Alcuni esercizi svolti

ESERCIZIO: *Determinare per quali interi $n > 0$ si ha che $\phi(n) = 1$.*
Sia p un primo che divide n. Allora $p-1$ divide $\phi(n)$ quindi p puo' essere solo uguale a 2. Allora $n = 1$ (e si ha $\phi(1) = 1$) oppure $n = 2^h$ con $h \geq 1$. Nel secondo caso si ha $\phi(n) = 2^{h-1} \cdot (2-1) = 2^{h-1}$ per cui deve essere $h = 1$. I valori di n cercati sono 1 e 2.

ESERCIZIO: (es. 2a del secondo foglio) *Supponiamo che $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ ha la proprieta' che $mcd(n, 10) = 1$. Determinare la lunghezza del periodo dell'espansione decimale di $\frac{1}{n}$.*
Dato che 10 ed n sono coprimi per ipotesi allora $10(\bmod n)$ appartiene a $\mathbb{Z}_n^*$. Mostriamo che la lunghezza del periodo di $\frac{1}{n}$ e' l'ordine di $10(\bmod n)$ in $\mathbb{Z}_n^*$ e cioe' e' il piu' piccolo intero $t \geq 1$ tale che $10^t = 1(\bmod n)$.
Notare il fatto MERAVIGLIOSO che appaia la funzione ϕ di Eulero nel contesto dei decimali, il quale, a priori, non ha nulla a che fare con Z_n^*. In particolare sappiamo la lunghezza del periodo e' sempre $< n$. Non si sa se per infiniti primi p questa lunghezza sia $p-1$ (cfr. la congettura di Artin sulle radici primitive modulo p).
Usando l'espressione di un generico numero periodico scriviamo

$$\frac{1}{n} = a \cdot 10^{-k} + 10^{-k} \cdot b \cdot (10^l - 1)^{-1}$$

dove a, k, b, l sono interi tali che $0 \leq a < 10^k$,$0 < b < 10^l$,$k \geq 0$,$l \geq 1$ e dove l e' la lunghezza del periodo, k e' la lunghezza dell'antiperiodo, le cifre dell'antiperiodo sono le cifre di a con eventuali zeri iniziali (fino ad ottenere k cifre), le cifre del periodo sono le cifre di b con eventuali zeri iniziali (fino ad ottenere l cifre).
Riscriviamo l'uguaglianza

$$10^k(10^l - 1) = n \cdot a(10^l - 1) + b \cdot n \;\Rightarrow\quad 10^k(10^l - 1) = 0(\bmod n)$$

pero' $10^k(\bmod n)$ appartiene a $\mathbb{Z}_n^*$ quindi ha un inverso moltiplicativo $d(\bmod n)$ in $\mathbb{Z}_n^*$ per un certo intero d (che deve essere in particolare coprimo con n) quindi abbiamo

$$10^k(10^l - 1) = 0(\bmod n) \;\Rightarrow\quad d \cdot 10^k(10^l - 1) = 0(\bmod n) \;\Rightarrow\quad 10^l - 1 = 0(\bmod n).$$

Chiamiamo h l'ordine di $10(\bmod n)$ in $\mathbb{Z}_n^*$. Abbiamo trovato che $10^l = 1(\bmod n)$ quindi l (la lunghezza del periodo) e' un multiplo di h.
Sappiamo che $10^h = 1(\bmod n)$ quindi esiste un intero g con $0 < g < 10^h$ e tale che $10^h - 1 = g \cdot n$. Quindi $\frac{1}{n} = g \cdot (10^h - 1)^{-1}$. Consideriamo il numero periodico $0,\overline{g'}$ dove con g' indichiamo h cifre decimali: le ultime cifre di g' sono le cifre di g e qualora g avesse meno di h cifre aggiungiamo degli zeri (esempio: $h = 3$, $g = 21$ allora scriveremmo $0,\overline{021}$). Con un semplice calcolo possiamo verificare che $0,\overline{g'}$ espresso come frazione e' proprio $\frac{1}{n}$. Da questo segue che la lunghezza del periodo di $\frac{1}{n}$ divide il numero di cifre di g' e cioe' h.
Nota: La seconda parte di quanto fatto non e' sufficiente da sola (ad esempio potremmo avere scritto $0,\overline{44}$ che pero' ha periodo di lunghezza 1).

ESERCIZIO: (es. 2b del secondo foglio) *Determinare i numeri naturali $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ con $mcd(n, 10) = 1$ che hanno la proprieta' che il periodo dell'espansione decimale di $\frac{1}{n}$ ha lunghezza ≤ 6.*
Per la parte 2a di questo esercizio bisogna trovare i numeri naturali $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ con $mcd(n, 10) = 1$ tali che l'ordine di $10(\bmod n)$ in $\mathbb{Z}_n^*$ e' ≤ 6. Cioe' bisogna trovare quegli n per cui $10^h = 1(\bmod n)$ con h in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Questi n sono esattamente i divisori di $10^h - 1$ dove $h \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (tali n risultano in particolare ≥ 1 e coprimi con 10). Se $h_1 | h_2$ allora $(10^{h_1} - 1)|(10^{h_2} - 1)$: questo

si vede facilmente usando la fattorizzazione del polinomio $x^{h_2/h_1} - 1$ e poi sostituendo $x = 10^{h_1}$. Allora basta considerare i divisori di $10^h - 1$ con h in $\{4, 5, 6\}$. Nota: per calcolare questi divisori si puo' usare ad esempio pari gp ed il comando "*divisors*( )".

ESERCIZIO: (es. 10 del primo foglio) *Sia n un numero naturale. Dimostrare che $4^n + n^4$ puo' solo essere primo quando $n = 1$.*
Chiaramente se n e' pari lo e' anche $4^n + n^4$, che e' diverso da 2 e dunque non puo' essere primo. Se n e' dispari e $\neq 1$ allora $n = 2t - 1$ per un intero $t \geq 1$. Consideriamo

$$(n^2 - n \cdot 2^t + 2^n)(n^2 + n \cdot 2^t + 2^n) =$$

$$n^2(n^2 + n \cdot 2^t + 2^n) - n \cdot 2^t(n^2 + n \cdot 2^t + 2^n) + 2^n(n^2 + n \cdot 2^t + 2^n) =$$

$$n^4 + n^3 \cdot 2^t + n^2 \cdot 2^n - n^3 \cdot 2^t - n^2 \cdot 2^{2t} - n \cdot 2^{n+t} + 2^n \cdot n^2 + n \cdot 2^{n+t} + 4^n = n^4 + 4^n.$$

Se $n > 1$ allora entrambi $(n^2 - n \cdot 2^t + 2^n)$ e $(n^2 + n \cdot 2^t + 2^n)$ sono > 1 quindi si deduce una fattorizzazione non banale per $n^4 + 4^n$.