1. Dimostrare che l'unica soluzione $X, Y \in \mathbf{Z}$ dell'equazione diofantea $X^5 = Y^2 + 1$ è data da $X = 1$, $Y = 0$.

2. Determinare i gradi dei campi di numeri $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-6})$ e $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{3}, \sqrt{-6})$.

3. Esibire un elemento $\alpha \in F = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-5})$ tale che $F = \mathbf{Q}(\alpha)$.

4. Sia $p$ un primo. Determinare il polinomio minimo di una $p$-esima radice primitiva dell'unità $\zeta_p$. Dimostrare che $[\mathbf{Q}(\zeta_p) : \mathbf{Q}] = p - 1$.

5. Sia $F$ un campo di numeri e sia $\phi : \mathbf{Q} \to \mathbf{C}$ un omomorfismo di anelli. Dimostrare che $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbf{Q}$.

6. Sia $p$ un primo e sia $L = \mathbf{F}_p(\sqrt[p]{X}, \sqrt[p]{Y})$. Si tratta di un'estensione di grado $p^2$ del campo $K = \mathbf{F}_p(X, Y)$. Dimostrare che non esiste un elemento $\alpha \in L$ tale che $L = K(\alpha)$. Dimostrare che ci sono infiniti campi $F$ per cui $K \subset F \subset L$.

7. Sia $F = \mathbf{Q}(\sqrt[6]{5})$. Dimostrare che $r_1 = r_2 = 2$ e esibire il solito omomorfismo $F \longrightarrow F_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2$ espicitamente (Qua $r_1$ indica il numero di omomorfismi di anelli $F \longrightarrow \mathbf{R}$ e $2r_2$ è il numero di omomorfismi di anelli $F \longrightarrow \mathbf{C}$ con immagine non contenuta in $\mathbf{R}$).

8. Esibire basi (come $\mathbf{Q}$-spazio vettoriale) dei campi $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ e $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$

9. Sia $F$ un campo di numeri con $r_1 \geq 1$. Ina ltre parole $F$ ammette almeno un omomorfismo di anelli $F \longrightarrow \mathbf{R}$. Dimostrare che le uniche radici dell'unità in $F$ sono $\pm 1$.

10. Sia $F$ un campo di numeri di grado $n$ e sia $x \in F$. Sia $q \in \mathbf{Q}$. Dimostrare che

$$\begin{aligned} Tr(qx) &= qTr(x), \\ Tr(q) &= nq, \\ N(q) &= q^n. \end{aligned}$$

Dimostrare che la traccia $Tr : F \longrightarrow \mathbf{Q}$ è suriettiva. Far vedere che la norma $N : F^* \longrightarrow \mathbf{Q}^*$ non è in generale suriettiva.

11. Sia $F$ un campo di numeri di grado $n$. Sia $\alpha \in F$ e sia $f_{\text{char}}^{\alpha} \in \mathbf{Q}[X]$ il polinomio caratteristico di $\alpha$. Dimostrare che per $q \in \mathbf{Q}$ si ha che $N(q - \alpha) = f_{\text{char}}^{\alpha}(q)$. Dimostrare che per $q, r \in \mathbf{Q}$ si ha che $N(q - r\alpha) = r^n f_{\text{char}}^{\alpha}(q/r)$.

12. Sia $\alpha = \zeta_5 + \zeta_5^{-1} \in \mathbf{Q}(\zeta_5)$ dove $\zeta_5$ indica una radice primitiva quinta dell unità. Determinare il polinomio minimo di $\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta_5)$.

13. Nel campo dei numeri $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, calcolare i discriminanti $\Delta(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15})$ e $\Delta(1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{5})$.