1. Sia π il piano di equazione $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ e siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcolare un' equazione cartesiana del piano π_1 passante per $\mathbf{p}$ e parallelo a π.

b. Calcolare un' equazione parametrica della retta r passante per $\mathbf{q}$ e ortogonale π_1.

c. Calcolare un' equazione parametrica della retta ℓ passante per $\mathbf{p}$ e ortogonale π.

d. Determinare $r \cap \ell$. Se $r \cap \ell = \emptyset$ calcolare la distanza $d(r, \ell)$.

2. Sia S la sfera di equazione $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$. Siano π il piano di equazione $-2x_1 + x_3 + 1 = 0$ e π_1 quello di equazione $x_1 = 1$.

a. Calcolare la distanza fra π e il centro di S e la distanza fra π_1 e il centro di S

b. Se l'intersezione fra π e S è una circonferenza calcolarne il raggio. Fare la stessa cosa per π_1.

3. Date le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni parametriche

$$r_1 \ : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r_2 \ : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r_3 \ : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a. Determinare i punti d'interesezione: $\{P\} = r_1 \cap r_2$; $\{Q\} = r_2 \cap r_3$; $\{R\} = r_3 \cap r_1$

b. Scrivere un' equazione parametrica del piano passante per P, Q ed R.

c. Scrivere un' equazione cartesiana del piano passante per P, Q ed R.

4. Sia S la sfera di equazione $x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 4$ ed r la retta di equazione cartesiana:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

a. Determinare i punti d'intersezione P e Q di S con r.

b. Scrivere l' equazione del piano π_1 tangente alla sfera in P.

c. Scrivere l' equazione del piano π_2 tangente alla sfera in Q.

c. Scrivere un' equazione parametrica della retta r intersezione di π_1 e π_2.