confrontando i gradi delle forme

$$c_m(\mathbb{CP}^n) := c_m(T\mathbb{CP}^n) := \binom{n+1}{m} c_1(\mathcal{O}(1))^m, \quad m = 0, \dots, n. \tag{7.4}$$

CAPITOLO 6

Teoremi di annullamento di classi caratteristiche

1. Classi di Chern come ostruzione all'esistenza di sezioni globali

In questa sezione si prova che le classi di Chern sono "ostruzioni al primo ordine" all'esistenza di sezioni globali linearmente indipendenti di un fibrato vettoriale. Vale infatti

TEOREMA 1.1. *Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa di rango k su una varietà M. Se E ammette $m \leq k$ sezioni globali linearmente indipendenti in ogni punto, allora $c_j(E) = 0$ per $j = k - m + 1, \ldots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $e_1, \ldots, e_m$ le sezioni globali di E linearmente indipendenti in ogni punto e sia E' il sottofibrato di E generato da esse, ovvero E_x è lo spazio vettoriale generato da $\{e_1(x), \ldots, e_m(x)\}$. La successione esatta corta

$$0 \to E' \to E \to E/E' \to 0.$$

spezza in modo C^∞, dunque $E = E' \oplus E/E'$ (isomorfismo di fibrati vettoriali C^∞). Poiché E' è globalmente banale, $c(E') = 1$. Dalla formula di Whitney, Proposizione 7.11 del Capitolo 5 , risulta allora

$$c(E) = c(E') \cdot c(E/E') = c(E/E') = 1 + c_1(E/E') + \ldots + c_{k-m}(E/E'),$$

dunque $c_j(E) = 0$ per $j > k - m$. □

ESEMPIO 1.2. Non esistono campi di vettori C^∞ mai nulli su $\mathbb{CP}^n$. Infatti, un tale vettore sarebbe una sezione C^∞ di $T\mathbb{CP}^n$ mai nulla. Per il Teorema 1.1 ciò implicherebbe che $c_n(T\mathbb{CP}^n) = 0$, contraddicendo la (7.4) del Capitolo 5.

2. Connessioni Parziali

Sia E un fibrato con fibra complessa di rango k su una varietà M di dimensione n. Sia $Q \subset TM$ un sottofibrato di rango m. Indichiamo con $\Omega^1_Q(\mathcal{E})$ il fascio delle sezioni C^∞ del fibrato $Q^* \otimes E$.

Osserviamo che esiste un naturale morfismo di fibrati vettoriale suriettivo

$$\pi_Q : T^*M \to Q^*,$$

ottenuto dualizzando il morfismo di immersione $Q \hookrightarrow TM$.

DEFINIZIONE 2.1. Una *connessione parziale* ∇ *per* E *lungo* Q è un morfismo $\mathbb{C}$-lineare

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1_Q(\mathcal{E})$$

tale che per ogni aperto $U \subset M$, $f \in C^\infty_M(U)$ e $e \in \mathcal{E}(U)$ risulta

$$\nabla(fe) = \pi_Q(df) \otimes e + f\nabla e.$$

Con ovvi cambiamenti, tutta la teoria svolta per le connessioni vale per le connessioni parziali. In particolare ricalcando quanto fatto nella sezione 2 del Capitolo 5, si può definire $J^1_Q E$, il *fibrato degli uno getti di* E *lungo* Q. Questo è ottenuto, come fascio di gruppi abeliani tramite $J^1_Q(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \oplus \Omega^1_Q(\mathcal{E})$ e come fascio di C^∞_M-moduli tramite

$$f(e \oplus \omega) = fe \oplus (\pi_Q(df) \otimes e + f\omega),$$

essendo $e \in \mathcal{E}(U)$, $\omega \in \Omega^1_Q(\mathcal{E})(U)$, $f \in C^\infty_M(U)$. Si ha la successione esatta

$$0 \to \Omega^1_Q(\mathcal{E}) \to J^1_Q(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to 0, \tag{2.1}$$

da cui risulta che $J^1_Q(\mathcal{E})$ è localmente libero e il fibrato vettoriale associato è $J^1_Q E$. Analogamente a quanto fatto nella Proposizione 2.3 del Capitolo 5 si prova che *ogni spezzamento della successione esatta corta* (2.1) *determina una connessione parziale per* E *lungo* Q *e viceversa.* In particolare, poiché le successione di C^∞_M-moduli localmente liberi spezzano, si ha

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia E un fibrato su M e sia $Q \subset TM$ un sottofibrato. Allora esistono connessioni parziali per E lungo Q.*

La Proposizione 2.2 si può anche dimostrare direttamente utilizzando le partizioni dell'unità.

DEFINIZIONE 2.3. Sia E un fibrato vettoriale su M. Sia $Q \subset TM$ un sottofibrato. Sia ∇ una connessione parziale per E lungo Q e sia ∇' una connessione per E. Si dice che ∇' *estende* ∇ se per ogni $v \in Q_p$ e per ogni $p \in M$, risulta $\nabla'_v = \nabla_v$.

PROPOSIZIONE 2.4. *Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa su M. Siano $Q, Q' \subset TM$ due sottofibrati tali che $Q_x \cap Q'_x = \{0\}$ per ogni $x \in M$. Sia ∇ una connessione parziale per E lungo Q e sia ∇' una connessione parziale per E lungo Q'. Allora esiste una unica connessione parziale ∇'' per E lungo $Q \oplus Q'$ che estende ∇, ∇', ovvero tale che $\nabla'' v = \nabla_v$ per ogni $v \in Q_x$ e $\nabla''_v = \nabla'_v$ per ogni $v \in Q'_x$, per ogni $x \in M$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha la successione esatta corta

$$0 \to Q \to TM \to TM/Q \to 0.$$

Questa spezza in modo C^∞ e dunque possiamo scrivere $TM = Q \oplus H$. Similmente, poiché $Q'_x \cap Q_x = \{0\}$ per ogni $x \in M$, risulta essere esatta la successione

$$0 \to Q' \to H \to H/Q' \to 0.$$

Dunque, in modo C^∞ abbiamo $TM = Q \oplus Q' \oplus H'$ per un certo sottofibrato H. Siano $\rho_Q : TM \to Q$ e $\rho_{Q'} : TM \to Q'$ le naturali proiezioni definite dalla $TM = Q \oplus Q' \oplus H'$. Allora si definisce

$$\nabla''_v := \nabla_{\rho_Q(v)} \oplus \nabla'_{\rho'_Q(v)} \quad v \in Q \oplus Q'.$$

Poiché $\pi_{Q\oplus Q'} = \pi_Q \oplus \pi'_Q : T^*M \to Q^* \oplus Q'^*$, si verifica immediatamente che ∇'' è la connessione voluta. □

Notiamo infine che ogni connessione parziale si può estendere ad una connessione:

PROPOSIZIONE 2.5. *Sia E un fibrato vettoriale su M. Sia $Q \subset TM$ un sottofibrato e sia ∇ una connessione parziale per E lungo Q. Allora esiste una connessione ∇' per E che estende ∇, ovvero tale che $\nabla'_v = \nabla_v$ per ogni $v \in Q_x$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha la successione esatta corta

$$0 \to Q \to TM \to TM/Q \to 0.$$

Questa spezza in modo C^∞ e dunque possiamo scrivere $TM = Q \oplus H$. Per la Proposizione 2.2 esiste una connessione parziale $\tilde\nabla$ per E lungo H. Per la Proposizione 2.4 esiste una unica connessione parziale per E lungo $Q \oplus H = TM$ che estende $\nabla, \tilde\nabla$, cioè una connessione per E che estende ∇, come volevasi. □

Se ∇ è una connessione parziale per E lungo $Q \subset TM$, si può estendere la connessione ∇ come

$$\nabla : \Omega^p_Q(\mathcal{E}) \to \Omega^{p+1}_Q(\mathcal{E})$$

tramite

$$\nabla(\omega \otimes e) := \pi_Q(d\omega) \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla e,$$

per $\omega \in \Omega^p_Q(U)$, $e \in \mathcal{E}(U)$, dove qua π_Q denota la proiezione $\pi_Q : \bigwedge^p M \to \bigwedge^p Q^*$.

Si può allora definire la *curvatura* $R := \nabla \circ \nabla : \mathcal{E} \to \Omega^2_Q(\mathcal{E})$. Si verifica come in Proposizione 3.3 che R è C^∞-lineare, ovvero è una sezione del fibrato $E^* \otimes E \otimes (Q^* \wedge Q^*)$.

Nel caso di sottofibrati involutivi vale la formula di Ricci:

PROPOSIZIONE 2.6 (Identità di Ricci per connessioni parziali). *Sia $Q \subset TM$ un sottofibrato involutivo, ovvero $[Q,Q] \subset Q$. Sia ∇ una connessione parziale per il fibrato vettoriale E lungo Q. Sia R la sua curvatura. Allora per ogni $v, w \in Q_p$ e $s \in \mathcal{E}_p$ risulta*

$$R(v,w)s = \nabla_v(\nabla_w s) - \nabla_w(\nabla_v s) - \nabla_{[v,w]}s.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 2.5 si può estendere ∇ ad una connessione ∇' per E. L'identità di Ricci (Proposizione 3.6) vale per ∇'. Ma, se $v, w \in Q$, poichè Q è involutivo, allora $[v,w] \in Q$. Essendo $\nabla'_v = \nabla_v$, $\nabla'_w = \nabla_w$, $\nabla'_{[v,w]} = \nabla_{[v,w]}$ per $v, w \in Q$, si ha l'enunciato. □

3. Connessioni su fibrati olomorfi e teorema di annullamento di Bott

In questa sezione supponiamo che M sia una varietà complessa di dimensione complessa n ed E sia un fibrato olomorfo di rango k su M.

Utilizzando le notazioni complesse, $TM \simeq T^{1,0}M$ indica il fibrato olomorfo (cioè le derivazioni di germi di funzioni olomorfe) mentre per come definito in precedenza $\Omega^1(\mathcal{E})$ è il fascio delle sezioni C^∞ del fibrato $(\bigwedge^1 M^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}) \otimes E$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n ed E sia un fibrato olomorfo di rango k su M. Allora esiste una naturale connessione parziale per E lungo $T^{0,1}M$, che denotiamo con $\overline{\partial}_E$, tale che per ogni $s \in \mathcal{O}_M(U; E)$ risulta $\overline{\partial}_E s = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo definire $\overline{\partial}_E : \mathcal{E} \to \Omega^1_{T^{0,1}M}(\mathcal{E})$. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento che trivializza E, e siano $\{e_1^\alpha, \dots, e_k^\alpha\}$ delle basi locali *olomorfe* di $E|_{U_\alpha}$, ovvero $e_j^\alpha : U_\alpha \to E_{U_\alpha}$ è olomorfa per ogni j, α. Si noti che $e_i^\alpha = \sum_h g^{hi}_{\beta\alpha} e_h^\beta$ su $U_\alpha \cap U_\beta$ con $g^{hi}_{\beta\alpha} \in \mathcal{O}^*_M(U_\alpha \cap U_\beta)$. Definiamo

$$\overline{\partial}_E(f e_j^\alpha) := \overline{\partial} f \otimes e_j^\alpha$$

per ogni α, j e $f \in C^\infty_M(U_\alpha)$. Proviamo che $\overline{\partial}_E$ è ben definito.

Sia $e \in \mathcal{E}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Allora $e = \sum_j a_j^\alpha e_j^\alpha = \sum_j a_j^\beta e_j^\beta$, con $a_j^\alpha, a_j^\beta : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}$ funzioni C^∞. Essendo $\overline{\partial} g^{hi}_{\beta\alpha} = 0$ per ogni i, h, si ha

$$\overline{\partial}_E e = \sum_j \overline{\partial} a_j^\alpha \otimes e_j^\alpha = \sum_j \overline{\partial} a_j^\alpha \otimes \sum_h g^{hj}_{\beta\alpha} e_h^\beta = \sum_h \overline{\partial}(\sum_j g^{hj}_{\beta\alpha} a_j^\alpha) \otimes e_h^\beta = \sum_h \overline{\partial} a_h^\beta \otimes e_h^\beta,$$

che prova che $\overline{\partial}_E$ è ben definito. Le proprietà di $\overline{\partial}_E$ seguono allora immediatamente dalla sua definizione. □

DEFINIZIONE 3.2. Sia E un fibrato olomorfo su una varietà complessa M. Una connessione ∇ per E si dice una *connessione di tipo* $(1,0)$ se ∇ estende la connessione parziale $\overline{\partial}_E$ per E lungo $T^{0,1}M$.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia E un fibrato olomorfo su una varietà complessa M. Allora esistono connessioni di tipo $(1,0)$ per E.*

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla Proposizione 3.1 e dalla Proposizione 2.5 del Capitolo 5. □

PROPOSIZIONE 3.4. *Sia E un fibrato olomorfo su una varietà complessa M. Una connessione ∇ per E è di tipo $(1,0)$ se e solo se per ogni sezione olomorfa $s \in \mathcal{O}_M(E)(U)$ e per ogni $v \in C^\infty(U, T^{(0,1)}M)$ risulta $\nabla_v s = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che ∇ sia di tipo $(1,0)$. Se $s = \sum a_j e_j$ per $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base olomorfa locale di E, e a_j funzioni olomorfe, per definizione

$$\nabla_v s = (\overline{\partial}_E s) v = \sum \overline{\partial}_E(a_j e_j)(v) = \sum_j (\overline{\partial} a_j)(v) \otimes e_j = 0.$$

Viceversa, se $\nabla_v s = 0$ per ogni sezione olomorfa s e vettore v di tipo $(0,1)$, data f è una funzione C^∞ e $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base olomorfa locale di E, risulta per v vettore di tipo $(0,1)$

$$\nabla_v(fe_j) = df(v) \otimes e_j + f\nabla_v e_j = \partial f(v)e_j + \overline{\partial} f(v)e_j = \overline{\partial} f(v)e_j,$$

essendo $\nabla_v e_j = 0$ per ipotesi e $\partial f(v) = 0$ per costruzione. Dunque $\nabla_v = (\overline{\partial}_E)_v$ per ogni $v \in T^{(0,1)}M_p$ e pertanto ∇ è una connessione di tipo $(1,0)$. $\square$

Il nome connessione di tipo $(1,0)$ è giustificato dalla seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia E un fibrato olomorfo su una varietà complessa M. Sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di M e sia $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$ una base locale di sezioni olomorfe di $E|_{U_\alpha}$. Sia ∇ una connessione per E con uno-forme di connessione $\{\theta^\alpha\}$ rispetto alle basi $\{e_1^\alpha, \ldots, e_k^\alpha\}$. Allora ∇ è una connessione di tipo $(1,0)$ se e solo se $\theta_{ij}^\alpha \in C^\infty(U_\alpha; \bigwedge^{(1,0)} M)$ per ogni α e per ogni $i, j = 1, \ldots, k$.*

DIMOSTRAZIONE. Se ∇ è una connessione di tipo $(1,0)$ poiché $\nabla_v e_j^\alpha = 0$ per ogni $v \in T_p^{(0,1)}M$, $p \in U$, per l'Osservazione 3.4, risulta che $\theta_{ij}^\alpha \in C^\infty(U_\alpha; \bigwedge^{(1,0)} M)$. Viceversa, se le uno-forme di connessione soddisfano la condizione, sia $v \in T^{(0,1)}M$ e $s = \sum a_j^\alpha e_j^\alpha$ sezione olomorfa di E (dunque a_j^α funzioni olomorfe). Abbiamo $\theta_{ij}^\alpha(v) = 0$ essendo θ_{ij}^α forme di tipo $(1,0)$ e v vettore di tipo $(0,1)$. Inoltre $da_j^\alpha = \partial a_j^\alpha + \overline{\partial} a_j^\alpha = \partial a_j^\alpha$ e pertanto $da_j^\alpha(v) = \partial a_j^\alpha(v) = 0$. Dunque

$$\nabla_v s = \sum_j \nabla_v a_j^\alpha e_j^\alpha = \sum_j da_j^\alpha(v)e_j^\alpha + \sum_{jh} \theta_{hj}^\alpha(v)e_h^\alpha = 0,$$

che, per la Proposizione 3.4, prova che ∇ è di tipo $(1,0)$. $\square$

OSSERVAZIONE 3.6. Sia E un fibrato olomorfo su una varietà complessa M. Sia ∇ una connessione di tipo $(1,0)$ per E. Sia K la matrice di due forme di curvatura rispetto ad una base olomorfa di E su un aperto U. Allora K non ha entrate con componenti di tipo $(0,2)$. Infatti dalla Proposizione 3.5 la matrice di uno forme di connessione θ ha entrate di tipo $(1,0)$. Dall'equazione di struttura $K = d\theta + \theta \wedge \theta$ e dunque, $d\theta = (\partial + \overline{\partial})\theta$ è di tipo $(1,1)$ e $(2,0)$ mentre $\theta \wedge \theta$ è di tipo $(2,0)$.

Se il fibrato E è olomorfo, ha senso parlare di connessioni parziali olomorfe per E, la definizione formale è la seguente. Ricordiamo che se M è una varietà complessa e TM indica il fibrato tangente olomorfo (ovvero le derivazioni di germi di funzioni olomorfe), TM è isomorfo (come fibrato C^∞) in modo naturale a $T^{(1,0)}M$ (si veda il Lemma 13.4 del Capitolo 2). Denotiamo con $\iota : TM \to T^{(1,0)}M$ tale isomorfismo.

DEFINIZIONE 3.7. Sia E un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà complessa M. Sia $F \subset TM$ un sottofibrato. Una connessione parziale per E lungo $\iota(F) \subset T^{(1,0)}M$ si dice *olomorfa* se per ogni sezione olomorfa $s \in \mathcal{O}(E)(U)$ su un aperto U si ha che ∇s è una sezione olomorfa del fibrato $F^* \otimes E$ su U.

Nel seguito, ometteremo sempre di indicare l'isomorfismo ι se non indispensabile e quindi denoteremo con F sia il sottofibrato di TM sia la sua immagine in $T^{(1,0)}M$.

Per enunciare il teorema di annullamento di Bott ci occorre un'altra definizione:

DEFINIZIONE 3.8. Sia E un fibrato vettoriale con fibra complessa su una varietà complessa M di dimensione complessa n. Sia $F \subset TM^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ un sottofibrato complesso *involutivo*. Una connessione parziale ∇ per E lungo F si dice *piatta* se $K(v,w) = 0$ per ogni $v, w \in F_p$ per ogni $p \in M$ (dove K indica la curvatura della connessione parziale ∇).

TEOREMA 3.9 (Bott). *Sia E un fibrato vettoriale olomorfo di rango complesso k su una varietà complessa M di dimensione n. Sia $F \subseteq TM$ un sottofibrato di rango (complesso) ℓ. Sia ∇ una connessione parziale per E lungo F. Allora*

(1) $c_h(E) = 0$ *per ogni* $h \geq n - \ell + [\frac{\ell}{2}] + 1$.
(2) *Se inoltre F è involutivo e la connessione ∇ è piatta, allora $c_h(E) = 0$ per ogni* $h \geq n - \ell + 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 2.4 e la Proposizione 2.5, esiste una connessione ∇' di tipo $(1,0)$ per E che estende ∇. Fissiamo un aperto di U su cui E e TM sono banali e sia $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$ una base di F su U. Siano $v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ sezioni di $T^{(1,0)}M$ su U tali che $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_n\}$ è una base di $T^{(1,0)}M$ su U. Sia $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\}$ una base di $T^{(0,1)}M$ su U. Sia $\{\xi'_1, \ldots, \xi'_\ell, v'_{\ell+1}, \ldots, v'_n\}$ la base di $T^{(1,0)}M^*$ su U duale di $\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_n\}$. Dunque $\xi'_j(\xi_h) = \delta^j_h$, $\xi'_j(v_h) = 0$, $v'_j(\xi_h) = 0$ e $v'_j(v_h) = \delta^j_h$. Sia infine $\{d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n\}$ la base canonica di $T^{(0,1)}M^*$.

Sia $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base olomorfa di E su U. Sia $K' = (K'_{jh})$ la matrice di curvatura di ∇' rispetto a tale base. Allora

$$\begin{aligned} K'_{jh} = & \sum_{t_1,t_2=1,\ldots,\ell} A^{jh}_{t_1t_2}\xi'_{t_1} \wedge \xi'_{t_2} + \sum_{t_1=1,\ldots,\ell, t_2=\ell+1,\ldots,n} B^{jh}_{t_1t_2}\xi'_{t_1} \wedge v'_{t_2} + \sum_{t_1,t_2=\ell,\ldots,n} C^{jh}_{t_1t_2} v'_{t_1} \wedge v'_{t_2} \\ & + \sum_{t_1,=1,\ldots,\ell, t_2=1,\ldots,n} D^{jh}_{t_1t_2}\xi'_{t_1} \wedge d\overline{z}_{t_2} + \sum_{t_1=\ell+1,\ldots,n, t_2=1,\ldots,n} H^{jh}_{t_1t_2} v'_{t_1} \wedge d\overline{z}_{t_2} \\ & + \sum_{t_1,t_2=1,\ldots,n} G^{jh}_{t_1t_2} d\overline{z}_{t_1} \wedge d\overline{z}_{t_2}, \end{aligned}$$

per certe funzioni $A^{jh}_{t_1t_2}, B^{jh}_{t_1t_2}, C^{jh}_{t_1t_2}, D^{jh}_{t_1t_2}, H^{jh}_{t_1t_2}, G^{jh}_{t_1t_2}$ di classe C^∞ su U.

Dalla Osservazione 3.6 si ha

$$G^{jh}_{t_1t_2} \equiv 0$$

per ogni h, j, t_1, t_2. Per costruzione poi, se R' è la curvatura di ∇', si ha

$$R(\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}})e_h = \sum_j K'_{jh}(\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}})e_j = \sum_j D^{jh}_{t_1t_2} e_j, \quad t_1 = 1, \ldots, \ell, t_2 = 1, \ldots, n.$$

Per la formula di Ricci

$$R'(\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}})e_h = \nabla'_{\xi_{t_1}}(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}} e_h) - \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}}(\nabla'_{\xi_{t_1}} e_h) - \nabla'_{[\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}]} e_h.$$

Ora, essendo ∇' una connessione di tipo $(1,0)$ risulta $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}} e_h \equiv 0$. Inoltre, poichè $\nabla'_{\xi_{t_1}} = \nabla_{\xi_{t_1}}$ e ∇ è una connessione parziale olomorfa, si che $\nabla_{\xi_{t_1}} e_h$ è una sezione olomorfa di E su U e dunque

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}}(\nabla'_{\xi_{t_1}} e_h) = \nabla'_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}}(\nabla_{\xi_{t_1}} e_h) \equiv 0.$$

Infine, poichè $[T^{(1,0)}M, T^{(0,1)}M] = 0$, risulta $\nabla'_{[\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}}]} = 0$. Da qui segue che $R'(\xi_{t_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{t_2}})e_h = 0$ e dunque

$$D^{jh}_{t_1 t_2} \equiv 0$$

per $t_1 = 1, \ldots, \ell$, $t_2 = 1, \ldots, n$ e $j, h = 1, \ldots, k$.

Dunque le entrate di K' sono due forme date da combinazioni lineari a coefficienti C^∞ di

$$\xi'_{t_1} \wedge \xi'_{t_2}, \quad \xi'_{t_1} \wedge v'_{t_2}, \quad v'_{t_1} \wedge v'_{t_2}, \quad v'_{t_1} \wedge d\overline{z}_{t_2}. \tag{3.1}$$

Dunque prendendo prodotti wedge di più di $n - \ell + [\frac{\ell}{2}]$ di questi elementi si ottiene zero. Pertanto, per definizione di $c_h(E)$ si ottiene la (1).

Per dimostrare la (2), si osserva che se F è involutivo e la connessione parziale ∇ è piatta, dalla lista (3.1) si tolgono le due forme di tipo $\xi'_{t_1} \wedge \xi'_{t_2}$ (essendo $K(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}) = 0$ per ogni $t_1, t_2 = 1, \ldots, \ell$. Pertanto i prodotti wedge di piú di $n - \ell$ di tali elementi è zero, e dunque vale la (2).

$\square$

Bibliografia

1. R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and application.* Applied Mathematical Science 75, Springer, New York 1988.
2. R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1982.
3. V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli Ed., Milano 1977.
4. D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1994.
5. S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, AMS Chelsea Publ., Providence, 1962.
6. C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli ed., Bologna 1989.
7. B. Scárdua, C. Morales, *Geometry, dynamics and topology of foliated manifolds*, Publicacoes Matemáticas, 24^o Colóquio Brasileiro de Matematica, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.