1. Siano $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.
   (a) Calcolare $(z - w)^2$, $2z^2 + 1/w$, $z^{-1} + \overline{w}$, $|z + 3w|^2$. Dare la risposta nella forma $a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.
   (b) Calcolare la parte reale "Re" e la parte immaginaria "Im" di zw, z^{-1} e $\overline{w}^2$.
   (c) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $\mathrm{Arg}(zw)$ ed $\mathrm{Arg}(z^2)$.

2. Sia
$$z = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$
   (a) Calcolare $\mathrm{Arg}(z)$, $|z|$, z^2 e z^3.
   (b) Calcolare $z^2 - z + 1$.
   (c) Trovare gli zeri del polinomio $X^3 + 1$ in $\mathbf{C}$.

3. Risolvere le seguenti equazioni:
   (a) $4z^3 + iz = 0$,
   (b) $z^2 + iz = 0$,
   (c) $z^4 + z^2 + 1 = 0$,
   (d) $z^6 - 1 = 0$,
   (e) $iz^2 + iz = 0$.

4. Determinare i numeri complessi (fare un disegno) tali che
   (a) $z = -\overline{z}$,
   (b) $\mathrm{Arg}(z) = 0$,
   (c) $|z| = 2$,
   (d) $|z| = \overline{z}$.

5. Trovare tutti gli zeri (in $\mathbf{C}$) dei polinomi
   (a) $X^2 - 1$,
   (b) $X^4 - 3$,
   (c) $X^3 + X^2 - X - 1$,
   (d) $X^4 - 2X^2 + 4$,
   (e) X^5.

6. Dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathbf{R}$ si ha che:
$$\cos(5\varphi) = \cos^5(\varphi) - 10\cos^3(\varphi)\mathrm{sen}^2(\varphi) + 5\cos(\varphi)\mathrm{sen}^4(\varphi),$$
$$\mathrm{sen}(5\varphi) = 5\cos^4(\varphi)\mathrm{sen}(\varphi) - 10\cos^2(\varphi)\mathrm{sen}^3(\varphi) + \mathrm{sen}^5(\varphi).$$

7. Sia $z \in \mathbf{C}$.
   (a) Far vedere che $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ e $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$.
   Supponiamo adesso che $z \neq 0$.
   (b) Calcolare $|z/\overline{z}|$.
   (c) Sia $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$. Chi è l'argomento di $1/z$? E di $z/\overline{z}$?

8. *(Disuguaglianza triangolare)* Dimostrare: per ogni $z, w \in \mathbf{C}$ si ha che
$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

9. Calcolare il rango delle seguenti matrici
   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$
   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$