Lemma 1. *Per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ si ha che*

$$\prod_{n<p\le 2n} p \quad \le \quad 4^n.$$

Dimostrazione. Il coefficiente binomiale $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ è un numero *intero*. I numeri primi p fra n e $2n$ dividono $(2n)!$, ma non $(n!)^2$. Essi dividono quindi $\binom{2n}{n}$ e abbiamo che

$$\prod_{n<p\le 2n} p \quad \le \quad \binom{2n}{n} \quad \le \quad \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \quad = \quad 2^{2n} = 4^n.$$

Corollario 2. *Sia $X \in \mathbf{R}_{>0}$. Allora si ha che*

$$\sum_{p<X} \log p \quad = \quad O(X), \quad (X \to \infty).$$

dove p varia fra i numeri primi $p < X$.

Dimostrazione. Sia $m \in \mathbf{Z}$ l'unico esponente con $2^{m-1} < X \le 2^m$. Applicando il Lemma 1 per $n = 2^m, 2^{m-1}, \ldots, 2, 1$, troviamo che

$$\prod_{p\le X} p \quad \le \quad \prod_{p\le 2^m} p \quad \le \quad 4^{2^m+2^{m-1}+\cdots} \quad < \quad 4^{2^{m+1}} \quad \le \quad 4^{4X}.$$

La proposizione segue quando prendiamo il logaritmo.

Lemma 3. *Per ogni $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ si ha che*

$$n! = \prod_{p\le n} p^{a_p}, \qquad \text{dove} \quad a_p = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty}[\frac{n}{p^i}] \ < \ \frac{n}{p-1}.$$

Nel prodotto p varia fra i numeri primi $\le n$.

Dimostrazione. Questo è un fatto ben noto. Lasciamo la dimostrazione al lettore. Notiamo che per ogni n la sommatoria delle parti intere $[\frac{n}{p^i}]$ è una somma *finita*.

Lemma 4. *Sia $X \in \mathbf{R}_{>0}$. Allora si ha che*

$$\sum_{p<X} \frac{\log p}{p} \quad = \quad \log X \ + \ O(1), \quad (X \to \infty).$$

dove p varia fra i numeri primi $p < X$.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbf{Z}_{>0}$. Prendiamo il logaritmo della formula del Lemma 3. Abbiamo che

$$\sum_{p\le n}\left(\frac{n}{p} - 1\right)\log p \ \le \ \log(n!) \ \le \ \sum_{p\le n}\frac{n}{p-1}\log p,$$

and hence

$$n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}\ -\ \sum_{p\le n}\log p\ \le\ \log(n!)\ \le\ n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}\ +\ n\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Per il Corollario 2, abbiamo che $\sum_{p\le n}\log p = O(n)$. Abbiamo che $\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p(p-1)} = O(1)$, perché l'integrale $\int_2^\infty \frac{\log t dt}{t(t-1)}$ converge. Siccome $\log(n!) = \int_1^n \log t dt + O(\log\ n) = n\log\ n + O(\log\ n)$, la proposizione segue quando dividiamo tutto per n.

Teorema. *Sia $X\in\mathbf{R}_{>0}$. Allora si ha che*

$$\sum_{p<X}\frac{1}{p}\quad=\quad\log\log\ X\ +\ O(1),\quad (X\to\infty).$$

dove p varia fra i numeri primi $p<X$.

Dimostrazione. Sia $X\in\mathbf{R}_{>0}$. Abbiamo che

$$\sum_{p<X}\frac{1}{p}\ =\ \sum_{p<X}\frac{\log p}{p}\frac{1}{\log p}\ =\ \sum_{n<X}\left(\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}-\sum_{p\le n-1}\frac{\log p}{p}\right)\frac{1}{\log n},$$

dove p varia fra i numeri primi, mentre n varia fra i numeri interi positivi. In effetti, l'espressione $\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}-\sum_{p\le n-1}\frac{\log p}{p}$ si annulla eccetto quando n è primo. Se $n=p$ è primo, l'espressione è uguale a $\frac{\log p}{p}$.

Per il Lemma 4 abbiamo quindi che

$$\sum_{p<X}\frac{1}{p}\quad=\quad\sum_{n\le X}\left(\log n-\log(n-1)+\varepsilon(n)-\varepsilon(n-1)\right)\frac{1}{\log n},$$

per una certa funzione limitata ε. Tagliamo la sommatoria in due parti:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \sum_{2\le n<X}(\log n-\log(n-1))\frac{1}{\log n} &= \sum_{2\le n\le X}\frac{1}{n\log n}+O\Big(\sum_{2\le n\le X}\frac{1}{n^2\log n}\Big),\\ &=\log\ \log\ X+O(1).\end{aligned}$$

La prima uguaglianza segue dal fatto che $\log n-\log(n-1)=\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ mentre la seconda segue da $\int_2^X\frac{dt}{t\log t}=\log\ \log\ X+O(1)$ e $\int_2^X\frac{dt}{t\log t}=O(\frac{1}{\log\ X})$.

Per la parte rimanente abbiamo che

$$\begin{aligned}(2)\qquad \sum_{2\le n<X}(\varepsilon(n)-\varepsilon(n-1))\frac{1}{\log n} &= \sum_{2\le n<X}\varepsilon(n)\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)+O(1),\\ &=O(1).\end{aligned}$$

La seconda stima segue dalla disuguaglianza $\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\le\frac{1}{n\log n\log(n+1)}$. La sommatoria $\sum_{n<X}\frac{1}{n\log n\log(n+1)}$ converge perché l'integrale $\int_2^\infty\frac{dt}{t\log t\log(t+1)}$ converge. Combinando (1) e (2) otteniamo infine che

$$\sum_{p<X}\frac{1}{p}\quad=\quad\log\log(X)+O(1),$$

come richiesto.