1. Siano
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;$$
   (a) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
   (b) Trovare un terzo vettore $\mathbf{v}_3$ tale che $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

2. Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi W:
   (a) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$; (b) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;
   (c) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$. (b) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Esibire basi per gli spazi vettoriali W dell'Esercizio 2.

4. Siano $V, W \subset \mathbf{R}^4$ due sottospazi dati da
$$V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \qquad W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + 2x_3 = 0\}.$$
   (a) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
   (b) Calcolare le dimensioni di V, W e $V \cap W$.
   (c) Calcolare la dimensione $\dim(V + W)$.

5. Siano dati i sottospazi $U = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ e $V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : x - y + z - w = 0\right\}$
   di $\mathbf{R}^4$.
   (a) Determinare una base per $U + V$ e una base per $U \cap V$;
   (b) Determinare se il vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $U \cap V$.

6. Siano $V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ e $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ sottospazi di $\mathbf{R}^3$.
   (a) Esibire una base di V e una base di W. Calcolare la dimensione di V e di W.
   (b) Calcolare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

7. Sia V lo spazio dei polinomi $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbf{R}[X]$ che hanno le proprietà $\deg(f) \leq 3$, $f(1) = 0$, $a_0 + a_3 = 0$ e $a_1 + a_2 = 0$. Calcolare la dimensione di V come spazio vettoriale e esibire una base di V.