VI appello 24/9/13 — Geometria per Ingegneria Medica
Prof. F. Bracci — A.A. 2012-13

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

Corso di Laurea: (se diverso da Ing. Medica) ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Eventuali correzioni devono essere segnalate con un "NO"*. Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4.

(a) Dati tre vettori $v, w, u \in V$ linearmente indipendenti, esiste un vettore $z \in V$ tale che $\{v, w, u, z\}$ generano V

(b) Siano $u, v, w, t, z \in V$. Se $\{u, v, w, t, z\}$ generano V allora u, v, w, t sono linearmente indipendenti.

(c) Ogni insieme di 3 vettori di V può essere completato ad una base di V.

(d) Ogni insieme di 4 vettori che generano V è formato da vettori linearmente indipendenti.

Q2) Sia A_α la matrice data da:

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A_α è invertibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) La matrice A_α è diagonalizzabile solo se $\alpha = 0$.

(c) Se la matrice A_α non è diagonalizzabile allora A_α è invertibile.

(d) Se $\alpha = 1$, la molteplicità geometrica di 1 è 3.

Q3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se T è invertibile allora $\ker T = \mathsf{Im}\, T$.

(b) Se $\ker T$ ha dimensione > 0 allora T non è suriettivo.

(c) Se T non è suriettivo allora 0 non è un autovalore di T.

(d) Se T ha n autovalori distinti allora $\dim \mathsf{Im}\, T \geq n - 1$.

Q4) Sia $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dotato del prodotto scalare standard e siano $v, w, u \in V$ tre vettori non nulli.

(a) Se $v \wedge w = 0$ allora $\{v, w, u\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(b) Se $\langle v \wedge u, w \rangle = 0$ allora $\{u, v, w\}$ sono linearmente indipendenti.
(c) Se $\{v, w, u\}$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ orientata positivamente allora $\langle v \wedge w, u \rangle = 1$.
(d) Se la proiezione ortogonale di $u \wedge v$ sul sottospazio generato da w è 0 allora $\{u, v, w\}$ sono linearmente dipendenti.

Q5) Siano A, B, C matrici 3×3.

(a) Se $\det A = 0$ allora $\det(A + B) = \det B$.
(b) Se $A \cdot B = I$ allora $\det B = (\det A)^{-1}$.
(c) Se $\det[A \cdot B \cdot C] = 0$ allora $\det A = 0$, oppure $\det B = 0$ oppure $\det C = 0$.
(d) Se $\det A \cdot \det C \neq 0$ allora $\det B = \det(A \cdot B \cdot C)$.

Q6) Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale metrico di dimensione n e sia $L : V \to V$ un operatore lineare.

(a) Se V ammette una base di autovettori di L allora L è auto-aggiunto.
(b) Se L è diagonalizzabile allora L è auto-aggiunto.
(c) Se L è auto-aggiunto allora la matrice associata ad L in ogni base di V è simmetrica.
(d) Se esiste una base ortonormale di V tale che la matrice associata ad L è simmetrica, allora L è auto-aggiunto.

Q7) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y). Sia $\mathcal{C} := \{(x, y) : x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha x + \alpha(\alpha - 1) = 0\}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Se $\alpha = 0$ allora $\mathcal{C}$ è ridotto ad un punto.
(b) Se $\alpha < 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una iperbole.
(c) Se $\alpha > 0$ allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente ad una ellisse.
(d) Se $\alpha = 1$ allora $\mathcal{C}$ è una circonferenza.

Q8) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia π il luogo dei punti di $\mathbb{A}^3$ che soddisfa l'equazione $x + y = 0, x - z + 1 = 0$.

(a) π è una retta ortogonale al piano $x - y + z = 0$.
(b) π è un piano contenente la retta $x + y = 0$.
(c) π contiene l'origine.
(d) lo spazio tangente a π è generato dal vettore $(-2, 2, -2)$.

Q9) Nello spazio affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine $\mathcal{R}$ ortonormale con coordinate affini (x, y). Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Per $\alpha \neq 0$, $\mathcal{R}' := \{(0, 1); v_1, v_2\}$ è un sistema di riferimento affine.
(b) L'angolo tra i vettori v_1, v_2 non dipende da α.
(c) Sia P un punto fissato. La distanza tra il punto $P + v_1$ e il punto $P + v_2$ non dipende da $\alpha \in \mathbb{R}$.
(d) La retta $\alpha x + y = 0$ ha come spazio tangente lo spazio generato da $\{v_1, v_2\}$.

Q10) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali di dimensione > 0 tali che $U \neq W$.

(a) Se ogni vettore di V si scrive in modo unico come somma di un vettore di U e di un vettore di W allora $U + W = V$ e $U \cap W = \{0\}$.
(b) Se $U + W = V$ allora $U \cap W = \{0\}$.
(c) Se U ha dimensione $n - 2$ e W ha dimensione 2, allora $U + W = V$.
(d) Se $U \cap W$ ha dimensione $n - 1$, allora $U + W = V$.

PARTE II: Risolvere i seguenti problemi, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

P1) Sia $\mathcal{C}_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : x^2 + (1-\alpha)y^2 + 2\alpha x - 2(1-\alpha)y + 2 = 0\}$.

(1) Classificare in modo affine la conica $\mathcal{C}_\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) Per $\alpha = 2$ determinare la forma normale metrica di $\mathcal{C}_\alpha$.

P2) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}$ con coordinate (x,y,z). Sia π il piano passante per $(1,0,1)$ e ortogonale al vettore $(0,1,1)$.

(1) Determinare l'equazione cartesiana e parametrica del piano π.
(2) Determinare un sistema di riferimento affine ortonormale $\mathcal{R}'$ con coordinate $\{x', y', z'\}$ in modo che il piano π abbia coordinate $z' = 0$ in tale sistema di riferimento.
(3) Sia r la retta passante per $(1,1,0)$ e $(-1,2,0)$. Determinare l'equazione cartesiana della retta r dopo la riflessione attraverso π.
(4) Calcolare la distanza di r da π.