1. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
vettori in $\mathbf{R}^3$
(a) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.
Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$:
$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$
(b) Calcolare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
(c) Calcolare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
(d) Calcolare la matrice rappresentativa di $f^3 = f \cdot f \cdot f$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

2. Sia
$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$
e sia $f : V \longrightarrow V$ la mappa data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
(a) Controllare che $f(\mathbf{x}) \in V$ per ogni $\mathbf{x} \in V$. Dedurre che $f$ è ben definita.
(b) Trovare una base per $V$.
(c) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $f$ rispetto a questa base.

3. Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da
$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \end{matrix} \}$$
sia $f : V \longrightarrow V$ l'applicazione lineare data, *rispetto la base canonica di* $\mathbf{R}^4$, dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(a) Dimostrare che $f$ è ben definita: se $\mathbf{x} \in V$ allora $f(\mathbf{x}) \in V$.
(b) Determinare una base per $V$ e calcolare la matrice rappresentativa $A$ associata alla applicazione $f : V \longrightarrow V$ rispetto a questa base.
(c) Calcolare nucleo ed immagine della applicazione $f$.
(d) Calcolare il polinomio caratteristico di $A$.