Università degli Studi di Bologna
Seminari di Geometria 1998-1999
Vol. 12, 1-35, Bologna 2000.

Mappe Olomorfe Che Commutano

FILIPPO BRACCI
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata,
Università degli Studi di Padova, Via Belzoni 7,
35131 Padova, Italia.
E-mail:fbracci@math.unipd.it

ABSTRACT. After a review of previous results, we prove the following theorem†: Let D be a strictly linearly convex domain with C^3 boundary. Let $f, g : D \to D$ be holomorphic maps without fixed points in D such that $f \circ g = g \circ f$. Then f and g have the same Wolff point, unless their restrictions to the unique (up to parametrization) complex geodesic whose closure contains the Wolff points of f and g, are two commuting (hyperbolic) automorphisms of such a geodesic.

PREMESSA Lo scopo di queste note è quello di generalizzare a *domini strettamente linearmente convessi* un risultato sui punti di Wolff di mappe olomorfe che commutano per composizione, ottenuto dall'autore per domini strettamente convessi. Inoltre per rendere il risultato comprensibile anche dai non-specialisti, premettiamo una introduzione alle questioni e principali teoremi riguardanti mappe olomorfe che commutano.

Conferenza tenuta il 20 Maggio 1998 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

† This result is original and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

INTRODUZIONE

Siano f e g due funzioni olomorfe del disco $\Delta := \{z \in \mathbf{C} | |z| < 1\}$ in sé e supponiamo che $f \circ g = g \circ f$, ovvero che f e g commutino per composizione. Se $f(0) = 0$ dal *Lemma di Schwarz* segue che f non ha altri punti fissi in Δ, a meno che f sia la funzione identica. Pertanto

$$g(0) = g(f(0)) = f(g(0))$$

e $g(0)$ risulta essere un punto fisso per f, dunque $g(0) = 0$. Questo semplice fatto dipende dalla struttura olomorfa di f e g, e non è una sorta di teorema di punto fisso di Brouwer. Infatti, analoghi risultati sono falsi per f e g funzioni C^∞ (si veda a questo proposito [HUN], [BOY]). Se f ha un punto fisso diverso da 0, il risultato segue coniugando f e g con un automorfismo conforme di Δ che trasporta il punto fisso di f in 0. Nel caso in cui f non abbia punti fissi in Δ, un teorema di Wolff e Denjoy (il *Lemma di Wolff*) predice l'esistenza di un punto al bordo, il *punto di Wolff* di f, a cui la successione $\{f^k\}$ delle iterate di f, definite per ricorrenza da $f^0 := id$, $f^k := f^{k-1} \circ f$, converge[1]. Pertanto, nel caso in cui f (e per il Lemma di Schwarz, anche g) non ha punti fissi, esiste $\tau \in \partial\Delta$ tale che $\lim_{k\to\infty} f^k(z) = \tau$ per ogni $z \in \Delta$. Se in più g e f sono continue su $\partial\Delta$, se ne deduce che

$$\lim_{k\to\infty} g(f^k(0)) = \lim_{k\to\infty} f^k(g(0)) = \tau.$$

Dunque $g(\tau) = \tau$. Dato che inoltre $f(f^k(0)) = f^k(f(0))$, il ragionamento precedente mostra che $f(\tau) = \tau$, e abbiamo trovato un punto fisso comune anche in questo caso. Ricapitolando, se $f, g \in Hol(\Delta, \Delta)$ si estendono con continuità su $\partial\Delta$ e $f \circ g = g \circ f$ allora esiste $x \in \overline{\Delta}$ tale che $f(x) = g(x) = x$ (questo risultato è dovuto a Shields [SH]). Togliendo l'ipotesi di continuità al bordo, si può ancora parlare di punti fissi, a patto di intendendere *fissi* per limiti non-tangenziali. Nel caso in cui f non abbia punti fissi interni l'idea è quella di provare che il punto di Wolff $\tau \in \partial\Delta$ di f è un punto fisso per limiti non-tangenziali sia per f

---

[1] nel senso che $\{f^k\}$ converge nella topologia della convergenza uniforme sui compatti di Hol($\Delta, \overline{\Delta}$) alla mappa costante che porta il disco nel punto di Wolff di f.

che per g, ovvero che per ogni successione $\{w_k\}$ che tende a τ in modo non-tangenziale allora $\{f(w_k)\}$ e $\{g(w_k)\}$ tendono a τ. Questo può essere fatto utilizzando il lemma di Julia, oppure costruendo una curva *ad hoc* che tende a τ per cui f e g abbiano limite τ e appellandosi poi al teorema di Lindelöf. In queste note utilizzeremo il primo metodo, sfruttando una versione metrica del lemma di Julia che possa poi essere facilmente generalizzata a dimensioni maggiori.

Se f e g non hanno punti fissi interni allora anche g ha un suo punto di Wolff. Ragionando come sopra, si può pensare quindi di ottenere due punti fissi (per limiti non-tangenziali) per f e g dati rispettivamente dal punto di Wolff di f e da quello di g. Ebbene, la struttura olomorfa, nelle vesti di una sorta di Lemma di Schwarz al bordo, implica che se f e g hanno punti di Wolff diversi e commutano, allora f e g sono automorfismi di Δ, detti *iperbolici* ([BE]). In definitiva *se f e g sono funzioni olomorfe dal disco in sé che commutano per composizione allora esiste un punto fisso comune ad entrambe*, dove, se il punto si trova sul bordo, è da intendersi fisso nel senso dei limiti non-tangenziali. Inoltre *f e g hanno lo stesso punto di Wolff, a meno che siano due automorfismi iperbolici del disco.*

In queste note vedremo in quale misura sia possibile estendere il precedente risultato (noto anche come Teorema di Behan-Shields) a domini in $\mathbf{C}^n$ per $n > 1$, ottenendo in un certo senso la massima generalizzazione naturale.

Il lavoro è organizzato nel modo seguente. Nel primo paragrafo si spiega in modo più dettagliato, mettendo l'accento su questioni metriche indipendenti dalla dimensione, quanto accennato in questa Introduzione sul Lemma di Schwarz e conseguenze nel caso del disco. In particolare si introduce la metrica di Poincaré e si discutono il Lemma di Schwarz-Pick, il Lemma di Wolff e due versioni del Lemma di Julia (versione classica e versione metrica). Utilizzando la versione metrica del Lemma di Julia si provano i Teoremi di Shields e di Behan. Si dá poi una nuova semplice dimostrazione, basata sul Teorema di Behan, di un teorema di Heins [HE] che caratterizza le mappe che commutano con gli automorfismi iperbolici del disco. Nell'ultima parte del paragrafo si accenna alla costruzione di Cowen che consente di dare condizioni sufficienti affinché due funzioni olomorfe commutino per composizione. Nel secondo paragrafo si estrapolano le proprietà geometriche del disco che consentono di determinare l'esistenza di punti fissi al bordo per limite non-tangenziale e si generalizzano i risultati del caso unidimensionale ad una vasta classe di domini in

$\mathbf{C}^n$. In particolare, dopo aver introdotto la metrica di Kobayashi come corrispettivo della metrica di Poincaré del disco, si definisce una nuova classe di domini tramite proprietà metriche che generalizzano il Lemma di Wolff e di Julia (a questa classe appartengono ad esempio la palla unità di $\mathbf{C}^n$ e i domini strettamente pseudoconvessi contrattili). Per tale classe di domini si prova poi un risultato alla Shields senza ipotesi di regolarità al bordo. Terminiamo il paragrafo ricordando il Teorema di Abate e Vigué [AB-VI] che, in caso di continuità al bordo, prova l'esistenza di punti fissi comuni per mappe olomorfe che commutano in domini (debolmente) convessi limitati. Nel terzo paragrafo si studiano le relazioni tra i punti di Wolff (definiti in modo simile al caso unidimensionale) di mappe olomorfe che commutano e che sono prive di punti fissi interni. Si illustra la differenza dal caso del disco con un esempio nella palla unità di $\mathbf{C}^n$ per $n > 1$ di mappe olomorfe non-automorfismi che commutano ma che hanno punti di Wolff diversi. Si mostra poi come tale esempio sia in un certo senso "unico", stabilendo un teorema di rigidità alla Behan nella palla. Tramite questo risultato si ottiene una generalizzazione ([deF-GE]) del Teorema di Heins. Infine, dopo aver introdotto le geodetiche complesse, si enuncia e si prova il Teorema annunciato nell'*abstract*. L'ultimo paragrafo contiene note finali e commenti.

L'autore ringrazia il Prof. Coen per l'invito a tenere la conferenza da cui questo lavoro ha preso spunto.

I. IL LEMMA DI SCHWARZ E CONSEGUENZE

Indichiamo con $\Delta := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Il nostro punto di partenza è il seguente:

Lemma di Schwarz: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa e $f(0) = 0$. Allora, per ogni $z \in \Delta$

$$|f(z)| \leq |z| \tag{I.1}$$

e

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{I.2}$$

Inoltre vale l'uguaglianza in (I.1) per un $z \neq 0$ (e quindi per tutti) e in (I.2) se e solo se esiste $\theta \in \mathbf{R}$ tale che $f(z) = e^{i\theta} z$.

Definiamo la *metrica di Poincaré* o *metrica iperbolica* ρ come

$$\rho_z := \frac{dz \otimes d\overline{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

La metrica iperbolica è una metrica riemanniana di curvatura costante -4. Indichiamo con κ_Δ la lunghezza associata a ρ, ovvero, se $v \in \mathbf{C}$, poniamo:

$$\kappa_\Delta(z; v) := \frac{|v|}{(1 - |z|^2)}.$$

La *distanza di Poincaré* o *distanza iperbolica* ω è la forma integrata di κ_Δ, ovvero, per $z, w \in \Delta$

$$\omega(z, w) := \inf \int_0^1 \kappa_\Delta(\gamma(t); \gamma'(t))dt$$

dove l'inf è preso rispetto a tutte le curve C^1 a tratti che uniscono z a w e sono contenute in Δ.

Utilizzando il fatto che la coniugazione complessa e le rotazioni sono isometrie per κ_Δ, si ha che la distanza iperbolica tra 0 e z è ottenuta integrando lungo un segmento da 0 a z, e tramite un calcolo diretto si ottiene il seguente:

Lemma I.1: Per ogni $z \in \Delta$ risulta:

$$\omega(0, z) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

Consideriamo la seguente funzione (per $w \in \Delta$ fissato):

$$\Phi_w(z) := \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

Essa è un automorfismo del disco (cioè un omeomorfismo olomorfo del disco con inversa olomorfa) che trasporta w in 0. Dunque il gruppo degli automorfismi, Aut(Δ), opera transitivamente sul disco e dato che per il Lemma di Schwarz gli automorfismi che tengono fissa l'origine sono solo le rotazioni, si ottiene una completa classificazione:

Lemma di classificazione di Aut(Δ): Se γ è un automorfismo del disco, allora esistono $\lambda \in \partial\Delta$ e $w \in \Delta$ tali che

$$\gamma(z) = \lambda \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

In particolare ogni automorfismo del disco si estende analiticamente in un intorno di Δ, e la sua restrizione al bordo è un omeomorfismo di $\partial\Delta$.

Si può inoltre provare che $\mathrm{Aut}(\Delta)$ agisce *bitransitivamente* su $\partial\Delta$. Dal Lemma di Classificazione si possono dividere gli elementi di $\mathrm{Aut}(\Delta)$ diversi dall'identità in tre famiglie: gli automorfismi *ellittici* che hanno uno (ed uno solo) punto fisso interno, gli automorfismi *parabolici* che non hanno punti fissi in Δ ed hanno un unico punto fisso su $\partial\Delta$ e gli automorfismi *iperbolici* che non hanno punti fissi in Δ e hanno due punti fissi distinti su $\partial\Delta$.

Utilizzando la transitività di $\mathrm{Aut}(\Delta)$ si può stabilire un Lemma di Schwarz indipendente dall'origine e, utilizzando il linguaggio metrico sopra introdotto, si ottiene:

Lemma di Schwarz-Pick: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa. Allora per ogni $z, w \in \Delta$

$$\omega(f(z), f(w)) \leq \omega(z, w), \tag{$I.1'$}$$

e

$$f^*(\rho) \leq \rho. \tag{$I.2'$}$$

Inoltre vale l'uguaglianza per qualche $z \neq w$ (e quindi per ogni coppia di punti) in (I.1$'$) o in (I.2$'$) se e solo se $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

Per una più approfondita trattazione della metrica iperbolica si rimanda il lettore ai libri di Vesentini [VE1], Abate [AB1] e Jarnicki-Plugg [JA-PL].

Una prima conseguenza del Lemma di Schwarz-Pick è la seguente:

Proposizione I.2: Siano $f, g : \Delta \to \Delta$ tali che $f \circ g = g \circ f$ e supponiamo che $f(a) = a$, $a \in \Delta$. Allora, se $f \neq id_\Delta$, $g(a) = a$.

Dim. Supponiamo $g(a) \neq a$. Poiché f commuta con g, risulta

$$g(a) = g(f(a)) = f(g(a)),$$

e $g(a)$ è un punto fisso per f, dunque

$$\omega(a, g(a)) = \omega(f(a), f(g(a))).$$

Pertanto per il Lemma di Schwarz-Pick f è un automorfismo di Δ con due punti fissi, ovvero f è l'identità sul disco. QED

Nel caso in cui f non è un automorfismo e $f(a) = a$ per un certo $a \in \Delta$, dal Lemma di Schwarz-Pick, definendo $f^k := f^{k-1} \circ f$ e $f^1 = f$, segue che $\lim_{k\to\infty} f^k(z) = a$ per ogni $z \in \Delta$ (in realtà vale per ogni compatto). Ovvero f "schiaccia" il disco nel suo punto fisso interno. Nel caso in cui f non ha punti fissi in Δ vale un risultato analogo (si veda [DEN], [WO] e [AB1]):

Lemma di Wolff: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa senza punti fissi in Δ. Allora la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge uniformemente sui compatti ad una funzione costante $\Delta \ni z \mapsto x$ con $x \in \partial\Delta$.

Con le notazioni del Lemma di Wolff, chiamiamo *punto di Wolff* di f il punto x.

Diversamente a quanto accade per punti fissi interni, che possono essere al più uno, non c'è un analogo per punti "fissi" al bordo: supponiamo che f sia olomorfa da Δ in Δ, senza punti fissi in Δ e sia continua su $\partial\Delta$; allora il punto di Wolff $x \in \partial\Delta$ di f è un punto fisso per f (poichè $\lim_{k\to\infty} f(w_k) = x$ per $w_k := f^k(0) \to x$). Però in generale (si prenda ad esempio un automorfismo iperbolico) f può avere altri punti fissi su $\partial\Delta$. Vale la caratterizzazione seguente:

Caratterizzazione del Punto di Wolff: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa e senza punti fissi. Allora $x \in \partial\Delta$ è il punto di Wolff di f se e solo se:

$$(i) \qquad \lim_{r\to 1} f(rx) = x$$

e

$$(ii) \qquad \liminf_{z\to x} [\omega(0,z) - \omega(0,f(z))] \le 0.$$

La precedente caratterizzazione merita qualche riflessione. La condizione (i) dice che il punto x è un "punto fisso" al bordo, nel senso che, grazie al Teorema di Lindelöf[2], f ha di fatto limite non-tangenziale x in x ed in particolare se f è continua su $\partial\Delta$ allora $f(x) = x$. Per quanto riguarda la condizione (ii), dal Lemma I.1 si ha

$$\omega(0,z) - \omega(0,f(z)) = \frac{1}{2}\log\frac{1-|f(z)|}{1-|z|} + \frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1+|f(z)|}$$

[2] Per una discussione approfondita del *principio di Lindelöf* in analisi complessa si veda [AB2] e [CI-KR].

Passando al limite inferiore, tenendo presente la (i), si ottiene

$$\liminf_{z\to x}[\omega(0,z)-\omega(0,f(z))]=\frac{1}{2}\log\alpha_f(x),$$

dove $\alpha_f(\tau):=\liminf_{z\to\tau}\frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$ per un $\tau\in\partial\Delta$ è classicamente detto *coefficiente di dilatazione al bordo* di f in τ. La condizione (ii) afferma allora che $\alpha_f(x)\leq 1$. Definiamo ora la *orosfera* di centro x e raggio $R>0$ come il disco contenuto in Δ, tangente a $\partial\Delta$ in x e di raggio euclideo $R/(1+R)$. Vale il seguente (si veda [JU],[AB1]):

Lemma di Julia (versione classica): Sia $f:\Delta\to\Delta$ olomorfa e sia $x\in\partial\Delta$. Se $\alpha_f(x)<\infty$ allora esiste $y\in\partial\Delta$ tale che $\forall R>0$

$$f(E(x,R))\subseteq E(y,\alpha_f(x)R).$$

Inoltre vale l'uguale se e solo se $f\in\mathrm{Aut}(\Delta)$, ovvero se e solo se esiste $z\in\partial E(x,R)\bigcap\Delta$ tale che $f(z)\in\partial E(y,\alpha_f(x)R)$.

Le condizioni (i) e (ii) della Caratterizzazione del Punto di Wolff implicano allora che f trasforma orosfere di centro x e raggio $R>0$ in orosfere di centro x e raggio $\leq R$ (questa è, in realtà, la versione classica del Lemma di Wolff). Osserviamo di passaggio che per il Lemma di Julia il coefficiente di dilatazione $\alpha_f(\tau)>0$ per ogni $\tau\in\partial\Delta$ (questo si puó provare anche direttamente dal Lemma di Schwarz, si veda ad es. [AB1]).

Dalla precedente caratterizzazione del punto di Wolff di f risulta che se $y\in\partial\Delta$ è un altro punto "fisso" di f per limiti non-tangenziali, allora il coefficiente di dilatazione di f in y deve essere strettamente maggiore di 1. In realtà è vero molto di più:

Lemma di Behan: Sia $f:\Delta\to\Delta$ olomorfa. Se $\lim_{r\to 1}f(r)=1$, $\lim_{r\to -1}f(r)=-1$, allora

$$\alpha_f(1)\cdot\alpha_f(-1)\geq 1, \tag{$I.3$}$$

dove $\alpha_f(x):=\liminf_{z\to x}\frac{1-|f(z)|}{1-|z|}$ è il coefficiente di dilatazione di f in $x\in\partial\Delta$. Inoltre vale l'uguale in $(I.3)$ se e solo se f è un automorfismo iperbolico di Δ.

Il Lemma di Behan continua a valere con qualsiasi coppia di punti $x,y\in\partial\Delta$, $x\neq y$, al posto di $1,-1$: basta semplicemente coniugare f con un automorfismo del disco che porta x in 1 e y in -1.

DIM. Se i coefficienti di dilatazione di f in $1, -1$ sono finiti (altrimenti il risultato è banalmente vero) allora il Lemma di Julia (versione classica) implica che f trasforma orosfere di centro 1 in orosfere di centro 1 e raggio "dilatato" in funzione di $\alpha_f(1)$ e orosfere di centro -1 in orosfere di centro -1 e raggio "dilatato" in funzione di $\alpha_f(-1)$. Pertanto, prese due orosfere di centro 1 e -1 che contengono il solo 0 nella chiusura (basta scegliere due dischi di raggio euclideo $1/2$ e centri euclidei rispettivamente $-1/2$ e $1/2$) $f(0)$ deve essere contenuto nella chiusura dei due dischi tangenti rispettivamente in -1 e 1 e di raggio euclideo rispettivamente $1/2\frac{2\alpha_f(-1)}{1+\alpha_f(-1)}$ e $1/2\frac{2\alpha_f(1)}{1+\alpha_f(1)}$. Quindi $\alpha_f(1) \cdot \alpha_f(-1) \geq 1$. Se vale l'uguale allora l'asserzione discende dall'ultima parte del Lemma di Julia. QED

Torniamo adesso al problema iniziale: $f, g : \Delta \to \Delta$ olomorfe diverse dall'identità, $f \circ g = g \circ f$ e f senza punti fissi (che come abbiamo già notato implica g senza punti fissi). Supponiamo che f e g siano continue su $\partial\Delta$. Se $x \in \partial\Delta$ è il punto di Wolff di f, ponendo $w_k := f^k(0)$, si ha che $w_k \to x$ e inoltre

$$\lim_{k\to\infty} f(w_k) = \lim_{k\to\infty} f^{k+1}(0) = x,$$

$$\lim_{k\to\infty} g(w_k) = \lim_{k\to\infty} f^k(g(0)) = x,$$

dove le due equazioni seguono dal Lemma di Wolff e dal fatto che f e g commutano. Pertanto $f(x) = g(x) = x$, e abbiamo dimostrato il

Teorema di Shields: Se $f, g : \Delta \to \Delta$ sono olomorfe, continue su $\partial\Delta$ e commutano per composizione, allora esiste $x \in \overline{\Delta}$ tale che $f(x) = g(x) = x$.

Un attento esame degli ingredienti utilizzati nella dimostrazione del Teorema di Shields mostra che se omettiamo l'ipotesi di continuità al bordo di f e g, allora, con le notazioni del Teorema, x è un "punto fisso" per f e g lungo la successione w_k. Ovviamente questo non basta a determinare l'esistenza di limiti lungo curve. Di fatto il Teorema di Lindelöf afferma che se g ha limite x lungo una curva continua contenuta in Δ e tendente a x, allora g ha *limite non-tangenziale* x in x. Si potrebbe allora pensare di costruire una curva continua formata dai segmenti che uniscono $f^k(0)$ a $f^{k+1}(0)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) in modo da applicare il procedimento di Shields a questa curva e applicare poi il Teorema di Lindelöf e la Caratterizzazione del Punto di Wolff per ottenere

x come punto fisso per limiti non-tangenziali per f e g. Per dettagli su questo modo di procedere rimandiamo il lettore al lavoro di Shields [SH] e di Behan [BE]. Qui seguiremo una diversa strada. Iniziamo dal seguente

Lemma di Julia *(versione metrica)*: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa. Se $\{w_k\} \subset \Delta$ è una successione tale che $\lim_{k\to\infty} w_k = x \in \partial\Delta$ e

$$(I.4) \qquad \limsup_{k\to\infty}[\omega(0,w_k) - \omega(0,f(w_k))] < \infty,$$

allora esiste $y \in \partial\Delta$ tale che $\lim_{k\to\infty} f(w_k) = y$. Inoltre per ogni altra successione $\{w'_k\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} w'_k = x$ e per cui vale $(I.4)$ con w'_k al posto di w_k, risulta $\lim_{k\to\infty} f(w'_k) = y$. In particolare f ha limite non-tangenziale y in x.

Questa forma del Lemma di Julia merita alcune considerazioni. La condizione $(I.4)$ implica in particolare che il coefficiente di dilatazione $\alpha_f(x)$ è finito. Dunque il Lemma di Julia (versione classica) stabilisce che esiste un punto sul bordo y per cui f ha limite non-tangenziale y in x. D'altra parte tale Lemma non consente, diversamente dalla versione metrica sopra riportata, di individuare il punto y (mentre nel nostro caso questo è il limite della successione $f(w_k)$). Inoltre la versione metrica consente di ottenere non solo limiti non-tangenziali, ma limiti lungo successioni (o curve) per cui vale la $(I.4)$ (tali limiti si dicono *J-limiti* [BR3]). Vedremo come questo sarà determinante nella risoluzione del problema dei punti fissi comuni. Per contro l'enunciato classico di Julia dà informazioni sul comportamento di f applicata alle orosfere di centro x, informazioni che non sono immediatamente ottenibili dalla versione metrica.

Vediamo il Lemma di Julia (versione metrica) all'opera, fornendo la soluzione al problema dei punti fissi comuni nel disco:

Teorema di Behan-Shields: Siano $f, g : \Delta \to \Delta$ tali che $f \circ g = g \circ f$. Allora esiste $a \in \Delta$ tale che $f(a) = g(a) = a$ oppure esiste $x \in \partial\Delta$ tale che f e g hanno limite non-tangenziale x in x.

DIM. Il caso dei punti fissi interni segue dalla Prop. I.2. Supponiamo allora che f non abbia punti fissi in Δ e che $x \in \partial\Delta$ sia il suo punto di Wolff. Poniamo $w_k := f^k(0)$. Allora dal Lemma di Wolff $w_k \to x$. Dato che f e g commutano si ha

$$\lim_{k\to\infty} g(w_k) = \lim_{k\to\infty} f^k(g(0)) = x.$$

Per applicare il Lemma di Julia in versione metrica, occorre provare l'equazione $(I.4)$ (con g al posto di f):

$$\limsup_{k\to\infty}[\omega(0,w_k)-\omega(0,g(w_k))]\leq\limsup_{k\to\infty}\omega(w_k,g(w_k))\leq$$

$$\limsup_{k\to\infty}\omega(f^k(0),f^k(g(0))\leq\omega(0,g(0)),$$

dove per il primo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza triangolare, per il secondo il fatto che f e g commutano e per il terzo il Lemma di Schwarz-Pick. Pertanto il Lemma di Julia assicura che g ha limite non-tangenziale x in x, e ciò vale inoltre per f per la Caratterizzazione del Punto di Wolff e il Teorema di Lindelöf. QED

Guardando la dimostrazione del Teorema di Behan-Shields, ci si accorge che, se f e g non hanno punti fissi in Δ, allora f,g hanno due punti fissi per limite non-tangenziale al bordo: il punto di Wolff di f e quello di g. Inoltre in entrambi questi punti -se diversi- f e g hanno coefficiente di dilatazione finito. Ebbene, se i punti di Wolff di f e di g non coincidono, si riesce a dimostrare che il prodotto dei coefficienti di dilatazione di f (e di g) nei due punti è ≤ 1, e dal Lemma di Behan segue:

Teorema di Behan: Siano $f,g:\Delta\to\Delta$ olomorfe, senza punti fissi in Δ e $f\circ g=g\circ f$. Allora f e g hanno lo stesso punto di Wolff, a meno che f e g siano automorfismi iperbolici di Δ.

Mostriamo brevemente il passaggio culminante della prova: se f e g hanno punti di Wolff diversi, chiamiamo x il punto di Wolff di f e y quello di g, allora $\alpha_g(x)\cdot\alpha_g(y)\leq 1$ (lo stesso ovviamente vale per f). Dalla dimostrazione del Teorema di Behan-Shields segue che $1/2\log\alpha_g(x)\leq\omega(g(0),0)$. In realtà si puó ripetere il ragionamento con un qualsiasi $z\in\Delta$ diverso da 0, dunque

$$\frac{1}{2}\log\alpha_g(x)\leq\inf_{z\in\Delta}\omega(z,g(z)).$$

L'idea è quella di vedere cosa accade per $z=ry$, per $r\to 1^-$. Tenendo presente che gli automorfismi sono isometrie per ω, se $\Phi_{ry}(z)$ è l'automorfismo definito dopo il Lemma I.1 che trasporta ry in 0, dal Lemma I.1 si ottiene:

$$\omega(ry,g(ry))=\omega(0,\Phi_{ry}(g(ry)))=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\Phi_{ry}(g(ry))|}{1-|\Phi_{ry}(g(ry))|}.$$

Si tratta dunque di determinare il $\lim_{r\to 1} |\Phi_{ry}(g(ry))|$. Un calcolo esplicito, con l'aiuto del classico Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory[3] mostra allora che tale limite è $\frac{1-\alpha_g(y)}{1+\alpha_g(y)}$. Da cui $\alpha_g(x) \leq (\alpha_g(y))^{-1}$.

Il Teorema di Behan assicura che le uniche funzioni olomorfe che commutano e che possono avere un diverso comportamento asintotico sono gli automorfismi iperbolici (ad esempio se f è un automorfismo iperbolico con punto di Wolff 1 e -1 l'altro punto fisso, e se g è l'inversa di f , allora f e g commutano, ma g ha punto di Wolff -1). Il Teorema di Behan ha una sorta di reciproco, il Teorema di Heins:

Teorema di Heins: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa e sia γ un automorfismo iperbolico di Δ . Se f commuta con γ , allora f è un automorfismo iperbolico.

DIM. Dato che

$$\gamma^{-1} \circ f = \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma^{-1} \circ \gamma \circ f \circ \gamma^{-1} = f \circ \gamma^{-1},$$

allora f commuta con γ e con γ^{-1} . Ma γ e γ^{-1} hanno punti di Wolff diversi, dunque f ha punto di Wolff diverso da quello di γ o di γ^{-1} . In entrambi i casi per il Teorema di Behan f è un automorfismo iperbolico. QED

Per concludere questa sezione accenniamo alla costruzione di Cowen che consente, almeno in alcuni casi, di dare condizioni sufficienti affinché due funzioni olomorfe del disco in sé commutino per composizione. La costruzione di Cowen si basa sul teorema di uniformizzazione ed è pertanto priva di senso in dimensioni maggiori. Per il resto di questo paragrafo, chiamiamo *punto di Wolff* di una funzione olomorfa $f : \Delta \to \Delta$ diversa dall'identità il punto definito dal Lemma di Wolff se f non ha punti fissi in Δ , o l'unico punto fisso se f ha un punto fisso in Δ . Se inoltre x è il punto di Wolff di f (nel senso ora specificato), denotiamo con $f'(x)$ la derivata usuale se $x \in \Delta$, o il coefficiente di dilatazione di f in x nel caso in cui $x \in \partial\Delta$ (per il teorema di Julia-Wolff-Carathéodory questo comunque coincide con il limite non-tangenziale della f' in x). Seguendo Cowen [CO1],[CO2], definiamo *insieme fondamentale* $V \subset \Delta$

---

[3] Per il Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory si veda [CA]; per il calcolo esplicito del limite si veda il *Lemma 3.6* in [BR3]. Nel paragrafo III svolgeremo comunque per intero un simile calcolo.

per f un aperto V connesso, semplicemente connesso tale che $f(V) \subseteq V$ e tale che per ogni compatto K contenuto in Δ esiste un intero positivo n per cui $f^n(K) \subset V$.

Teorema di Cowen: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa. Supponiamo che $f \notin \mathrm{Aut}(\Delta)$ e f non sia costante. Sia x il punto di Wolff di f e supponiamo che $f'(x) \neq 0$. Allora esiste un insieme fondamentale V per f nel quale f è iniettiva. Inoltre esistono un dominio Ω (che è biolomorfo al piano $\mathbf{C}$ o al disco Δ), una trasformazione lineare fratta Φ che mappa Ω in Ω e una mappa olomorfa $\sigma : \Delta \to \Omega$ tali che σ è iniettiva in V , $\sigma(V)$ è un insieme fondamentale per Φ in Ω e $\sigma \circ f = \Phi \circ \sigma$. Inoltre Φ è unica a meno di coniugio per trasformazioni lineari fratte che mappano Ω su Ω e Φ e σ dipendono solo da f e non da V .

Siano $f, g : \Delta \to \Delta$ olomorfe. Sia x il punto di Wolff di f , e supponiamo $f'(x) \neq 0$. Siano V, Ω, σ e Φ come nel Teorema di Cowen per f . Diciamo che g appartiene allo *pseudo semigruppo di iterazione* di f se esiste una trasformazione lineare fratta Ψ che commuta con Φ e tale che $\sigma \circ g = \Psi \circ \sigma$.

Proposizione I.3: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa, $f \notin \mathrm{Aut}(\Delta)$, f diversa da una costante. Sia x il punto di Wolff di f , $f'(x) \neq 0$. Sia $g : \Delta \to \Delta$ olomorfa appartenente allo pseudo semigruppo di iterazione di f . Allora $f \circ g = g \circ f$ se e solo se esiste un aperto $U \in \Delta$ tale che $g(U)$ e $g(f(U))$ sono contenuti nell'insieme fondamentale di f .

Di fatto la condizione di appartenere allo stesso pseudo semigruppo di iterazione più altre condizioni sul punto di Wolff, consentono di determinare se due mappe commutano. A titolo di esempio riportiamo la seguente proposizione. Il lettore interessato può trovare approfondimenti e generalizzazioni negli articoli di Cowen [CO1]&[CO2], Vlacci [VL1]&[VL2]e Bourdon-Shapiro [BO-SHA] per quanto riguarda i *modelli lineari frazionari*.

Proposizione I.4: Sia $f : \Delta \to \Delta$ olomorfa, $f \notin \mathrm{Aut}(\Delta)$, f diversa da una costante. Sia $g : \Delta \to \Delta$ olomorfa appartenente allo pseudo semigruppo di iterazione di f . Se f e g hanno lo stesso punto fisso (di Wolff) $x \in \Delta$ allora f e g commutano. Se f e g hanno lo stesso punto di Wolff $x \in \partial\Delta$ e se esistono $w_0, z_0 \in \Delta$ tali che le successioni di iterate $\{f^n(z_0)\}$ e $\{g^n(w_0)\}$ convergono a x in modo non-tangenziale, allora f e g commutano.

II. PUNTI FISSI COMUNI DI MAPPE OLOMORFE IN $\mathbf{C}^n$

Nel paragrafo I abbiamo esaminato alcune applicazioni del Lemma di Schwarz nello studio delle funzioni olomore del disco in sé. In particolare il Lemma di Schwarz si è rivelato fondamentale una volta tradotto nel linguaggio della metrica iperbolica. In questo paragrafo, dopo aver introdotto la metrica iperbolica per domini di $\mathbf{C}^n$, estrapoleremo le proprietà che hanno permesso il Teorema di Behan-Shields per ottenerne una generalizzazione a varie classi di domini. Nel caso di ipotesi di regolarità al bordo daremo inoltre una descrizione del metodo di Abate-Vigué per ottenere punti fissi in domini convessi (generalizzazione del Teorema di Shields). Per prima cosa iniziamo con il seguente esempio che dimostra come la ricerca di punti fissi comuni per funzioni olomorfe che commutano non sia cosa banale:

Esempio II.1: Sia $A(r,1) := \{z \in \mathbf{C} : r < |z| < 1\}$ la corona circolare di raggi $0 < r < 1$ e 1. Definiamo $f(z) := \frac{r}{z}$ e $g(z) := -z$. Allora $f, g : A(r,1) \to A(r,1)$ sono olomorfe e $f \circ g = g \circ f$. Inoltre f ha due punti fissi in $A(r,1)$, $\pm\sqrt{r}$, mentre g non ha punti fissi in $\overline{A(r,1)}$. Pertanto f e g non hanno punti fissi comuni.

Per tutto il resto del paragrafo D indicherà un dominio di $\mathbf{C}^n$. La *pseudometrica di Kobayashi* o *pseudometrica iperbolica* è la pseudodistanza sulle fibre $\kappa_D : TD = \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^+$ definita per $z \in D$ e $v \in \mathbf{C}^n$ da

$$\kappa_D(z; v) := \inf\{|\xi| : \exists f \in Hol(\Delta, D) : f(0) = z, df_0(\xi) = v\}.$$

La *pseudodistanza di Kobayashi* o *pseudodistanza iperbolica* è la forma integrata di κ_D, ovvero se $z, w \in D$

$$k_D(z,w) := \inf \int_0^1 \kappa_D(\gamma(t); \gamma'(t))dt,$$

dove l'inf è preso su tutte le curve C^1 a tratti contenute in D che uniscono z e w. Per le proprietà della (pseudo)distanza di Kobayashi si possono consultare, ad es., [AB1], [JA-PL], [KOB], [FRA-VE]. Notiamo che per definizione la pseudodistanza di Kobayashi ha la seguente proprietà: se $f : D \to D$ è olomorfa allora per ogni $z, w \in D$

$$(II.1) \qquad k_D(f(z), f(w)) \le k_D(z,w).$$

Se f è un automorfismo vale inoltre l'uguale in $(II.1)$.

Un attento esame della prova del Teorema di Behan-Shields mostra che sono fondamentali quattro proprietà del disco (e delle funzioni olomorfe del disco in sé):

1) Se una funzione f ha un punto fisso interno x, allora questo è unico ed in particolare esiste $c : \Delta \to \Delta$ olomorfa tale che $c(z) = x$, $\forall z \in \Delta$, $c^2 = c$, ovvero l'insieme dei punti fissi di f è un *retratto olomorfo* del disco.
2) Se f non ha punti fissi allora $\{f^k\}$ è *compattamente divergente*, cioè per ogni due compatti K, K' contenuti in Δ, l'insieme $\{f^k : f^k(K) \bigcap K' \neq \emptyset\}$ è finito.
3) Se $\{f^k\}$ è compattamente divergente, allora converge normalmente, cioè uniformemente sui compatti, ad una costante $c : \Delta \ni z \mapsto x \in \partial\Delta$ [4].
4) Vale la versione metrica del Lemma di Julia.

Facciamo notare che nell'Esempio II.1 la successione delle iterate di g non è compattamente divergente. Diamo ora la seguente definizione, basata sulle considerazioni poc'anzi fatte:

Definizione II.2: Sia D un dominio in $\mathbf{C}^n$. Diremo che:

a) D ha la proprietà D se per ogni $f : D \to D$ olomorfa la successione delle iterate di f è compattamente divergente se e solo se f non ha punti fissi in D.
b) D ha la proprietà W se per ogni $f : D \to D$ olomorfa tale che $\{f^k\}$ è compattamente divergente allora $\{f^k\}$ converge uniformemente sui compatti ad una mappa costante $D \ni z \mapsto c \in \partial D$.
c) D ha la proprietà J se per ogni $f : D \to D$ olomorfa tale che esiste una successione $\{w_k\} \subset D$ convergente ad un punto $x \in \partial D$ per cui esiste $y \in \partial D$ con $f(w_k) \to y$ e

$$(II.2) \qquad \limsup_{k\to\infty}[k_D(z_0, w_k) - k_D(z_0, f(w_k))] < \infty$$

per qualche $z_0 \in D$, allora f ha limite non-tangenziale y in x.

Queste definizioni sono sicuramente artificiose, ma hanno il pregio di essere applicabili a buona parte dei domini che sono generalmente studiati in analisi complessa. In effetti le tre proprietà stabilite sopra prendono

[4] Le proprietà 2) e 3) sono stabilite dal Lemma di Wolff.

il nome dalle controparti unidimensionali che, come visto nel paragrafo I, valgono nel disco: il Lemma di (Denjoy)-Wolff e il Lemma di Julia. In letteratura esistono molti articoli che studiano i domini per cui valgono le proprietà D e W. La proprietà J con riferimento alla metrica iperbolica è stata invece introdotta da Abate ([AB1], [AB2]) come generalizzazione del Lemma classico di Julia sulle orosfere, e successivamente definita in questa forma dall'autore ([BR3], [BR4]). Notiamo che se D è *completo iperbolico*, cioè se k_D è una (vera) distanza completa, allora nell'enunciato della proprietà J la richiesta dell'esistenza di un punto y al bordo a cui $f(w_k)$ converga, è superflua. Infatti se k_D è completa e vale la $(II.2)$ allora l'insieme dei punti di accumulazione di $\{f(w_k)\}$ si trova sul bordo di D; l'unicità del limite non-tangenziale prova che di fatto $\{f(w_k)\}$ converge.
Avvertiamo il lettore che in dimensione $n > 1$ le naturali regioni di approccio al bordo non sono coni (ovvero i limiti non-tangenziali non si presentano in modo naturale), ma sono regioni più vaste che comprendono direzioni tangenti complesse al bordo. Per la richiesta della $(II.2)$ nella proprietà J, è naturale considerare l'approccio con i K-limiti di Abate ([AB1],[AB2],[AB4]), ma si possono benissimo utilizzare i limiti ipoammissibili di Cima e Krantz ([CI-KR]) o i limiti ammissibili di Čirca ([ČIR]) o Stein ([ST]). Non volendo entrare nei dettagli sull'argomento in queste note utilizzeremo soltanto la nozione di limite non-tangenziale al bordo lasciando al lettore volenteroso il compito di generalizzare.

Vediamo adesso come utilizzare le proprietà D,W e J. Se $f : D \to D$ poniamo $\mathrm{Fix}\,(f) := \{z \in D : f(z) = z\}$. Ricordiamo che un *retratto olomorfo* R di un dominio D è l 'immagine di D tramite una *retrazione olomorfa* Θ, ovvero $\Theta : D \to D$ olomorfa, $\Theta^2 = \Theta$ e $R = \Theta(D)$.

Teorema II.3: Sia D un dominio che gode delle proprietà D,W e J. Siano $f, g : D \to D$ olomorfe tali che $f \circ g = g \circ f$. Allora

1) Se $\mathrm{Fix}\,(f) \neq \emptyset$, $\mathrm{Fix}\,(g) \neq \emptyset$ e $\mathrm{Fix}\,(f)$ è un retratto olomorfo[5] di D, allora $\mathrm{Fix}\,(f) \bigcap \mathrm{Fix}\,(g) \neq \emptyset$.
2) Se $\mathrm{Fix}\,(f) = \emptyset$ allora esiste $x \in \partial D$ tale che f e g hanno limite non-tangenziale x in x.

DIM. 1) Dal fatto che $g(z) = g(f(z)) = f(g(z))$ se $z \in \mathrm{Fix}\,(f)$, segue

[5] senza questa ipotesi si può solo dire, con dimostrazione analoga a quella riportata, che l'intersezione delle *varietà limite* di f e g è non vuota. Per la definizione di varietà limite si rimanda a [AB1].

che $g(\operatorname{Fix}(f)) \subset \operatorname{Fix}(f)$. Sia $\Theta : D \to D$ una retrazione olomorfa tale che $\Theta(D) = \operatorname{Fix}(f)$. Allora per definizione di retrazione olomorfa Θ è l'identità se ristretta a $\operatorname{Fix}(f)$. Dunque $g \circ \Theta$ è una mappa olomorfa di $\operatorname{Fix}(f)$ in sé e dato che $(g \circ \Theta)^k = g^k \circ \Theta$, $\{(g \circ \Theta)^k\}$ è non compattamente divergente per la proprietà D e $g \circ \Theta$ ha almeno un punto fisso in D, ovvero g ha un punto fisso in $\Theta(D) = \operatorname{Fix}(f)$.
2) Se f non ha punti fissi, allora per la proprietà D la successione $\{f^k\}$ è compattamente divergente, e per la proprietà W, esiste $x \in \partial D$ tale che $f^k(z) \to x$ per ogni $z \in D$. Fissiamo $z \in D$ e poniamo $w_k := f^k(z)$. Allora $w_k \to x$, $f(w_k) = f^k(f(z)) \to x$ e $g(w_k) = f^k(g(z)) \to x$. Resta dunque solo da provare che la $(II.2)$ è soddisfatta sia per f che per g e applicare la proprietà J. Proviamolo per g, analogamente vale per f:

$$\limsup_{k\to\infty}[k_D(z, w_k) - k_D(z, g(w_k))] \leq \limsup_{k\to\infty} k_D(f^k(z), f^k(g(z))) \leq$$

$$(II.3) \qquad\qquad k_D(z, g(z)) < \infty,$$

dove per il primo passaggio abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare e il fatto che f e g commutano, e per il secondo passaggio abbiamo sfruttato la contraibilità di k_D per mappe olomorfe. QED

Vediamo adesso quali domini, oltre ovviamente al disco, godono delle proprietà D,W e J e per cui vale dunque un Teorema alla Behan-Shields:

Esempio II.4

1) La palla unità per il prodotto hermitiano standard, $\mathbf{B}^n$, ha le proprietà D e W ([HER], [MAC]) e la proprietà J ([RU]), inoltre l'insieme dei punti fissi di ogni mappa olomorfa dalla palla in sé è l'intersezione della palla con un sottospazio affine ([RU]) ed è dunque un retratto olomorfo.
2) ogni dominio convesso ha la proprietà D ([AB1]), ma in generale non gode della proprietà W (si veda ad esempio la mappa $(z, w) \mapsto (z, (w+1)(3-w)^{-1})$ nel bidisco) né della proprietà J (Per un esempio nel bidisco costruito con prodotti di Blaschke si veda [BR4]). Comunque l'insieme dei punti fissi di ogni mappa olomorfa dal convesso in sé è un retratto olomorfo ([VI]).
3) I domini strettamente convessi hanno le proprietà D,W e J ([AB1]).
4) I domini *m-convessi* (cioé i domini convessi per cui in ogni punto il raggio del più grande disco centrato nel punto e inscrivibile nel

dominio è maggiorato dalla potenza $1/m$ della distanza del punto dal bordo) hanno le proprietà D e W ([ME]) e J ([BR4]).

5) I domini debolmente pseudoconvessi in $\mathbf{C}^2$ con bordo analitico reale hanno la proprietà D e W ([ZH-RE]) e godono della proprietà J "per quasi ogni punto" del bordo ([BR4]).
6) I domini fortemente pseudoconvessi contrattili con bordo almeno C^3 hanno la proprietà D e W ([MA], [AB3], [HUA]) e la proprietà J ([BR4]).

Da questi esempi risulta che il Teorema II.3 vale per la palla $\mathbf{B}^n$, per i domini strettamente convessi e m-convessi. Mentre per i domini strettamente pseudoconvessi contrattili vale in generale solo la parte 2) del Teorema II.3. Per i domini (debolmente) convessi il Teorema si applica solo nei casi in cui entrambe le mappe abbiano punti fissi nel dominio. Aggiungendo l'ipotesi di continuità al bordo Abate e Vigué ([AB-VI]) hanno comunque provato la seguente generalizzazione del Teorema di Shields:

Teorema di Abate-Vigué: Sia D un dominio convesso limitato in $\mathbf{C}^n$ e siano $f, g : D \to D$ olomorfe e continue in $\overline{D}$. Se $f \circ g = g \circ f$ allora esiste $x \in \overline{D}$ tale che $f(x) = g(x) = x$.

Cenno di Dimostrazione: Il caso in cui le due mappe hanno punti fissi in D è già stato affrontato. Supponiamo allora che f non abbia punti fissi in D. La dimostrazione si basa allora su di una ingegnosa induzione sulla dimensione del dominio. Per $n = 1$ è il Teorema di Shields. Per $n > 1$ si osservano preliminarmente i seguenti fatti:

1) Se $x \in \partial D$, allora esiste un sottospazio affine complesso L di $\mathbf{C}^n$ (di dimensione $< n$) tale che $L \bigcap D = \emptyset$, $\overline{D} \bigcap L$ è la chiusura di un dominio limitato convesso D_0 di L e $x \in D_0$.
2) Se $D_0 \subset \partial D$ è come in 1), allora f e g sono olomorfe su D_0.
3) Se $h : D \to \partial D$ è olomorfa allora esiste D_0 come in 1) tale che $h(D) \subset D_0$.
4) Se D_0 è come in 1), e se esiste $x \in D_0$ tale che $f(x) \in D_0$, allora $f(D_0) \subseteq D_0$.

La 1) deriva sostanzialmente da Hahn-Banach, data la convessità di D. La 2) è data dalla ipotesi di continuità al bordo, dato che per $z \in D_0$ la successione $f_m(z) := f((1 - 1/m)z)$ è olomorfa su D_0 e converge a f. La 3) e la 4) sono una applicazione del principio di massimo. Per i particolari si rimanda il lettore a [AB-VI]. Il dominio D è limitato e dunque per il Teorema di Montel esiste una sottosuccessione estratta da $\{f^k\}$ che converge ad una mappa olomorfa $h : D \to \overline{D}$. Ma D

è convesso e soddisfa alla proprietà D, quindi $\{f^k\}$ è compattamente divergente e pertanto esiste $D_0 \subset \partial D$ come in 1) tale che $h(D) \subset D_0$. Dato che f e g sono continue su ∂D e commutano con f^k per ogni k , segue che $f(h(z)) = h(f(z))$ e $g(h(z)) = h(g(z))$, dunque per la 4) $f, g : D_0 \to D_0$ sono olomorfe e commutano, e per l'ipotesi induttiva hanno un punto fisso in $\overline{D_0}$. QED

III. PUNTI DI WOLFF DI MAPPE CHE COMMUTANO

In questo paragrafo proveremo un risultato alla Behan per *domini strettamente linearmente convessi* (generalizzando un risultato ottenuto dall'autore per domini strettamente convessi) e proveremo un Teorema alla Heins per automorfismi iperbolici della palla unità $\mathbf{B}^n$ dovuto a Gentili e de Fabritiis. In tutta questa sezione f, g saranno mappe olomorfe da un dominio limitato $D \subset \mathbf{C}^n$ in sé prive di punti fissi interni e $f \circ g = g \circ f$. Supporremo inoltre che D soddisfi alle proprietà D e W e dunque chiameremo *punto di Wolff* di f l'unico punto del bordo a cui converge $\{f^k\}$ (si veda Def.II.2).

Per capire quale possa essere la giusta generalizzazione del Teorema di Behan, consideriamo inizialmente il caso della palla unità $\mathbf{B}^n$:

Esempio III.1: Siano $f, g : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ due mappe olomorfe definite da $f(z_1, \ldots, z_n) = (\gamma(z_1), 0, \ldots, 0)$ e $g(z) := (\gamma^{-1}(z_1), 0, \ldots, 0)$ con γ automorfismo iperbolico di Δ con punti fissi ± 1 . Allora $f \circ g = g \circ f$, f, g non sono automorfismi di $\mathbf{B}^n$, f ha punto di Wolff 1 e g ha punto di Wolff -1 (o viceversa).

Da questo esempio si capisce come aumentando la dimensione diminuisca la rigidità della struttura di mappe che commutano. Nonostante questo, l'esempio precedente rende l'idea di cosa accade. Il vantaggio di lavorare in $\mathbf{B}^n$ è dato dal fatto che la palla possiede, similmente a Δ , un gruppo di automorfismi che si estendono analiticamente al bordo e che agiscono bitransitivamente sul bordo stesso. Dunque se f e g sono mappe olomorfe da $\mathbf{B}^n$ in sé che commutano per composizione e che non hanno lo stesso punto di Wolff, allora, a meno di coniugio con elementi del gruppo degli automorfismi di $\mathbf{B}^n$ si può supporre che f abbia punto di Wolff $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)$ e g abbia punto di Wolff $-e_1$. L'idea è dunque quella di considerare le applicazioni $\varphi : z_1 \to f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ e $\eta : z_1 \to g_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ olomorfe dal disco Δ in sé. Naturalmente queste due funzioni non commutano in generale, però si vede con facilità che φ e η non hanno punti fissi in Δ , che hanno rispettivamente punti di Wolff 1 e -1 e che φ ha punto fisso -1 per limiti non-tangenziali e η ha punto fisso 1 per limiti non-tangenziali. Se riusciamo a provare che il coefficiente di dilatazione di φ in -1 è $\leq$ del coefficiente di dilatazione di φ in 1 (e similmente per η) allora per il Lemma di Behan $f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ e $g_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ sono due automorfismi di Δ e dunque (poiché $f \circ g = g \circ f$) commutano. Una volta provato che $z_1 \mapsto f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ e $z_1 \mapsto g_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ sono due automorfismi iperbolici di Δ, dal fatto che $f(\mathbf{B}^n) \subset \mathbf{B}^n$ e $|f_1(e^{i\theta}, 0, \ldots, 0)| = 1$ segue che $|f_j(e^{i\theta}, 0, \ldots, 0)| = 0$ per quasi ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ e dunque $f_j(z_1, 0, \ldots, 0) = 0$ per $j = 2, \ldots, n$ e $z_1 \in \Delta$ (similmente per g). Pertanto l'Esempio III.1 è in un certo senso l'esempio tipico di mappe olomorfe dalla palla in sé che commutano e che non hanno lo stesso punto di Wolff. In [BR2] abbiamo infatti stabilito il seguente:

Teorema III.2: Siano $f, g : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ olomorfe, senza punti fissi in $\mathbf{B}^n$ e tali che $f \circ g = g \circ f$. Se f e g non hanno lo stesso punto di Wolff allora, a meno di coniugio con elementi del gruppo degli automorfismi, $z_1 \mapsto f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ e $z_1 \mapsto g_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ sono due automorfismi iperbolici di Δ che commutano e $f_j(z_1, 0, \ldots, 0) = g_j(z_1, 0, \ldots, 0) = 0$ per $j = 2, \ldots, n$ e $z_1 \in \Delta$.

Per provare che $z_1 \mapsto f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ e $z_1 \mapsto g_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ sono due automorfismi iperbolici, il punto cruciale è la valutazione del coefficiente di dilatazione. Come accennato anche per il Teorema di Behan, il "calcolo" di tale coefficiente si basa su di un Teorema alla Julia-Wolff-Carathéodory (per la palla dovuto a Rudin [RU]). Per i particolari si rimanda il lettore a [BR2]. Come per il disco unitario, la palla possiede un gruppo di automorfismi che si estende al bordo con continuità, e grazie ad un ben noto Teorema di Classificazione (si veda ad esempio [VE], [AB1]) anche questo gruppo si divide in tre famiglie: gli *automorfismi ellittici* che hanno punti fissi interni, gli *automorfismi parabolici* che non hanno punti fissi interni e hanno un solo punto fisso sul bordo e gli *automorfismi iperbolici* che non hanno punti fissi interni e hanno due punti fissi distinti sul bordo. Ripetendo passo passo la prova del Teorema di Heins, utilizzando il Teorema III.2 in luogo del Teorema di Behan, si ottiene il seguente risultato dovuto, con metodi diversi, a de Fabritiis e Gentili ([deF-GE]):

Teorema di de Fabritiis-Gentili Sia γ un automorfismo iperbolico della palla $\mathbf{B}^n$ e sia $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ olomorfa tale che $f \circ \gamma = \gamma \circ f$. Allora, a meno di coniugio con elementi del gruppo degli automorfismi di $\mathbf{B}^n$, $z_1 \mapsto f_1(z_1, 0, \ldots, 0)$ è un automorfismo iperbolico di Δ e $f_j(z_1, 0 \ldots, 0) = 0$ per $j = 2, \ldots, n$ e $z_1 \in \Delta$.

Di fatto de Fabritiis ([deF1]) ha caratterizzato la famiglia delle mappe olomorfe dalla palla in sé che commutano con un automorfismo iperbolico, mostrando che tale famiglia contiene anche mappe che non sono automorfismi della palla.

Per arrivare a stabilire la giusta generalizzazione del Teorema III.2, dato che un dominio non biolomorfo alla palla ha “pochi” automorfismi, facciamo la seguente osservazione:

Osservazione III.3: la mappa $\xi \mapsto (\xi, 0, \ldots, 0)$ da Δ in $\mathbf{B}^n$ è una isometria tra la metrica iperbolica del disco e la metrica iperbolica della palla[6].

Dunque, tenendo presente che gli automorfismi sono isometrie per la metrica iperbolica di $\mathbf{B}^n$, il Teorema III.2 determina una struttura rigida per f e g sulla “geodetica complessa” che unisce i due punti di Wolff (se diversi). Questa è di fatto l'idea giusta per ottenere il Teorema in altre classi di domini. Prima di poter enunciare tale teorema, occorrono alcune premesse.

Definizione III.4: Una mappa $\varphi : \Delta \to D$ olomorfa si dice una *geodetica complessa* se per ogni coppia di punti $a, b \in \Delta$ vale $\omega(a,b) = k_D(\varphi(a), \varphi(b))$.

Le geodetiche complesse sono state introdotte nel 1979 da Vesentini [VE2]. Per una trattazione sistematica rimandiamo ad esempio a [VE3], [JA-PL], [AB1].

Definizione III.5: Un dominio limitato D si dice *linearmente convesso* se per ogni punto del bordo passa un iperpiano *complesso* $(n-1)$-dimensionale che è disgiunto da D. Un dominio D si dice *strettamente linearmente convesso* se è linearmente convesso, il bordo ∂D è C^3 e le piccole perturbazioni C^2 del bordo danno luogo ancora a domini linearmente convessi.

La definizione originale di strettamente linearmente convesso ([LE2]) richiede solo bordo C^2, ma dato che per i risultati seguenti la richiesta minima è C^3, preferiamo metterlo già nella definizione. È chiaro che ogni dominio strettamente convesso con bordo C^3 è strettamente linearmente convesso secondo la definizione, il viceversa è falso (si veda a

[6] Questo segue, ad esempio, da un calcolo esplicito di $k_{\mathbf{B}^n}(0,z)$ utilizzando il gruppo degli automorfismi come isometrie.

questo proposito il paragrafo IV). Sia r la funzione definente D, ovvero $r : \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^+$, C^3 e tale che $D = \{z \in \mathbf{C}^n : r(z) < 0\}$. Dalla definizione segue che se D è strettamente linearmente convesso, allora per ogni punto $x \in \partial D$ e per ogni $w \neq 0$ contenuto nello spazio tangente complesso a ∂D in x (cioè tale che $\partial r(w) = 0$) risulta

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} w_j \overline{w_k} > |\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial z_k} w_j w_k|.$$

In particolare un dominio strettamente linearmente convesso è strettamente pseudoconvesso. L'importanza dei domini strettamente linearmente convessi in analisi complessa risiede nella seguente proposizione, dovuta a Lempert ([LE1], [LE2]) e Chang-Hu-Lee ([C-H-L]):

Proposizione III.6: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Per ogni coppia di punti $x, y \in \overline{D}$ esiste una geodetica complessa $\varphi : \Delta \to D$ tale che $\varphi \in C^1(\overline{\Delta})$ e $x, y \in \varphi(\overline{\Delta})$. Inoltre tale geodetica complessa è unica a meno di parametrizzazioni, ovvero se $\eta : \Delta \to D$ è un'altra geodetica complessa, allora η si estende C^1 al bordo, e se contiene x, y nella chiusura della sua immagine, allora esiste un automorfismo Θ di Δ tale che $\eta = \varphi \circ \Theta$.

Dalla Proposizione III.6 si ricava il seguente:

Lemma III.7: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Allora D è un dominio strettamente pseudoconvesso contrattile. In particolare D gode delle proprietà D,W e J.

Dimostrazione: Abbiamo già osservato in precedenza che D è strettamente pseudoconvesso. Costruiamo adesso una *rappresentazione sferica* di D, che renderà D omeomorfo alla palla $\mathbf{B}^n$. Allora le proprietà D e W seguono da [AB3], [HUA], mentre la proprietà J segue da [AB1]. Fissiamo $z_0 \in D$. Se $z \in D$, allora per la Proposizione III.6 esiste una geodetica complessa $\varphi : \Delta \to D$ tale che $\varphi(0) = z_0$ e $\varphi(\xi) = z$ per uno $\xi \in \Delta$. Definiamo allora $\Phi : D \to \mathbf{B}^n$ come $\Phi(z) := \xi \frac{\varphi'(0)}{|\varphi'(0)|}$. Dato che ogni altra geodetica complessa η con la proprietà $\eta(0) = z_0$, $\eta(\xi') = z_0$ per un certo ξ' differisce da φ per una rotazione, Φ è ben definita. È chiaro che Φ è continua. Inoltre è invertibile con continuità, la sua inversa essendo data da $\mathbf{B}^n \to D$, $v \mapsto \varphi(|v|)$, dove in questo caso φ indica la geodetica complessa tale che $\varphi(0) = z_0$ e $\varphi'(0) = \lambda v$, $\lambda > 0$. Pertanto Φ è un omeomorfismo. QED

Abbiamo ora tutti gli elementi per enunciare un teorema alla Behan per domini strettamente linearmente convessi:

Teorema III.8: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Siano $f, g : D \to D$ olomorfe, senza punti fissi in D e tali che $f \circ g = g \circ f$. Allora f e g hanno lo stesso punto di Wolff, a meno che esista una geodetica complessa φ contenente i punti di Wolff di f e g nella chiusura della sua immagine e tale che $f(\varphi(\Delta)) \subset \varphi(\Delta)$, $g(\varphi(\Delta)) \subset \varphi(\Delta)$ e $f_{|\varphi(\Delta)}$ e $g_{|\varphi(\Delta)}$ siano due automorfismi (iperbolici) di $\varphi(\Delta)$.

Il resto di questo paragrafo è dedicato alla dimostrazione del Teorema III.8. Se D è strettamente linearmente convesso, Lempert ([LE1], [LE2], [LE3]) ha trovato una utile caratterizzazione delle geodetiche complesse di D che fa riferimento ai valori della traccia della geodetica sul bordo di D. È fuori dagli scopi di queste note ripercorrere il lavoro di Lempert e, per quello che segue, oltre alla Proposizione III.6, necessiteremo del seguente:

Lemma (Lempert): Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Se $\varphi : \Delta \to D$ è una geodetica complessa, allora esiste una retrazione olomorfa $p : D \to \varphi(\Delta)$ che chiameremo *proiezione di Lempert*. Porremo inoltre $\tilde{p} : D \to \Delta$ la mappa olomorfa definita da $\tilde{p} := \varphi^{-1} \circ p$. La mappa $\tilde{p}$ è l'*inversa sinistra* di φ.

A meno di traslazioni, supponiamo da ora in poi che $0 \in D$. Se $f : D \to D$ è olomorfa, $z_0 \in D$ e $x \in \partial D$, in modo simile a quanto fatto nel paragrafo I, definiamo il *coefficiente di dilatazione* $\alpha_f(x)$ di f in x tramite

$$\frac{1}{2} \log \alpha_f(x) := \liminf_{z \to x} [k_D(0, z) - k_D(0, f(z))].$$

Utilizzeremo anche il seguente Lemma (per la dimostrazione si veda l'Appendice a questo paragrafo):

Lemma III.9: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Sia $h : D \to D$ olomorfa e sia $\tau \in \partial D$. Se $\alpha_h(\tau) < \infty$ allora esiste un unico punto $\sigma \in \partial D$ tale che h ha limite non-tangenziale σ in τ. Inoltre, se φ_τ e φ_σ indicano le uniche geodetiche complesse di D tali che $\varphi_\tau(0) = \varphi_\sigma(0) = 0$ e $\varphi_\tau(1) = \tau$, $\varphi_\sigma(1) = \sigma$, allora

$$(III.1) \qquad \lim_{r \to 1} \frac{1 - \tilde{p}_\sigma(h(\varphi_\tau(r)))}{1 - r} = \alpha_\tau(h).$$

$$(III.2) \qquad \lim_{r \to 1} k_D(h(\varphi_\tau(r)), p_\sigma(h(\varphi_\tau(r)))) = 0.$$

Dove p_σ indica la proiezione di Lempert su $\varphi_\sigma(\Delta)$ e $\tilde{p}_\sigma$ è l'inversa sinistra di φ_σ .

Supponiamo ora D strettamente linearmente convesso, $f, g : D \to D$ olomorfe e senza punti fissi interni e $f \circ g = g \circ f$. Supponiamo che f e g abbiano punti di Wolff diversi, chiamiamo $x \in \partial D$ il punto di Wolff di f e $y \in \partial D$ il punto di Wolff di g ($x \neq y$). Asseriamo adesso che

$$(III.3) \qquad \alpha_g(x) \leq \frac{1}{\alpha_g(y)}, \alpha_f(y) \leq \frac{1}{\alpha_f(x)}.$$

Se la $(III.3)$ è vera, allora si può concludere la prova del Teorema III.8 nel seguente modo:

DIMOSTRAZIONE THM.III.8: Sia φ una geodetica complessa di D tale che $\varphi(-1) = y$ e $\varphi(1) = x$ (φ è unica a meno di parametrizzazioni). Sia $\tilde{p}$ la sua inversa sinistra e p la proiezione di Lempert associata. Poniamo $\eta := \tilde{p} \circ g \circ \varphi$. Allora η è olomorfa da Δ in sé e $\lim_{r\to 1} \eta(r) = 1$, $\lim_{r\to -1} \eta(r) = -1$. Infatti D gode della proprietà J e pertanto per il Thm. II.3 g ha limite non-tangenziale x in x e $r \mapsto \varphi(r)$ per $r \to \pm 1$, r reale, è una curva non-tangenziale, essendo $\varphi(\Delta)$ trasverso a ∂D per il Lemma di Hopf. Inoltre, ponendo $\alpha_\eta(1) := \liminf_{\xi\to 1} \frac{1-|\eta(\xi)|}{1-|\xi|}$ (si veda la discussione seguente alla Caratterizzazione del Punto di Wolff nel paragrafo I), si ha

$$\alpha_\eta(1) \leq \liminf_{r\to 1} \frac{1 - |\tilde{p}(g(\varphi(r)))|}{1-r} \leq \liminf_{r\to 1} \frac{|1 - \tilde{p}(g(\varphi(r)))|}{1-r}.$$

Per il Lemma III.9 $\lim_{r\to 1} \frac{|1-\tilde{p}(g(\varphi(r)))|}{1-r} = \alpha_g(x)$ e per la $(III.3)$ dunque $\alpha_\eta(1) \leq (\alpha_g(y))^{-1}$. Ripetendo il ragionamento per $\alpha_\eta(-1)$ si ottiene

$$\alpha_\eta(-1) \cdot \alpha_\eta(1) \leq \alpha_g(y) \cdot \frac{1}{\alpha_g(y)} = 1.$$

Pertanto per il Lemma di Behan η (e dunque $\tilde{p} \circ g \circ \varphi$) è un automorfismo iperbolico di Δ . Dunque $(p \circ g)|_{\varphi(\Delta)}$ è un automorfismo di $\varphi(\Delta)$. Vogliamo ora provare che $p(g(\varphi(\xi))) = g(\varphi(\xi))$ per ogni $\xi \in \Delta$. Per ogni $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta$ si ha:

$$k_D(g(\varphi(\zeta_1)), g(\varphi(\zeta_2))) \leq \omega(\zeta_1, \zeta_2) = \omega(\tilde{p}(g(\varphi(\zeta_1))), \tilde{p}(g(\varphi(\zeta_2)))) =$$

$$k_D(p(g(\varphi(\zeta_1))), p(g(\varphi(\zeta_2)))) \leq k_D(g(\varphi(\zeta_1)), g(\varphi(\zeta_2))).$$

Pertanto $k_D(g(\varphi(\zeta_1)), g(\varphi(\zeta_2))) = \omega(\zeta_1, \zeta_2)$ e dunque $g \circ \varphi : \Delta \to D$ è una geodetica complessa con le proprietà $g(\varphi(1)) = \varphi(1)$ e $g(\varphi(-1)) = \varphi(-1)$. Per l'unicità a meno di parametrizzazione delle geodetiche complesse risulta $g(\varphi(\Delta)) = \varphi(\Delta)$. Inoltre dalla $p \circ \varphi = \varphi$ si ha $p \circ g \circ \varphi \equiv g \circ \varphi$, e dunque $g|_{\varphi(\Delta)}$ è un automorfismo iperbolico di $\varphi(\Delta)$. Dato che lo stesso vale per f e dato che $f \circ g = g \circ f$, la dimostrazione è terminata. QED

Proviamo adesso l'equazione $(III.3)$ per g (similmente si opera per f). Dalla formula $(II.3)$ risulta $1/2 \log \alpha_g(x) \leq k_D(z, g(z))$ qualunque sia $z \in D$. Valutiamo tale maggiorazione per $z = \varphi_y(r)$ per r che tende a 1 (dove φ_y è la geodetica complessa con la proprietà $\varphi_y(0) = 0$, $\varphi_y(1) = y$). Per la $(III.2)$, tenendo presente che p_y contrae k_D, si ha

$$0 \leq k_D(\varphi_y(r), g(\varphi_y(r))) - k_D(\varphi_y(r), p_y(g(\varphi_y(r)))) \leq$$

$$k_D(g(\varphi_y(r)), p_y(g(\varphi_y(r)))) \to 0,$$

per $r \to 1$. Ci siamo ricondotti a valutare $k_D(\varphi_y(r), p_y(g(\varphi_y(r))))$ per $r \to 1$. Posto $\Phi_r(\xi)$ la trasformazione di Möebius di Δ che trasporta r in 0, si ha

$$k_D(\varphi_y(r), p_y(g(\varphi_y(r)))) = \omega(r, \tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))) =$$

$$\omega(0, \Phi_r(\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r))))) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |\Phi_r(\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r))))|}{1 - |\Phi_r(\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r))))|}.$$

Dalla forma di $\Phi_r(\xi)$ si ha

$$\Phi_r(\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))) = \frac{r - \tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))}{1 - r\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))} = \tag{III.4}$$

$$[\frac{1 - \tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))}{1 - r} + \frac{r - 1}{1 - r}] \cdot \frac{1 - r}{1 - r\tilde{p}_y(g(\varphi_y(r)))}.$$

Il primo fattore della $(III.4)$ tende a $\alpha_g(y) - 1$ per la $(III.1)$. Allo stesso modo il secondo fattore tende a $(\alpha_g(y) + 1)^{-1}$. Pertanto

$$\lim_{r \to 1} |\Phi_r(\tilde{p}(g(\varphi_y(r))))| = \frac{1 - \alpha_g(y)}{1 + \alpha_g(y)},$$

e questo prova la disequazione $(III.3)$.

APPENDICE AL PARAGRAFO III

In questa appendice daremo le dimostrazioni delle formule $(III.1)$ e $(III.2)$ per domini strettamente linearmente convessi. La $(III.1)$ per domini strettamente convessi in senso reale è dovuta a Abate ([AB2]) e la dimostrazione per domini strettamente linearmente convessi si ottiene con alcune modifiche dalla prova originaria. Riportiamo i dettagli per comodità dei lettori.

Sia $z \in D$. Definiamo $K_z : \overline{D} \to [0,1]$ tramite $K_z(w) = 1$ se $w \in \partial D$ e $K_z(w) := \tanh k_D(z,w)$ se $w \in D$. La proprietà di K_z che utilizzeremo è la seguente:

Lemma III.10: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso, allora $K_z \in C^0(\overline{D}) \bigcap C^1(\overline{D} - \{z\})$. Inoltre K_z è plurisubarmonica.
DIM. La prima parte dell'enunciato è dovuta a Lempert ([LE2]). La seconda parte segue dal fatto che la metrica di Kobayashi su D coincide con quella di Carathéodory ([LE2], [LE3]), e dunque K_z si ottiene come estremo superiore di una famiglia di funzioni subarmoniche (cfr. *Prop.2.6.46* in [AB1]). QED

Enunciamo e dimostriamo adesso il seguente:

Lemma III.11: Sia $D \subset \mathbf{C}^n$ un dominio strettamente linearmente convesso, $0 \in D$, $x \in \partial D$. Allora, denotata con $\mathbf{n}_x$ la normale esterna a ∂D in x, si ha

$$\lim_{w \to x} [k_D(z,w) - k_D(0,w)] = \frac{1}{2} \log[\frac{\partial K_0}{\partial \mathbf{n}_x}(x) / \frac{\partial K_z}{\partial \mathbf{n}_x}(x)].$$

DIM. Notiamo che

$$k_D(z,w) - k_D(0,w) = \frac{1}{2} \log[\frac{1+K_z(w)}{1-K_z(w)} \cdot \frac{1-K_0(w)}{1+K_0(w)}].$$

È pertanto sufficiente studiare $(1-K_0(w)) \cdot (1-K_z(w))^{-1}$. Sia $\{w_k\} \subset D$ tale che $w_k \to x$. Poniamo

$$r_k := \sup\{r > 0 : w_k + t\mathbf{n}_x \in D, \forall t \in [0,r)\}.$$

Sia $\tilde{w}_k := w_k + r_k \mathbf{n}_x$. Allora $\tilde{w}_k \in \partial D$. A meno di sottosuccessioni supponiamo $\tilde{w}_k \to \tilde{w}$. Se $\tilde{w} \neq x$, allora

$$\tilde{w} - x = \lim_{k \to \infty} (w_k + r_k \mathbf{n}_x - w_k) = t\mathbf{n}_x,$$

con $t > 0$. Dalla definizione di r_k risulta inoltre che per ogni $s \in (0, t)$ è $x + s\mathbf{n}_x \in \overline{D}$. Il che è assurdo poiché ∂D è C^3 . Dunque $\tilde{w} = x$. Applichiamo adesso il teorema del valor medio reale al segmento $w_k, \tilde{w}_k$, parallelo a $\mathbf{n}_x$:

$$\frac{1 - K_0(w_k)}{1 - K_z(w_k)} = \frac{K_0(\tilde{w}_k) - K_0(w_k)}{\|\tilde{w}_k - w_k\|} / \frac{K_z(\tilde{w}_k) - K_z(w_k)}{\|\tilde{w}_k - w_k\|} =$$

$$\frac{\partial K_0}{\partial \mathbf{n}_x}(w_k') / \frac{\partial K_z}{\partial \mathbf{n}_x}(w_k''),$$

dove w_k', w_k'' appartengono al segmento $w_k + t_k \mathbf{n}_x$, $t_k \in (0, r_k)$. Pertanto per quanto visto in precedenza $w_k' \to x$ e $w_k'' \to x$. Dal Lemma III.10 K_z è plurisubarmonica e dunque per il Lemma di Hopf $\frac{\partial K_z}{\partial \mathbf{n}_x}(x) \neq 0$ per $z \in D$. Prendendo il limite per $k \to \infty$ si ha l'enunciato. QED

Senza entrare nei particolari facciamo notare che il Lemma III.11 ha parecchie notevoli conseguenze (tra cui la $(III.1)$). Ad esempio implica che le *piccole orosfere* coincidono con le *grandi orosfere* e che le *piccole K-regioni* coincidono con le *grandi K-regioni* (per definizioni e proprietà si veda [AB1], [AB2]).

Dimostrazione della $(III.1)$. Per definizione di $\alpha_h(\tau)$ e di geodetica complessa si ha

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2} \log \frac{1 - \tilde{p}_\sigma(h(\varphi_\tau(r)))}{1 - r} =$$

$$\lim_{r \to 1} [\omega(0, r) - \omega(0, \tilde{p}_\sigma(h(\varphi_\tau(r)))] \geq \frac{1}{2} \log \alpha_h(\tau).$$

Pertanto una disuguaglianza è provata. Indichiamo ora con $E^\Delta(1, R)$ le orosfere di centro 1 e raggio $R > 0$ in Δ . Per ottenere la tesi basta allora provare che per ogni $R > 0$

$$(III.5) \qquad \tilde{p}_\sigma(h(\varphi_\tau(E^\Delta(1, R)))) \subset E^\Delta(1, \alpha_h(\tau) R),$$

e appellarsi poi alla definizione classica di coefficiente di dilatazione (*pag. 52* in [AB1]). Definiamo le orosfere per D con centro $x \in \partial D$ e raggio $R > 0$ come

$$E(x, R) := \{z \in D : \lim_{w \to x} [k_D(z, w) - k_D(0, w)] \leq \frac{1}{2} \log R\}.$$

Il limite precedente esiste come conseguenza del Lemma III.11. Dalla definizione segue che $\varphi_\tau(E^\Delta(1,R)) \subset E(\tau,R)$. Inoltre per una versione multidimensionale del Lemma di Julia classico dovuta ad Abate ([AB1], [AB2]) $h(E(\tau,R)) \subset E(\sigma,\alpha_h(\tau)R)$. E per provare la $(III.5)$ basta mostrare che

$$\tilde{p}_\sigma(E(\sigma,R)) = E^\Delta(1,R).$$

Ma questo segue dal Lemma III.11 tramite un calcolo diretto. QED

Dimostrazione della $(III.2)$. Nel caso di domini strettamente convessi in senso reale l'equazione è dovuta all'autore ([BR3]). Nel caso di domini strettamente linearmente convessi utilizzeremo il seguente lemma di "linearizzazione" per geodetiche complesse, dovuto a Lempert ([LE2]):

Lemma di Linearizzazione: Sia D un dominio strettamente linearmente convesso. Sia $\varphi : \Delta \to D$ una geodetica complessa. Allora esiste un biolomorfismo $G : D \to G(D)$ che si estende con regolarità al bordo tale che

$$G(\varphi(\xi)) = (\xi, 0, \dots, 0), \forall \xi \in \overline{\Delta}.$$

Inoltre la normale esterna in $G(\varphi(e^{i\theta}))$ è $(e^{i\theta}, 0, \dots, 0)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ e la retrazione olomorfa p associata a φ è data da $p(z) := (z_1, 0, \dots, 0)$.

Possiamo dunque supporre che D sia un dominio strettamente *pseudoconvesso* [7] con una geodetica complessa $\varphi : \Delta \to D$ data da $\varphi(\xi) := (\xi, 0, \dots, 0)$ e una retrazione olomorfa $p : D \to \varphi(\Delta)$ definita da $p(z) := (z_1, 0, \dots, 0)$. Possiamo inoltre supporre $\tau = \sigma = e_1 := (1, 0, \dots, 0)$, a meno di comporre h in partenza ed in arrivo con i biolomorfismi di Linearizzazione di Lempert delle geodetiche complesse φ_τ , φ_σ . Allora la $(III.2)$ diventa

$$(III.6) \qquad \lim_{r\to 1} k_D(h(r,0,\dots,0), (h_1(r,0,\dots,0),0,\dots,0)) = 0.$$

Osserviamo ora che $r \mapsto p(h(r,0,\dots,0))$ è una curva non-tangenziale (cfr. *Remark 3.5* in [BR3]). Pertanto se proviamo che

$$(III.7) \qquad \lim_{r\to 1} \frac{\|h(r,0,\dots,0) - p(h(r,0,\dots,0))\|^2}{d(p(h(r,0,\dots,0)), \partial D)} = 0$$

[7] La linearizzazione di Lempert conserva la convessità lineare stretta solo in vicinanza di $G(\varphi(\partial\Delta))$.

dove $d(.,\partial D)$ indica la distanza euclidea dal bordo di D, allora si vede facilmente che esiste una palla $B \subset D$, tangente a ∂D in e_1 tale che $h(r,0,\ldots,0) \in B$ definitivamente. Dato che $k_D \leq k_B$, allora la $(III.6)$ segue da

$$(III.8) \qquad \lim_{r\to 1} k_B(h(r,0,\ldots,0), p(h(r,0,\ldots,0))) = 0.$$

Ma la $(III.7)$ ed il fatto che $r \mapsto p(h(r,0,\ldots,0)$ è non-tangenziale implicano la $(III.8)$ (cfr. *Prop. 2.7.11* in [AB1]). Dunque basta provare la $(III.7)$. Dal fatto che $r \mapsto p(h(r,0,\ldots,0)$ è non-tangenziale segue

$$d(p(h(r,0,\ldots,0)),\partial D) \approx 1 - |h_1(r,0,\ldots,0)| = 1 - |\tilde{p}(h(\varphi(r)))|.$$

Inoltre

$$\|h(r,0,\ldots,0) - p(h(r,0,\ldots,0))\| \leq \|d(h - p\circ h)_{se_1}(e_1)\| \cdot (1-r),$$

per un certo $s \in (r,1)$. Pertanto

$$\lim_{r\to 1} \frac{\|h(r,0,\ldots,0) - p(h(r,0,\ldots,0)\|^2}{d(p(h(r,0,\ldots,0)),\partial D)} \leq$$

$$\lim_{r\to 1} \frac{\|d(h-p\circ h)_{se_1}(e_1)\|^2 (1-r)^2}{1 - |\tilde{p}(h(\varphi(r)))|}.$$

Per il *Teorema 2.9* in [AB4] -una versione del Teorema di Julia-Wolff-Carathéodory per domini strettamente pseudoconvessi- si ha $\|d(h - p \circ h)_{se_1}(e_1)\| < K < \infty$ per ogni $s \in [0,1)$. Basta allora provare che

$$\lim_{r\to 1} \frac{1 - |\tilde{p}(h(\varphi(r)))|}{1-r} > 0.$$

Ma

$$\frac{1}{2}\log\frac{1 - |\tilde{p}(h(\varphi(r)))|}{1-r} = \omega(0,r) - \omega(0,\tilde{p}(h(\varphi(r)))) =$$

$$k_D(0,\varphi(r)) - k_D(0,p(h(\varphi(r)))) \geq k_D(0,\varphi(r)) - k_D(0,h(\varphi(r))),$$

e passando al limite per $r \to 1$ l'ultimo termine è $\geq 1/2 \log \alpha_h(e_1)$ .Dato che $\alpha_h(e_1) > 0$ si ha la tesi. QED

IV. COMMENTI E NOTE FINALI

Questo paragrafo contiene alcuni commenti sui risultati precedenti e su alcuni problemi ancora aperti. Cominciamo dal risultato principale di queste note:

1. *Il Teorema III.8 è la massima generalizzazione naturale del Teorema di Behan.* Per prima cosa infatti ha senso investigare le relazioni tra punti di Wolff di due mappe che commutano solo se ha senso la nozione di punto di Wolff, che noi abbiamo dato per domini soddisfacenti alle proprietà D e W. Ora, se D è un dominio limitato che non gode delle proprietà D e/o W, è comunque possibile definire un punto di Wolff nel modo seguente. Supponiamo $0 \in D$. Chiamiamo *piccola orosfera* ([AB1], [AB2]) di centro $x \in \partial D$ e raggio $R > 0$ l'insieme:

$$E(x,R) := \{z \in D : \limsup_{w \to x}[k_D(z,w) - k_D(0,w)] < \frac{1}{2}\log R\}.$$

La *grande orosfera* $F(x,R)$ è definita in modo simile utilizzando il $\liminf$ al posto del $\limsup$. Sia $f : D \to D$ olomorfa, senza punti fissi in D. Diciamo che $x \in \partial D$ è un *punto di Wolff* per f se $f(E(x,R)) \subseteq E(x,R)$ (nei casi trattati nel paragrafo III questa nuova definizione coincide con quella vecchia). Ovviamente senza alcuna ipotesi su D potrebbero non esistere punti di Wolff per f, oppure f potrebbe avere infiniti punti di Wolff. L'utilità del punto di Wolff definito come nel paragrafo III risiede nel fatto che la successione delle iterate $\{f^k\}$ converge normalmente al punto di Wolff. Senza ipotesi su D $\{f^k\}$ potrebbe essere non compattamente divergente (si veda ad esempio la g definita nell'Esempio II.1), oppure $\{f^k\}$ potrebbe essere compattamente divergente ma non convergente ad una costante (ad esempio $(z,w) \mapsto (z,(w+1)/(3-w))$ nel bidisco). Pertanto, utilizzando la nuova definizione di punto di Wolff, si hanno casi di mappe olomorfe con infiniti punti di Wolff ma che non stanno nella chiusura dell'immagine di alcun limite di $\{f^k\}$. Ad esempio $F : \Delta \times \Delta \to \Delta \times \Delta$ definita da $F : (z,w) \to (z,\gamma(w))$ con γ automorfismo iperbolico di Δ con punti fissi $-1, 1$ e punto di Wolff 1. La successione $\{F^k\}$ converge normalmente a $(z,w) \mapsto (z,1)$, ma i punti del tipo $(e^{i\theta}, w)$ per $\theta \in [0,2\pi]$ e $w \in \Delta \bigcup \{1\}$ sono punti di Wolff secondo la nuova definizione. In questo casi non è chiaro se e quale possa essere la giusta nozione da studiare.

Anche nel caso di unicità del punto di Wolff (per esempio nei domini strettamente pseudoconvessi contrattili) in generale non è possibile unire punti di Wolff diversi di mappe olomorfe che commutano tramite geodetiche complesse. Anche nel caso in cui questo sia possibile, viene a mancare o l'unicità della geodetica ([GE]), o la proprietà di essere un retratto olomorfo ([LE3]). Dunque sembrano venire a mancare, non tanto gli ingredienti della dimostrazione del Thm. III.8, quanto gli elementi per enunciare un analogo del Thm. III.8 nel caso di domini non strettamente linearmente convessi.

2. *I domini strettamente linearmente convessi.* Il nostro teorema principale vale per domini strettamente linearmente convessi. Esistono domini strettamente linearmente convessi che non sono strettamente convessi in senso reale [JA-PL]:

$$D := \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\|^2 + (\Re e(z_1^2))^2 < 1\}.$$

Il dominio D è strettamente linearmente convesso come prova un semplice calcolo della forma di Levi, ma non è convesso. Resta però aperto il problema se D sia o meno *biolomorfo* ad un convesso. Più in generale, uno dei problemi principali aperti dal lavoro di Lempert ([LE1], [LE2], [LE3]) è quello di caratterizzare la convessità reale con strumenti di analisi complessa. L'autore e Graziano Gentili hanno congetturato quanto segue:

Sia D un dominio strettamente pseudoconvesso con bordo regolare e con la proprietà che dati due punti della chiusura del dominio esista una unica (a meno di parametrizzazioni) geodetica complessa che li contenga nella chiusura della sua immagine. Allora il dominio è biolomorfo ad un dominio strettamente convesso.

Nel caso in cui la congettura sia vera, allora il Thm. III.8 segue immediatamente dal *Theorem 0.2* in [BR3]. Comunque la dimostrazione qua riportata è diversa da quella in [BR3], ed è più semplice.

3. *Quante sono le mappe che commutano?*. Data $f : D \to D$ olomorfa, certamente f commuta con la famiglia $\{f^k\}$ (dove possiamo aggiungere $f^0 = id$). Ma ci sono altre mappe che commutano con f diverse da questa famiglia? Chiara de Fabritiis ([deF2]) ha provato il seguente:

Teorema (de Fabritiis): L'insieme delle coppie di mappe che commutano in $Hol(\mathbf{B}^n, \mathbf{B}^n) \times Hol(\mathbf{B}^n, \mathbf{B}^n)$ ha interno vuoto.

D'altra parte, l'Esempio III.1 chiarisce che esistono mappe olomorfe che commutano tra loro ma che non sono una iterata dell'altra. In effetti (si veda [deF1], [deF2], [CO2]) *fissata* una mappa f, l'insieme delle mappe olomorfe che commutano con essa può essere "molto grande". Una domanda naturale è allora chiedersi *quante mappe olomorfe hanno centralizzante non banale*, dove per centralizzante di una mappa si intende l'insieme delle mappe olomorfe che commutano con essa, e si dice che tale centralizzante è banale se contiene solo le iterate. Ad esempio, Tauraso ([TAU]) ha mostrato che *esiste un insieme aperto e denso nell'insieme di tutti i polinomi complessi non-lineari formato da elementi con centralizzante banale*. Già nel caso delle funzioni razionali di grado almeno due, questo problema resta aperto.

4. *Condizioni necessarie e sufficienti per la commutazione.* Nel paragrafo I abbiamo accennato alla costruzione di Cowen ([CO2]) che consente di dare condizioni sufficienti affinché due mappe commutino per composizione. Questa teoria è strettamente unidimensionale in quanto la costruzione del "modello lineare frazionario" (ovvero del dominio Ω e delle mappe σ e Φ nel Teorema di Cowen) si basa sul Teorema di Uniformizzazione. La costruzione è stata generalizzata da Vlacci ([VL2]) a superfici di Riemann. In dimensione maggiore gli unici risultati disponibili sembrano essere quelli sulla esistenza di punti fissi comuni (di cui i Teoremi II.3 & III.8 sono un esempio). Nel caso di due funzioni olomorfe della palla in sé senza punti fissi, con una regolarità (*K-differenziabilità*) nel punto di Wolff, l'autore ([BR1]) ha recentemente trovato alcune condizioni di carattere algebrico che le due funzioni devono soddisfare per commutare.

BIBLIOGRAFIA

[AB1] M. Abate *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds.* Mediterranean Press, Rende, Cosenza 1989.

[AB2] M. Abate *The Lindelöf principle and the angular derivative in strongly convex domains.* J. Anal. Math, 54 (1990), 189-228.

[AB3] M. Abate *Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 18, 2 (1991), 167-191.

[AB4] M. Abate: *Angular derivatives in strongly pseudoconvex domains.* Proc. Symp. in Pure Math. 52 (1991), Part 2, 23-40.

[AB-VI] M. Abate, J.P. Vigué *Common fixed points in hyperbolic Riemann surfaces and convex domains.* Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 503-512.

[BE] D.F. Behan *Commuting analytic functions without fixed points.*- Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 114-120.

[BOY] W.M. Boyce *Commuting functions with no common fixed points.* Trans. Amer. Math. Soc. 137 (1969), 77-92.

[BO-SHA] P.S. Bourdon, J.H. Shapiro *Cyclic phenomena for composition operators.* Mem. Amer. Math. Soc. 596 (1997), vol. 125.

[BR1] F. Bracci *On the geometry at the boundary of holomorphic self-maps of the unit ball of* $\mathbf{C}^n$. Complex Variables Theory Appl. 38 (1999), 221-241.

[BR2] F. Bracci *Common fixed points of commuting holomorphic maps in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$. Proc. Amer. Math. Soc. 127,4,(1999), 1133-1141.

[BR3] F.Bracci *Commuting holomorphic maps in strongly convex domains.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) 27 (1999),1, 131-144.

[BR4] F. Bracci *Fixed points of commuting holomorphic maps without boundary regularity.* Apparirà in Canadian Math. Bull..

[C-H-L] C.H. Chang, M.C. Hu, H.P. Lee *Extremal analytic discs with prescribed boundary data.* Trans. Amer. Math. Soc. 310, 1 (1988), 355-369.

[CA] C. Carathéodory *Theory of functions of a complex variables, II.* Chelsea, New York, 1960.

[CI-KR] J.A. Cima, S.G. Krantz *The Lindelöf principle and normal functions of several complex variables.* Duke Math. J. (1983) 50, 303-328.

[ČIR] E.M. Čirca *The theorems of Lindelöf and Fatou in* $\mathbf{C}^n$. Math. USSR Sbornik 21 (1973), 4, 619-639.

[CO1] C.C. Cowen *Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk.* Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 69-95.

[CO2] C.C. Cowen *Commuting analytic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 685-695.

[deF1] C. de Fabritiis *Commuting holomorphic functions and hyperbolic automorphisms.* Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3027-3037.

[deF2] C. de Fabritiis *Commuting maps and families of hyperbolic automorphisms.* Complex Analysis and Geometry, Pitman Research Notes 366 (1997), 94-111.

[deF-GE] C. de Fabritiis, G. Gentili *On holomorphic maps which commute with hyperbolic automorphisms.* Apparirà in Advances Math.

[DEN] A. Denjoy *Sur l' itération des fonctions analytiques.* C.R. Acad. Sci. Paris 182 (1926), 255-257.

[FRA-VE] T. Franzoni, E. Vesentini *Holomorphic maps and invariant distances.* North-Holland Math. Studies 40, 1980.

[GE] G. Gentili *On non-uniqueness of complex geodesics in convex bounded domains.* Accad. Naz. Lincei Serie VIII, vol. LXXIX, fasc. 5

(1985) 90-97.

[HE] M.H. Heins *A generalization of the Aumann-Carathodory "Starrheitssatz"*. Duke Math. 8 (1941), 312-316.

[HER] M. Hervé *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même.* J. Math. Pure Appl. 42 (1963), 117-147.

[HUA] X. Huang *A non-degeneracy property of extremal mappings and iterates of holomorphic self-mappings.* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 21, 3 (1994), 399-419.

[HUN] J.P. Huneke *On common fixed points of commuting continuous functions on an interval.* Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 371-381.

[KOB] S. Kobayashi *hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* Dekker, New York, 1970.

[JA-PL] M. Jarnicki, P. Pflug *Invariant distances and metrics in complex analysis.* W. de Gruyter, Berlin-New York 1993.

[JU] G. Julia *Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz.* Acta Math. 42 (1920), 349-355.

[LE1] L. Lempert *La métrique de Kobayashi et la representation des domaines sur la boule.* Bull. Soc. Math. Fr. 109 (1981), 427-474.

[LE2] L. Lempert *Intrinsic distances and holomorphic retracts.* Complex Analysis and Applications'81, Sofia 1984, 341-364.

[LE3] L. Lempert *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains.* Anal. Math. 8 (1982), 257-261.

[MA] D. Ma *On iterates of holomorphic maps.* Math. Z. 207 (1991), 417-428.

[MAC] B.D. MacCluer *Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in* $\mathbf{C}^N$. Mich. Math. J. 30 (1983), 97-106.

[ME] P. R. Mercer *Complex geodesics and iterates of holomorphic maps on convex domains in* $\mathbf{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 338, 1 (1993), 201-211.

[RO-WO] H. Royden, P.M. Wong *Carathéodory and Kobayashi metric on convex domains.* Preprint 1983.

[RU] W. Rudin *Function theory in the Unit Ball of* $\mathbf{C}^n$. Springer, Berlin 1980.

[SH] A.L. Shields *On fixed points of commuting analytic functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 703-706.

[ST] E.M. Stein *Boundary behaviour of holomorphic functions of several complex variables.* Princeton University Press, Princeton, 1972.

[TAU] R. Tauraso *Centralizers of Polynomials.* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste Vol 28 (1996), 63-69.

[VE1] E. Vesentini *Capitoli scelti della teoria delle funzioni olomorfe.* UMI 1984

[VE2] E. Vesentini *Variation on a theme of Carathéodory.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 6 (1979), 39-68.

[VE3] E. Vesentini *Complex geodesic and holomorphic maps.* Symp. Math. 26 (1982), 211-230.

[VI] J.P. Vigué *Points fixes d'applications holomorphes dans un domaine borné convexe de* $\mathbf{C}^n$. Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1985), 345-353.

[VL1] F. Vlacci *On commuting holomorphic maps in the unit disc of* $\mathbf{C}$. Complex Variables Theory Appl. 30 (1996), 301-313.

[VL2] F. Vlacci *Iteration theory in hyperbolic domains.* J. Anal. Math. 74 (1998), 51-66

[WOL] J. Wolff *Sur l'itération des fonctions bornées.* C.R. Acad. Sci. Paris (1926), 200-201.

[ZH-RE] W. Zhang, F. Ren *Dynamics on weakly pseudoconvex domains.* Chinese Ann. of Math. 16B: 4 (1995), 467-476.