1. Per le seguenti matrici decidere se sono invertibili o meno e, in caso, calcolarne la matrice inversa:

   (a) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Calcolare la matrice AB dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) Calcolare i prodotti AB e BA dove $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

   (c) Calcolare i prodotti AB e BA dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Sia A la matrice n per n data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Sia $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ la moltiplicazione per A. Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che

$$f(\mathbf{e}_1) = 0.$$
$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i-1}; \qquad \text{per } i = 2, 3, \ldots, n,$$

   (b) Per ogni $m > 0$, sia f^m l'applicazione $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ volte}}$ e sia $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{m \text{ volte}}$. Per ogni $m > 0$, calcolare la matrice A^m e determinar il nucleo e l'immagine dell'applicazione f^m.

4. Calcolare

   (a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

   (b) $\det \begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$; (d) $\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $(\varphi \in \mathbf{R})$.

5. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
   (b) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
   (c) Calcolare $\det(A + B)$.